Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

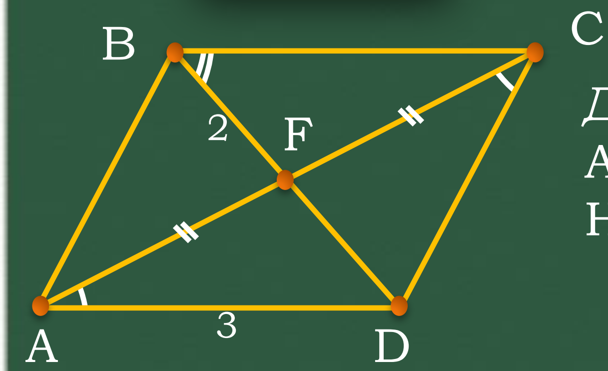
ТЕМА УРОКА: Повторение геометрии при подготовке к итоговой аттестации

ЦЕЛИ УРОКА:
- ✔ обобщить и систематизировать полученные и приобретенные знания, умения, навыки;
- ✔ активация элементов ранее изученного материала;
- ✔ повторить свойства фигур, рассмотреть различные способы расположения геометрических фигур на плоскости;
- ✔ при решении стандартных задач рассматривать возможность другой конфигурации фигур.

АВТОРЫ: *Веприкова Римма Хабибулаевна (учитель математики)*
Зайцева Вера Васильевна (учитель информатики)
МОУ – Гимназия № 2 г. Клин Московской области

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2 | Задача 3



Дано: $\angle CBD=35°$; $BF=2$см; $AD=3$см; $AF=FC$; $\angle CAD=\angle ACB$.

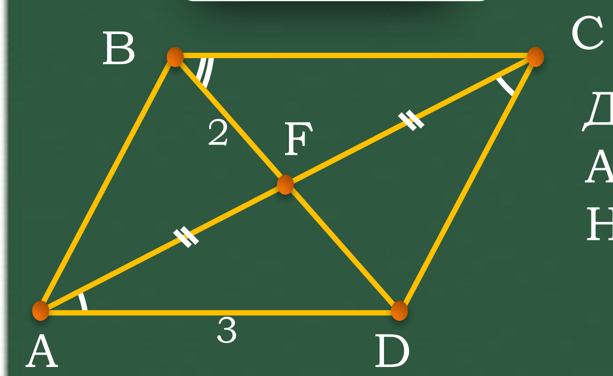
Найти: $\angle ADF$; FD; BC.

Решение

1 2

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2 | Задача 3



Дано: $\angle CBD=35°$; $BF=2$см; $AD=3$см; $AF=FC$; $\angle CAD=\angle ACB$.
Найти: $\angle ADF$; FD; BC.

Решение

1). Так как $\angle CAD=\angle ACB$ – накрест лежащие, то по признаку параллельности прямых $BC \parallel AD$.

2). Рассмотрим $\Delta AFD=\Delta BFC$ по стороне и двум прилежащим углам (1.$AF=FC$; 2. $\angle CAD=\angle ACB$; 3. $\angle AFD=\angle BFC$).

$\Rightarrow BF=FD$; $\angle FBC=\angle ADF$; $BC=AD$

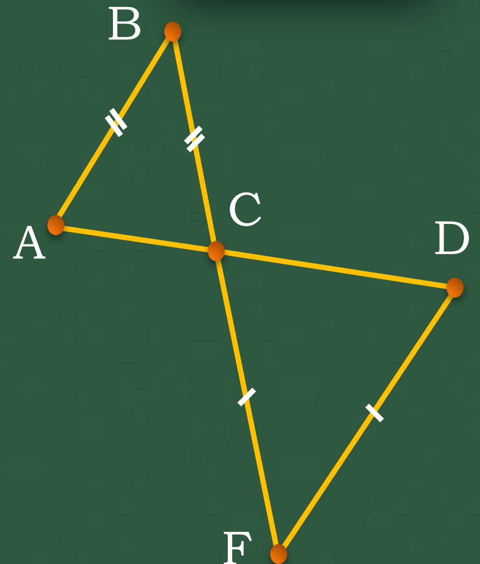
$\Rightarrow BC=AD=3$ (см); $BF=FD=2$ (см); $\angle ADF=35°$.

Ответ: 35°; 3 см; 2 см.

1 2

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | **Задача 2** | Задача 3



Дано:

AB=BC; CF=FD.

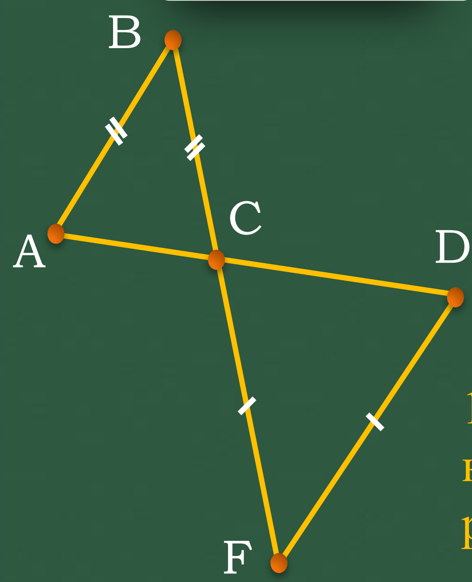
Доказать, что AB||DF.

Доказательство

1 2

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2 | Задача 3



Дано:
AB=BC; CF=FD.
Доказать, что AB||DF.

Доказательство

1). ΔABC – равнобедренный (по определению), так как AB=BC ⇒ ∠BAC=∠ACB по свойству равнобедренного треугольника.

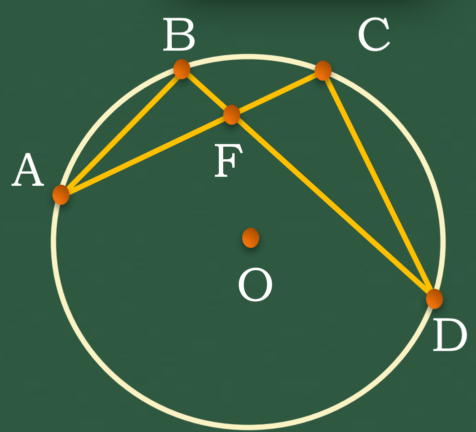
2). ΔCDF – равнобедренный по определению, так как CF=FD ⇒ ∠DCF=∠CDF (по свойству).

3) ∠ACB=∠DCF – вертикальные ⇒ ∠BAC=∠CDF – накрест лежащие, то по признаку параллельности прямых ⇒ AB||FD, что и требовалось доказать.

1 2

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2 | Задача 3



Дано: (O;R) – окружность

т.A,B,C,D $\in$ (O;R)

AC $\cap$ BD= т.F

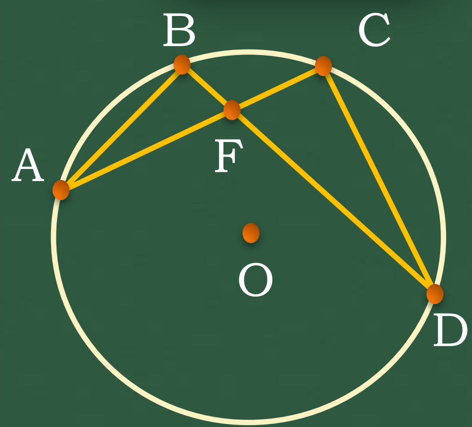
Записать: пропорциональные отрезки.

Решение

1 2

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2 | Задача 3



Дано: (O;R) – окружность

т.A,B,C,D $\in$ (O;R)

AC $\cap$ BD= т.F

Записать: пропорциональные отрезки.

Решение

1). $\angle ABD=\angle ACD$ – вписанные, опирающиеся на одну и туже дугу $\cup AD$.

2). $\angle BAC=\angle CDB$ – вписанные, опирающиеся на одну и туже дугу $\cup BC$.

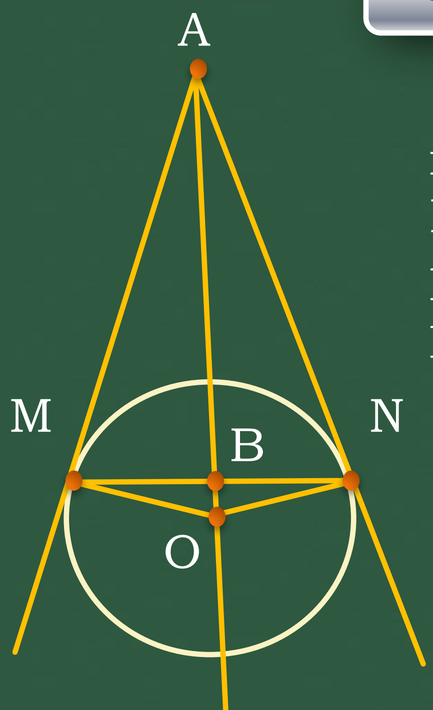
3). $\angle AFB=\angle CFD$ – вертикальные $\Rightarrow$ стороны AF и DF; BF и CF; AB и CD – сходственные стороны $\Rightarrow \Delta ABF \sim \Delta CDF \Rightarrow$

$\frac{AB}{CD}=\frac{BF}{CF}=\frac{AF}{DF}$ – пропорциональные стороны.

1 2

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2



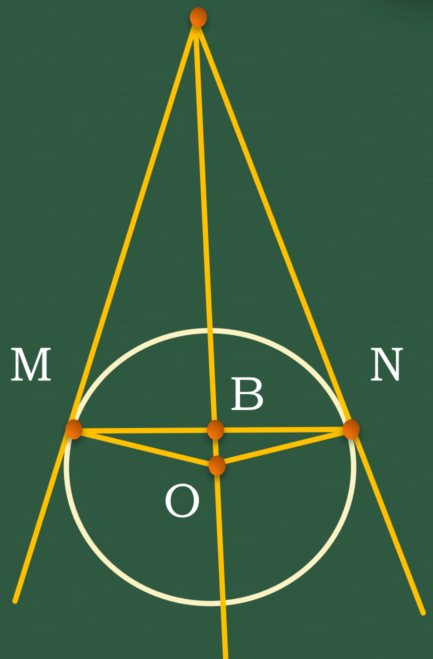
Из точки A проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса r в точках M и N. Найти длину отрезка MN, если расстояние от точки A до центра окружности равно a.

Решение

1 2

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 Задача 2



Решение

OM и ON – радиусы окружности; по свойству радиуса, проведенного в точку касания, OM⊥MA; ON⊥NA.

ΔAMO= ΔANO – прямоугольные (по катету и гипотенузе: OM=ON=r; OA – общая) ⇒ ∠OAM=∠OAN.

AM=AN ⇒ ΔAMN – равнобедренный (по определению) ∠AOM=∠AON.

По свойству равнобедренного треугольника: AB – биссектриса, медиана и высота MB=BN; AB⊥MN.

S(ΔAMO)=½MB·AO или S(ΔAMO)=½MO·AM

Из ΔAMO: по теореме Пифагора: $MA=\sqrt{OA^2-OM^2}; MA=\sqrt{a^2-r^2}$.

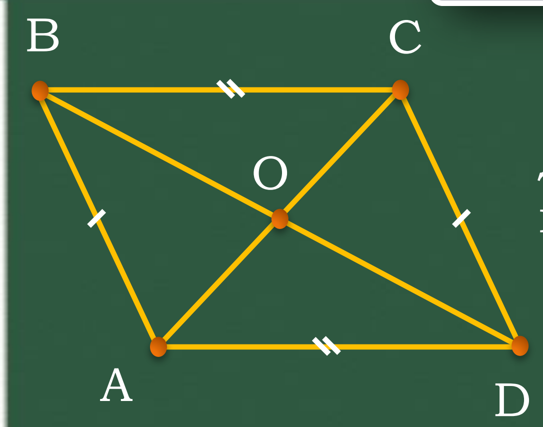
$MB=\frac{r}{a}\sqrt{a^2-r^2}$ и $MN=\frac{2r}{a}\sqrt{a^2-r^2}$ Ответ: $\frac{2r}{a}\sqrt{a^2-r^2}$

1 2

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1

Задача 2



В параллелограмме ABCD ($AB||CD$) диагонали $AC=c$; $BD=3c/2$. Найти площадь параллелограмма, если $\angle CAB=2\angle ABD$.

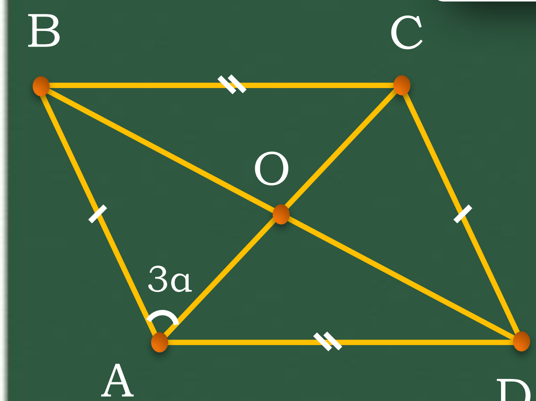
Решение

1

2

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2



Решение

Точка O – точка пересечения диагоналей параллелограмма ABCD. Для вычисления площади применим формулу $S_{(ABCD)}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle AOB$;

$S_{(ABCD)}=\frac{3}{4}c^2\cdot\sin\angle AOB$

Пусть $\angle DBA=\alpha$, тогда $\angle CAB=2\alpha$, $\angle AOB=\pi-3\alpha$.

По теореме синусов из ΔAOB:

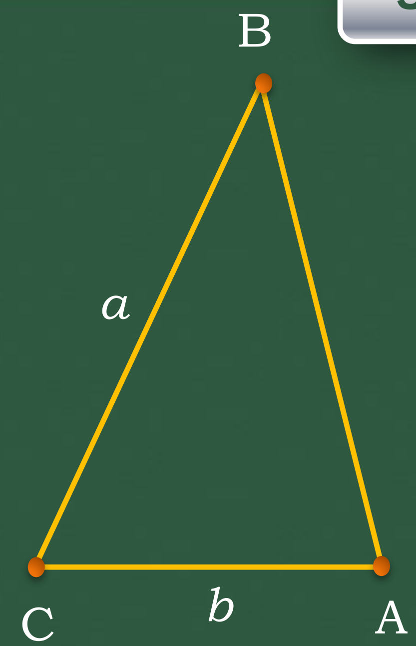
$$\frac{c}{2\sin\alpha}=\frac{3c}{4\sin 2\alpha},\ \text{откуда}\ \cos\alpha=\frac{3}{4};\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Тогда, используя формулу $\sin 3\alpha$, получаем

$$\sin\angle AOB=\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\frac{5\sqrt{7}}{16}\ \text{и}\ S=\frac{15\sqrt{7}}{64}c^2$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{7}}{64}c^2$

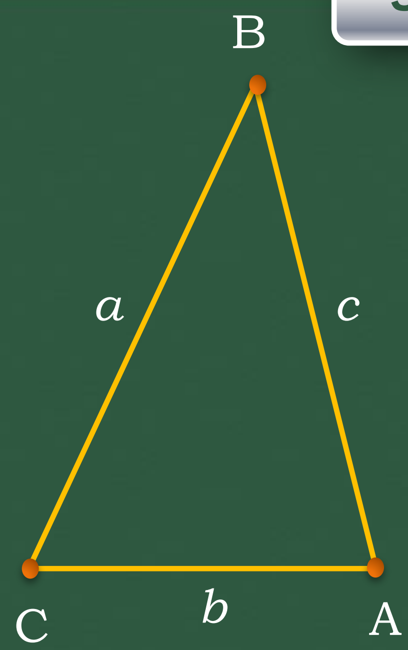
1 2



Две стороны треугольника равны a и b. Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b.

Решение

Искомую сторону ΔABC обозначим с, то есть $AB=c$

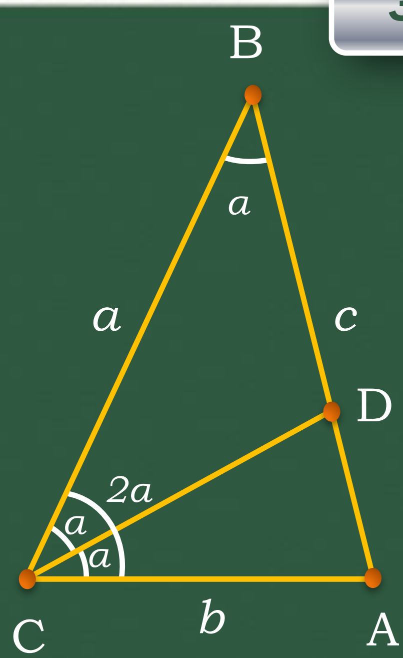


Две стороны треугольника равны a и b. Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b.

Решение

Искомую сторону ΔABC обозначим с, то есть $AB=c$

$\angle B=\alpha$, тогда $\angle C=2\alpha$. Проведем CD – биссектрису $\angle C$.



Две стороны треугольника равны a и b. Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b.

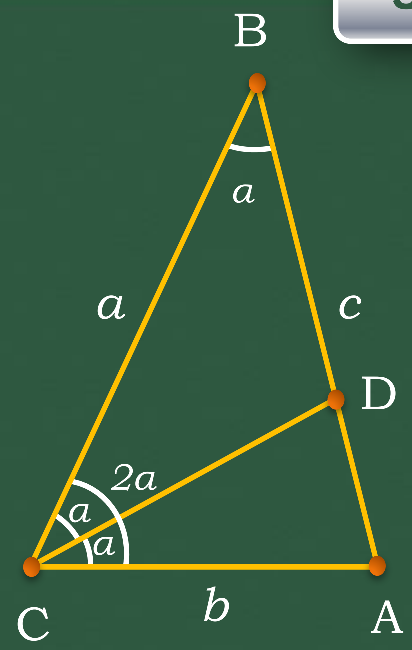
Решение

Искомую сторону ΔABC обозначим c, то есть AB=c

∠B=α, тогда ∠C=2α. Проведем CD – биссектрису ∠C.

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2



Две стороны треугольника равны a и b. Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b.

Решение

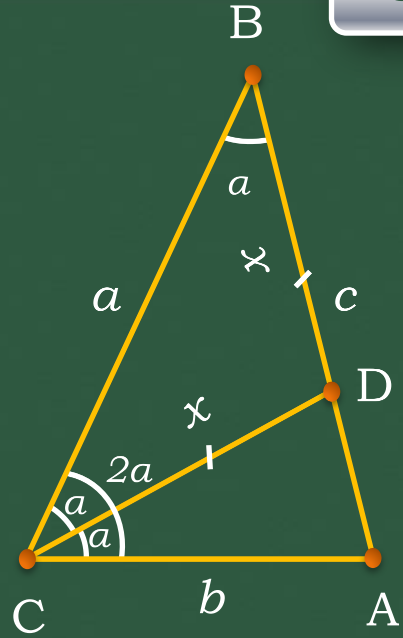
Искомую сторону ΔABC обозначим с, то есть AB=c

$\angle B=\alpha$, тогда $\angle C=2\alpha$. Проведем CD – биссектрису $\angle C$.

Рассмотрим ΔCBD – равнобедренный, так как $\angle BCD=\angle B=\alpha$ (углы при основании ΔABD) $\Rightarrow$ BD=CD.

Пусть BD = x, тогда AD=$c-x$, CD=x.

1 2 3 4 5 6 Т 8



Две стороны треугольника равны a и b. Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b.

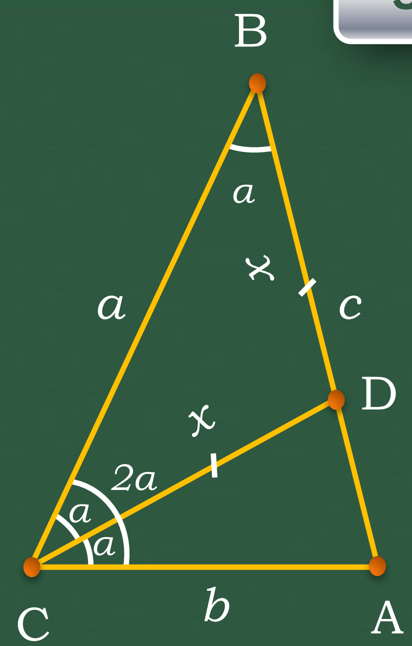
Решение

Искомую сторону ∆ABC обозначим c, то есть AB=c

∠B=α, тогда ∠C=2α. Проведем CD – биссектрису ∠C.

Рассмотрим ∆CBD – равнобедренный, так как ∠BCD=∠B=α (углы при основании ∆ABD) ⇒ BD=CD.

Пусть BD – x, тогда AD=$c - x$, CD=x.



Две стороны треугольника равны a и b. Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b.

Решение

Искомую сторону ΔABC обозначим c, то есть AB=c

∠B=α, тогда ∠C=2α. Проведем CD – биссектрису ∠C.

Рассмотрим ΔCBD – равнобедренный, так как ∠BCD=∠B=α (углы при основании ΔABD) ⇒ BD=CD.

Пусть BD – x, тогда AD=c – x, CD=x.

По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2

Теорема о биссектрисе

Биссектриса любого внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Доказательство

Пусть AD – биссектриса ΔABC.
Так как площади треугольников, имеющих общую вершину A, относятся как длины их оснований, то

$$\frac{S_{(\Delta ACD)}}{S_{(\Delta ABD)}} = \frac{CD}{BD} \quad (1),$$

с другой стороны, эти площади относятся как длины сторон:

$$\frac{S_{(\Delta ACD)}}{S_{(\Delta ABD)}} = \frac{0{,}5AC \cdot AD \cdot \sin\angle CAD}{0{,}5AB \cdot AD \cdot \sin\angle DAB} = \frac{AC}{AB} \quad (2).$$

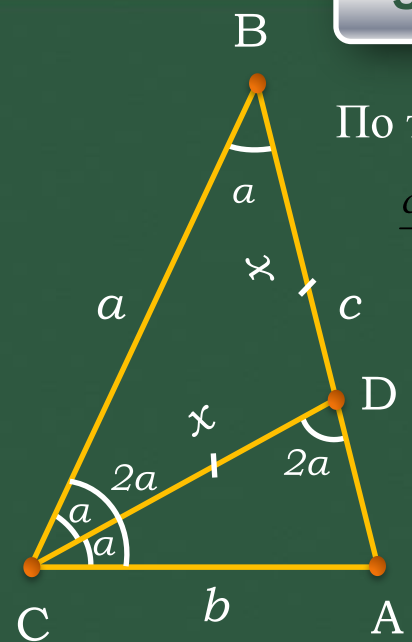
Из (1) и(2) следует, что $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$. Теорема доказана

.

1 2 3 4 5 6 T 8

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2



По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника:

$$\frac{c-x}{x}=\frac{b}{a} \text{ или } x=\frac{a}{a+b}\cdot c \quad (1)$$

С другой стороны, $\angle ACD=\alpha$, а $\angle ADC=2\alpha$ (как внешний угол ΔCBD). Тогда три угла ΔACD равны трем углам ΔABC, следовательно, $\Delta ACD \sim \Delta ABC$.

Из подобия треугольников найдем

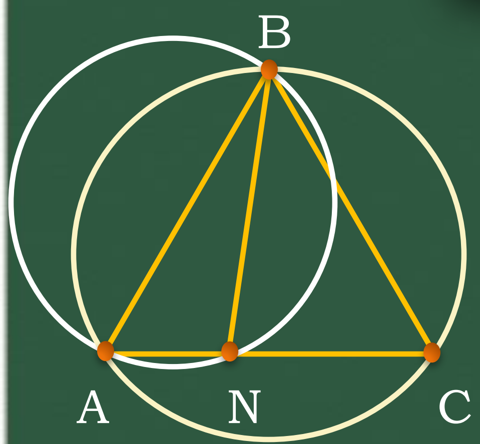
$$\frac{c}{a}=\frac{b}{x}; \quad x=\frac{ab}{c} \quad (2)$$

Приравнивая правые части (1) и (2) равенства, получим

$$\frac{ab}{c}=\frac{ac}{a+b}; \quad ac^2=ab(a+b); c^2=\frac{ab(a+b)}{a}; c^2=b(a+b); c=\sqrt{(a+b)b}$$

Ответ: $BC=\sqrt{(a+b)b}$

1 2 3 4 5 6 Т 8



Точка N лежит на стороне AC правильного треугольника ABC. Найти отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABN и ABC, если AN:AC=n

Решение

Обозначим сторону треугольника ABC через a, тогда AN=na.

Сторону BN найдем по теореме косинусов:

$$BN^2 = AB^2 + AN^2 - 2AB \cdot AN \cdot \cos 60^\circ;\quad BN = a\sqrt{1+n^2-n}$$

R1 – радиус окружности, описанной около ΔABN.

R2 – радиус окружности, описанной около ΔABC.

Применим формулу $S = \dfrac{abc}{4R}$

Около всякого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин сторон этого треугольника.

Радиус R окружности, описанной около треугольника, по его сторонам и полупериметру вычисляется по формуле:

$$\mathrm{R} = \frac{abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}};\text{где } p - \text{полупериметр}: p = \frac{a+b+c}{2}$$

Также радиус R окружности, описанной около треугольника, может быть вычислен по формулам:

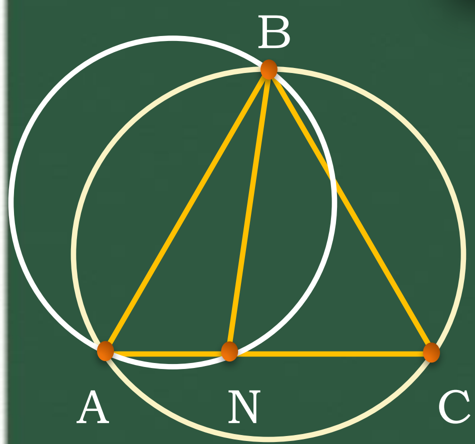
$$\mathrm{R} = \frac{ab}{2h_c}; \mathrm{R} = \frac{abc}{4\mathrm{S}},$$

где S – площадь треугольника,

h_c – высота, проведенная из вершины С.

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2



Применяя формулу $S = \dfrac{abc}{4R}$

получим, что

$$S_{(\Delta ABN)} = \frac{na^3\sqrt{1+n^2-n}}{4R_1};\ S_{(\Delta ABC)} = \frac{a^3}{4R_2}.$$

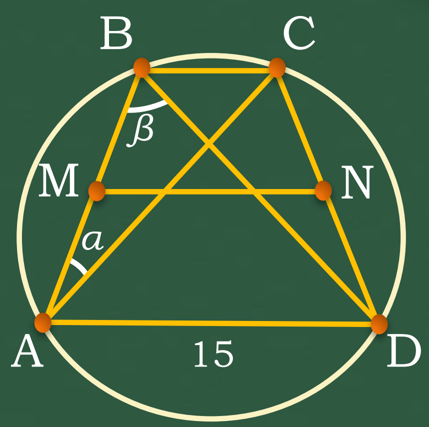
Если у треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания. А так как ΔABN и ΔABC имеют общую высоту, проведенную из вершины B, то их площади относятся как длины оснований: $S_{(\Delta ABN)} = n \cdot S_{(\Delta ABC)}$.

Подставляя выражения для площадей, получим:

$$\frac{na^3\sqrt{1+n^2-n}}{4R_1} = \frac{na^3}{4R_2};\ \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{1+n^2-n}.$$

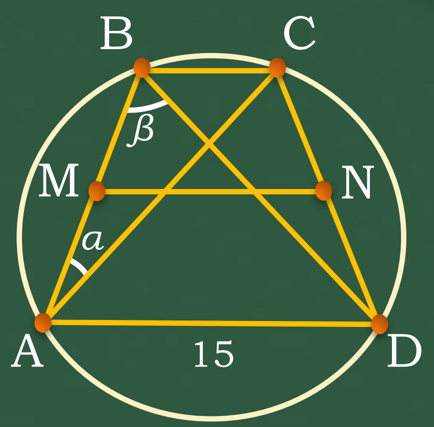
Ответ: $\dfrac{R_1}{R_2} = \sqrt{1+n^2-n}.$

1 2 3



Трапеция ABCD вписана в окружность. Найти среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус ∠BAC равен 1/3, синус ∠ABD равен 5/9.

Решение



Решение

Средняя линия трапеции равна $MN = \dfrac{AD + BC}{2}.$

Для нахождения средней линии надо найти длину основания BC.

Используя свойства вписанных и центральных углов окружности, а также радиус описанной окружности R, выразим:

$$AD = 2R \cdot \sin\angle\beta; BC = 2R \cdot \sin\angle\alpha;$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{\sin\angle\alpha}{\sin\angle\beta} = \frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 5} = \frac{3}{5}; BC = \frac{3}{5} AD; BC = 9$$

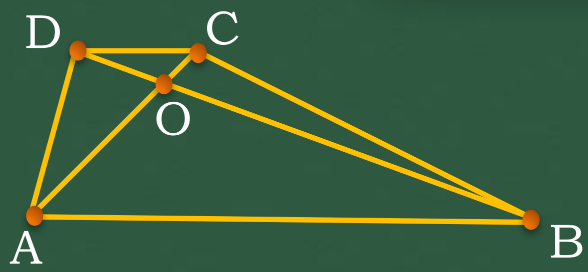
Длина $MN = \dfrac{15 + 9}{2}; MN = 12$

Ответ: 12

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1

Задача 2



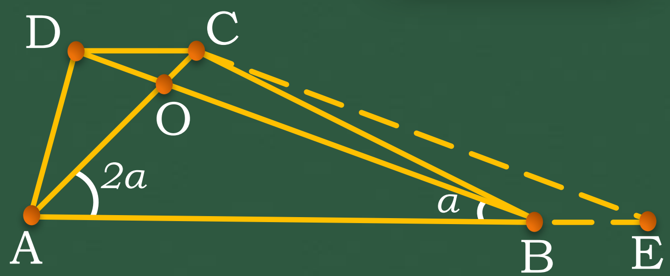
В трапеции ABCD (AB||CD) диагонали AC=a и BD=7/5a. Найти площадь трапеции, если ∠CAB=2∠DBA.

Решение

1 2

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Задача 1 | Задача 2



Решение

Пусть $\angle DBA=\alpha$, тогда $\angle CAB=2\alpha$.

Через вершину С проведем $CE \parallel DB$ до пересечения ее с продолжением основания АВ в точке Е.

$BE=CD$; $CE=BD$; $\angle CEA=\angle DBA=\alpha$ – соответственные при $DB \parallel CE$ и АЕ секущая.

$$S(\Delta ACE)=\frac{1}{2}AE\cdot h=\frac{1}{2}(AB+BE)\cdot h=\frac{1}{2}(AB+DC)\cdot h=S(ABCD)$$

h – высота ΔACE и трапеции ABCD.

$$S(\Delta ACE)=\frac{1}{2}AC\cdot EC\cdot \sin\angle ACE=\frac{1}{2}a\cdot\frac{7a}{5}\cdot\sin(\pi-3\alpha)=\frac{7}{10}a^2\cdot\sin 3\alpha.$$

Для ΔACE применим теорему синусов: $\dfrac{CE}{\sin 2\alpha}=\dfrac{AC}{\sin\alpha}$; $\cos\alpha=\dfrac{7}{10}$; $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{51}}{10}$.

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; $\sin 3\alpha=\dfrac{12\sqrt{51}}{125}$, следовательно,

$$S(\Delta ABCD)=S(\Delta ACE)=\frac{42\sqrt{51}}{125\cdot 5}\cdot a^2$$

Ответ: $\dfrac{42\sqrt{51}}{625}\cdot a^2$

1 2

Устная работа | Проверка д/з | Решение задач | Д/з

Спасибо за внимание

Выход