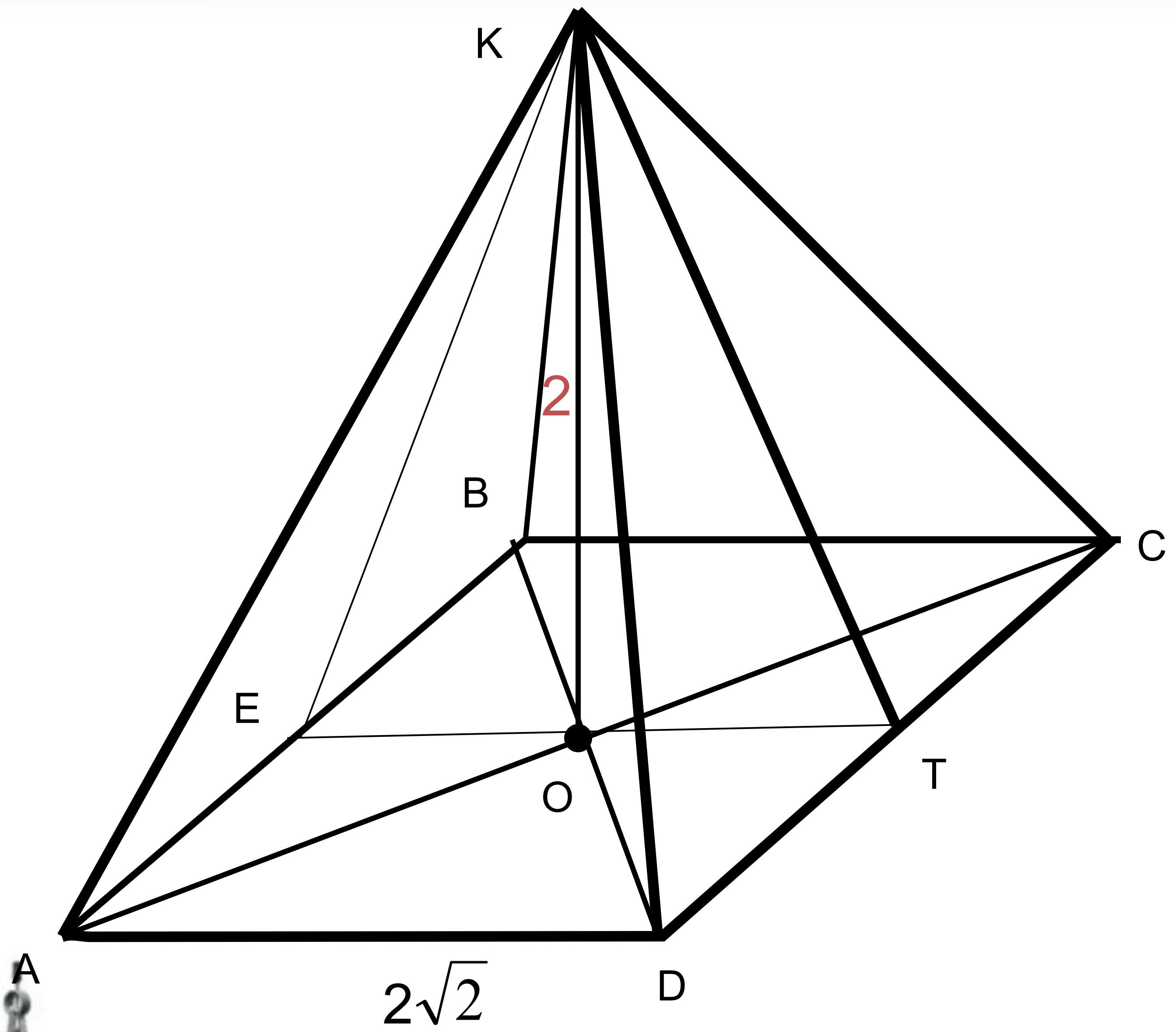
Правильная пирамида

Выполнила Петренко Наталья Викторовна,
Учитель математики МОУ СОШ №7,
Ст.Воронежской, Усть - Лабинского района,
Краснодарского края


K
2
B
C
E
O
T
A
D
$2\sqrt{2}$

В правильной четырехугольной пирамиде известны длина стороны основания $2\sqrt{2}$ и длина высоты 2. Найдите:

а) объем пирамиды;

б) площадь боковой поверхности;

в) угол наклона бокового ребра к плоскости основания;

г) угол наклона боковой грани к плоскости основания;

д) радиус вписанного шара;

е) радиус описанного шара;

ж) расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания;

Выход

з) расстояние от вершины пирамиды до ребра основания;

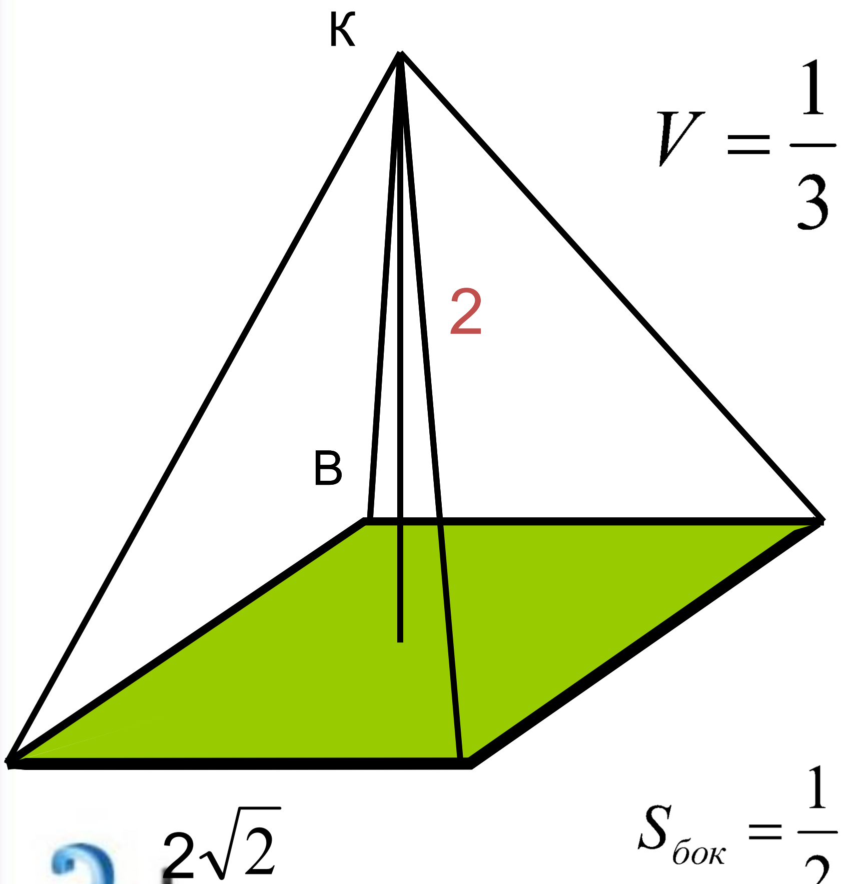
и) расстояние от ребра основания до противоположной грани;

к) расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю ос нования;

л) объем вписанного конуса;

м) площадь боковой поверхности описанного конуса.

Выход



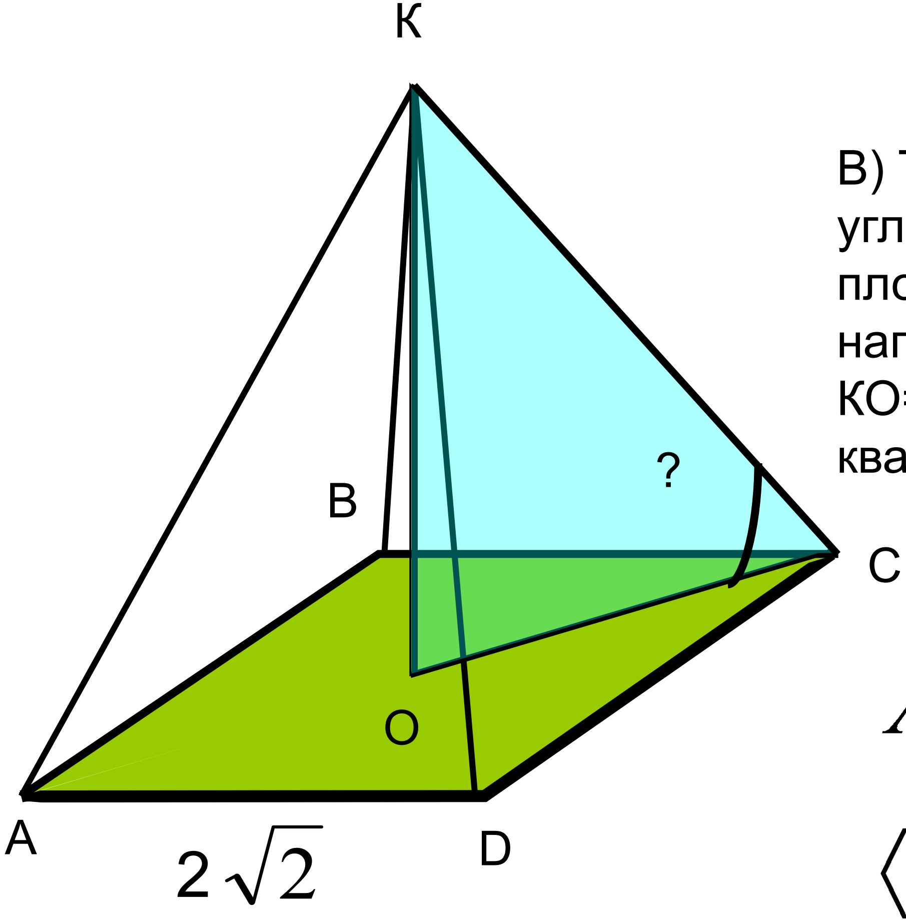
а) КО – высота пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot KO = \frac{1}{3}(2\sqrt{2})^2 \cdot 2 = \frac{16}{3}$$

б) Проведем апофему КТ и найдем ее длину из ∆ КОТ:

$$KT = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$$

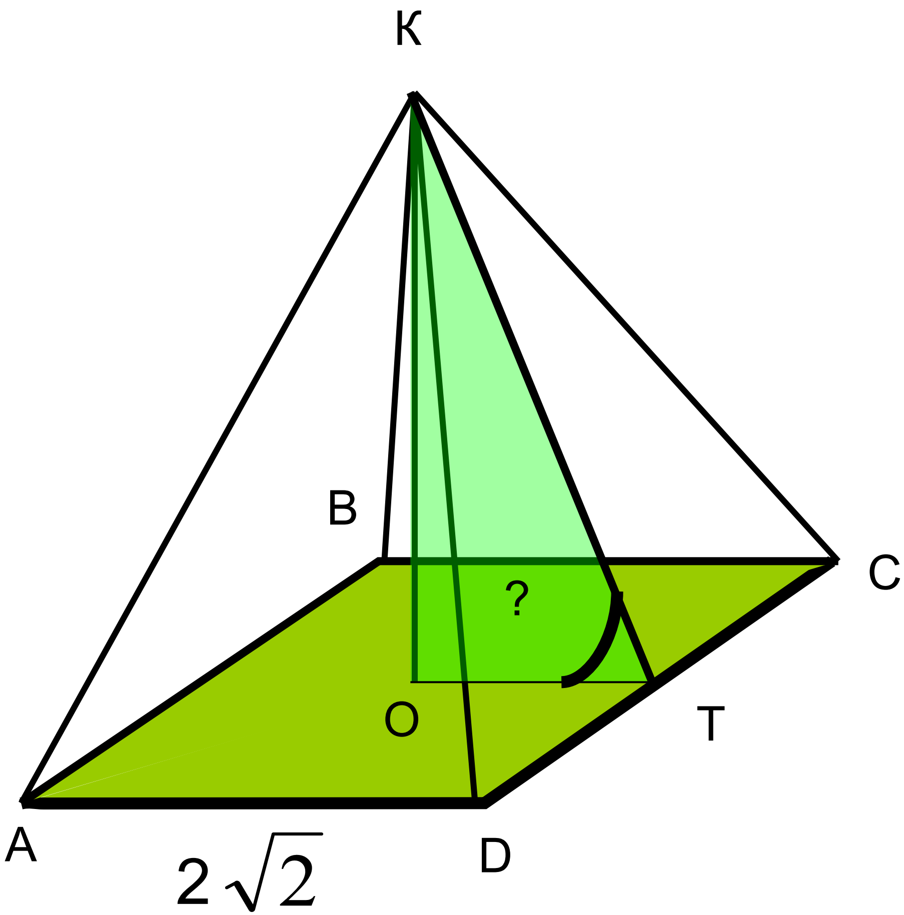
$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot KT = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$$



В) Так как в правильной пирамиде все углы наклона всех боковых ребер к плоскости основания равны, то найдем например, <КСО. Рассмотрим ΔКСО КО=2, ОС=0,5 АС, где АС – диагональ квадрата ABCD, значит

$$AC = (2\sqrt{2})\sqrt{2} = 4$$

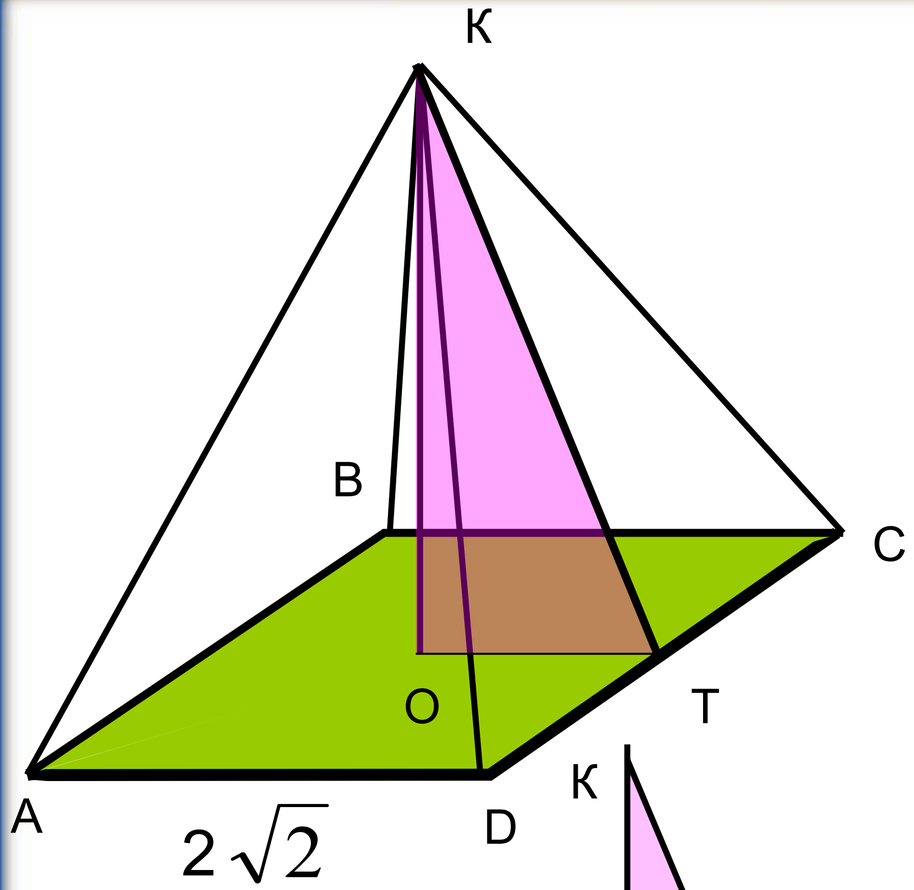
$$\langle KCO = 45^0$$



г) Так как в правильной пирамиде углы наклона всех боковых граней к плоскости основания равны, то найдем, например, угол наклона боковой грани KCD к плоскости ABC. так как KT DC, то OT DC, поэтому < KTO -линейный угол искомого двугранного угла. Рассмотрим Δ KTO: KO=2.

$$OT = \frac{1}{2}AD = \sqrt{2}, KT = \sqrt{6}$$

$$< KTO = arctg\sqrt{2}$$



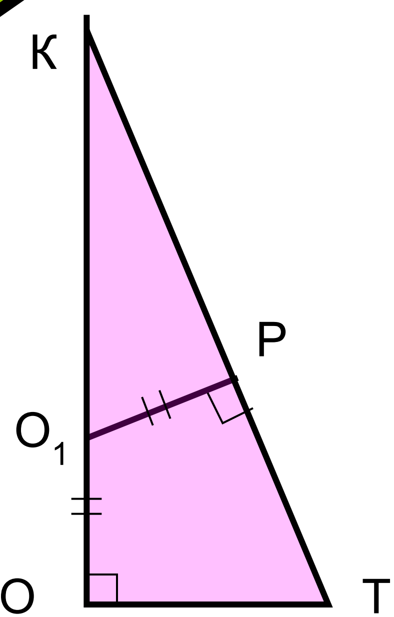
д) Так как двугранные углы при основании правильной пирамиды равны, то центр вписанного шара (точка O_1) принадлежит высоте KO. Обозначим радиус вписанного шара буквой r. Рассмотрим Δ КТО: $O_1P = O_1O$ = r. Используя подобие треугольников Δ КТО и Δ KO_1P, имеем:

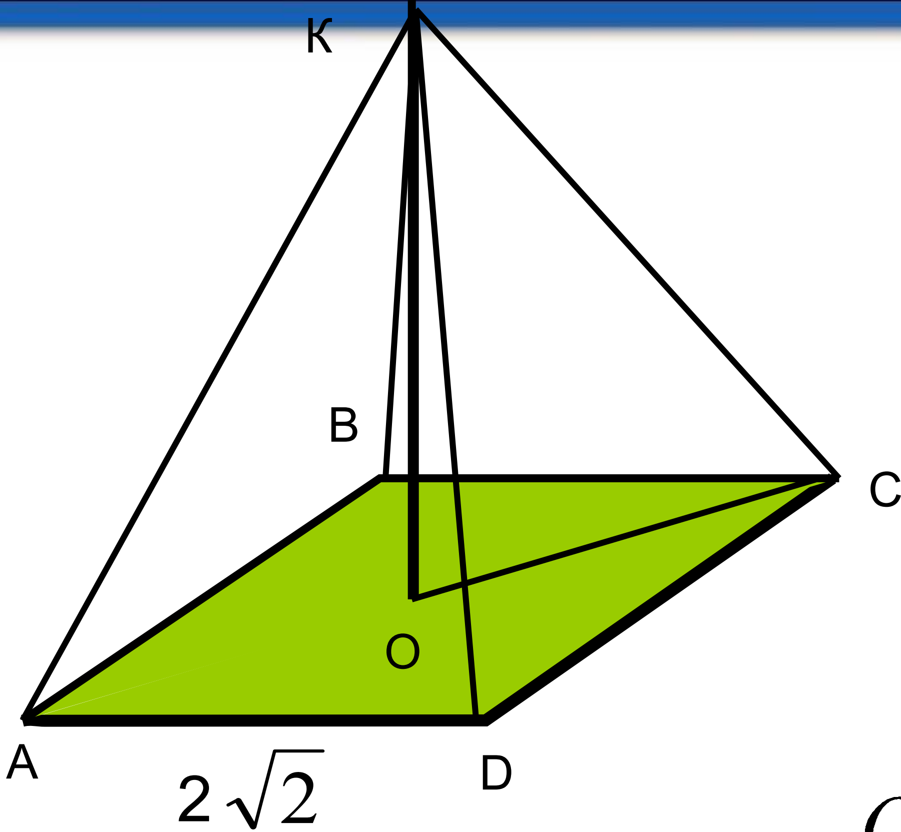
$$\frac{KO_1}{KT} = \frac{O_1P}{OT},$$

$$\frac{2-r}{\sqrt{6}} = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$(2-r)\sqrt{2} = r\sqrt{6},$$

$$r = \sqrt{3} - 1$$

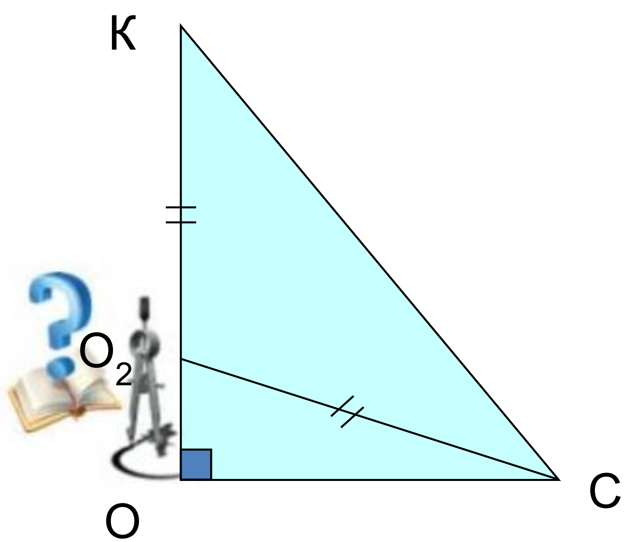




е) Так как боковые ребра правильной пирамиды равны, то центр описанного шара (точка O_2) лежит на прямой *KO.* Обозначим радиус описанного шара через R. Рассмотрим Δ КСО.
По теореме Пифагора из $\Delta\, O_2OC$:

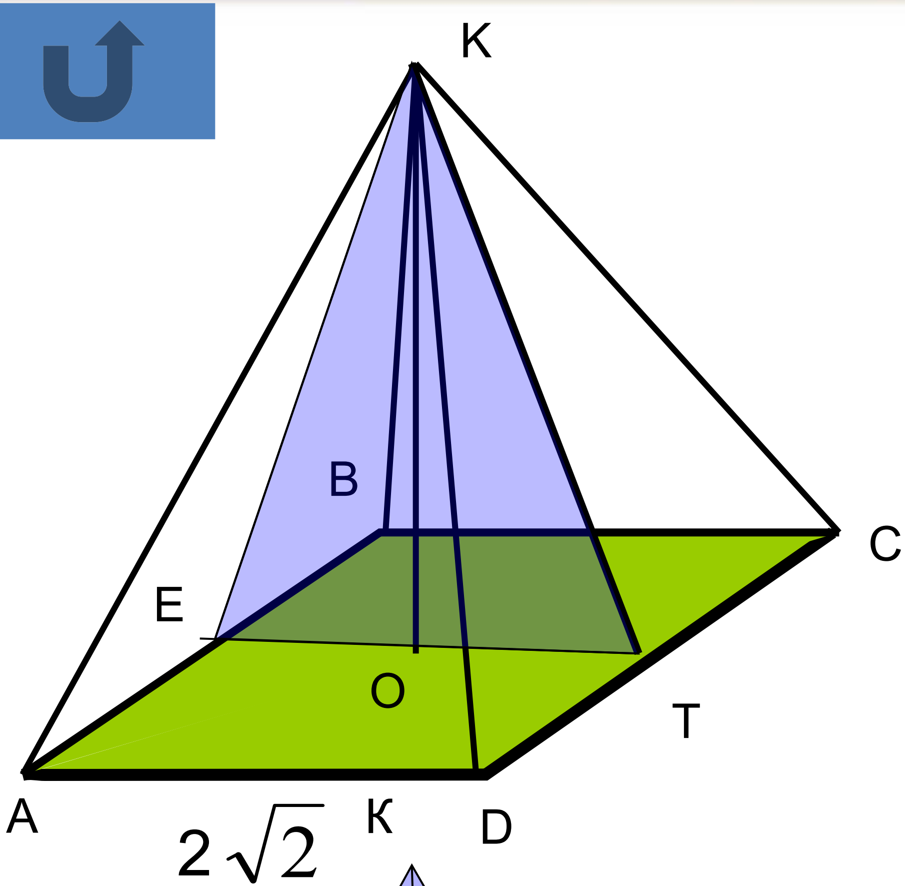
$$O_2C^2 = OC^2 + O_2O^2,$$

$$R^2 = (\sqrt{2})^2 + (2-R)^2, R = 2.$$



Получаем, что центр описанного шара совпадает с точкой О.

ж) Расстояние от точки *K* до плоскости АВС равно длине отрезка *KO* и равно 2.



з) Так как в правильной пирамиде расстояния от вершины до ребер основания равны, то найдем, например, расстояние от точки *К* до ребра *CD*, Это расстояние равно длине апофемы *КТ* и равно $\sqrt{6}$

и) Так как прямая *DC* параллельна плоскости *ABK* (по признаку параллельности прямой и плоскости), то

пл

от

пл

В

се

ра

д

в

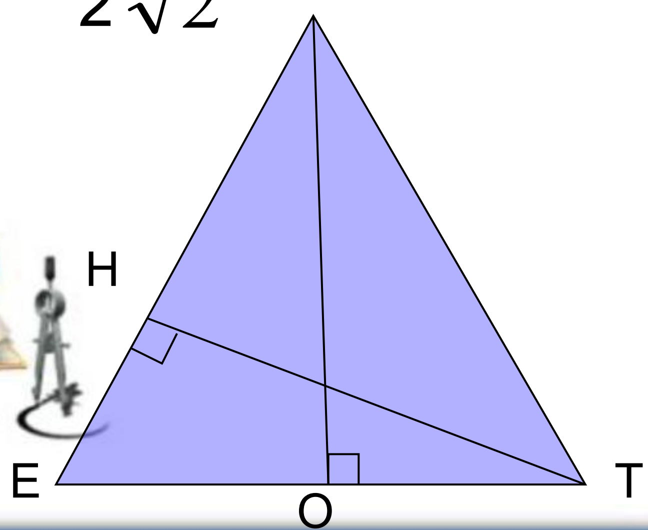
Δ

$$KT = KE = \sqrt{6}, ET = 2\sqrt{2}.$$

$$S_{EKT} = \frac{1}{2} KO \cdot ET = \frac{1}{2} EK \cdot TH,$$

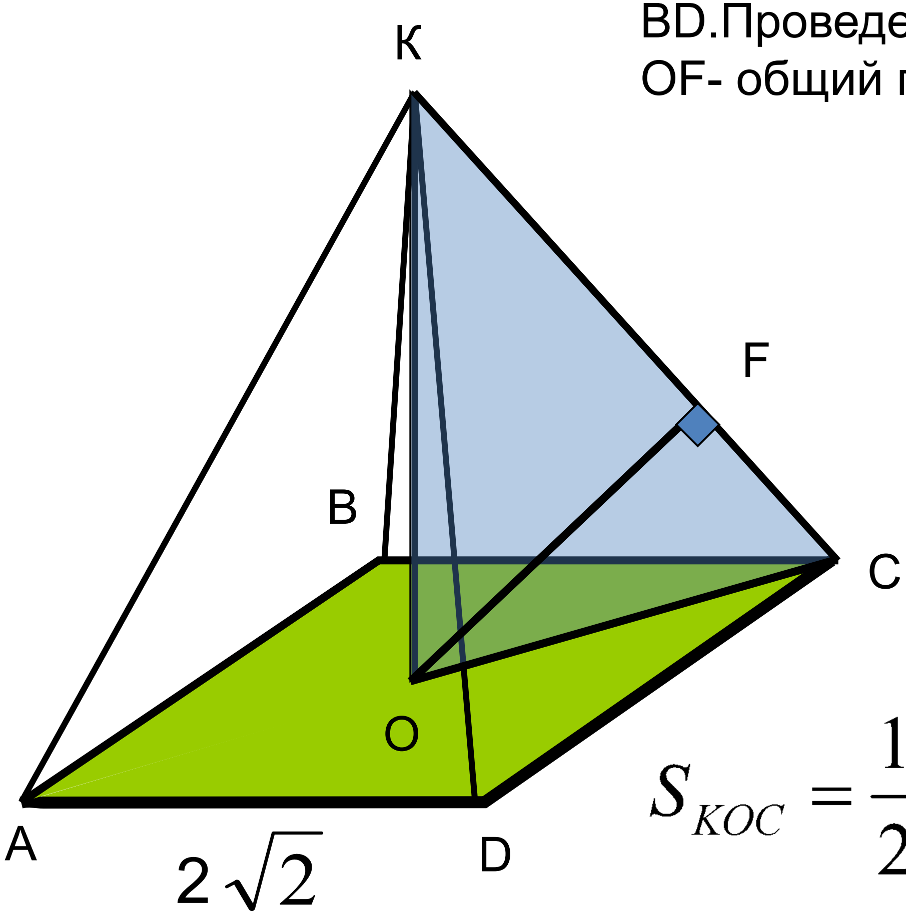
$$2 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot TH,$$

$$TH = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$



РЕШЕНИЕ

К) Найдем расстояние от ребра КС до диагонали BD.Проведем высоту OF в Δ КСО и докажем , что OF- общий перпендикуляр к прямым КС и BD.



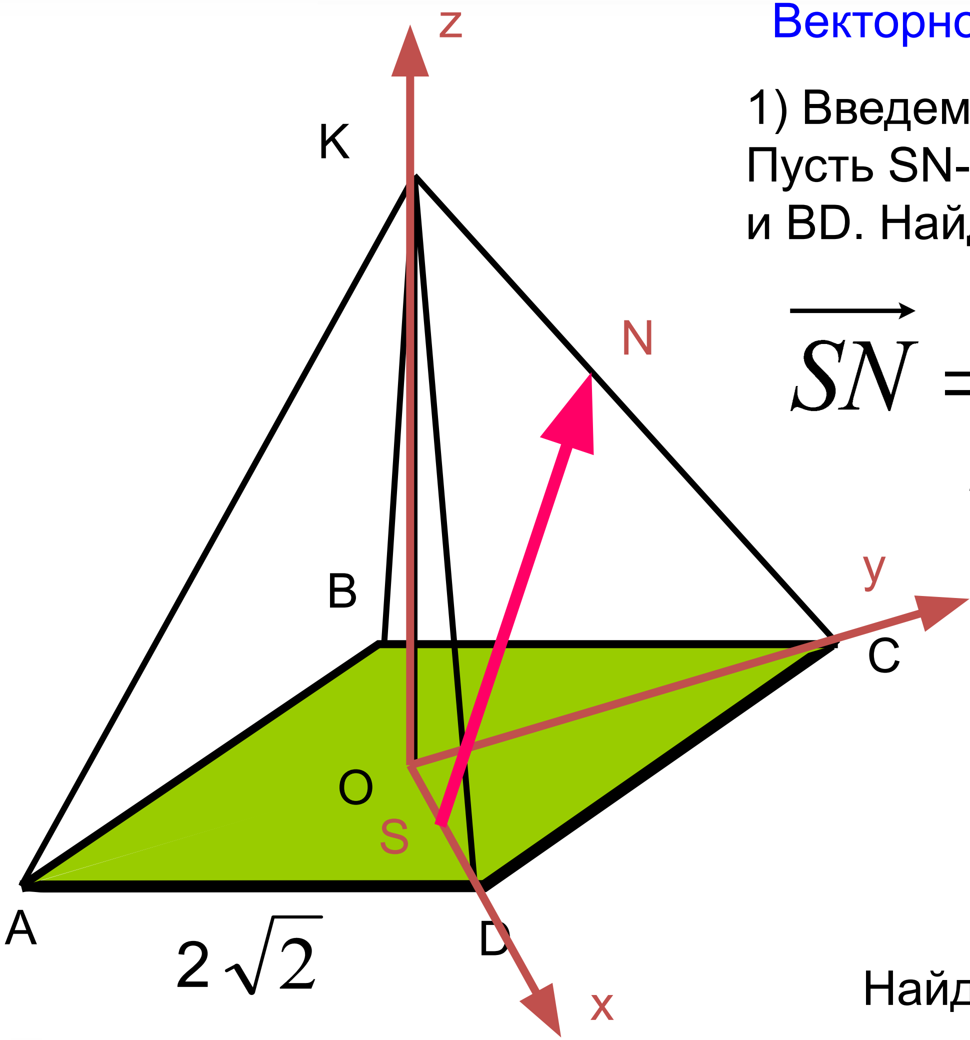
1) OF$\perp$ КС по построению
2) Так как BD $\perp$(КСО) (По признаку перпендикулярности прямой и Плоскости), а OF $\subset$ (КСО), то BD$\perp$OF
3)Найдем длину OF, используя площадь Δ КСО

$$S_{KOC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot KC\cdot OF,$$

$$2=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot OF,$$

$$OF=\sqrt{2}$$

Векторно-координатный метод



1) Введем прямоугольную систему координат. Пусть SN- общий перпендикуляр прямых KC и BD. Найдем длину вектора SN

$$\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$$

2)Так как SD коллинеарен BD, то существует такое число x, что

$$\overrightarrow{SD} = x\overrightarrow{BD}, \text{аналогично}$$

$$\overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CK} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{SN} = x\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{CK}$$

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{BD}\{4;0;0\}, \overrightarrow{DC}\{-2;2;0\}, \overrightarrow{CK}\{0;-2;2\} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{SN}\{4x-2;2-2y;2y\}$$

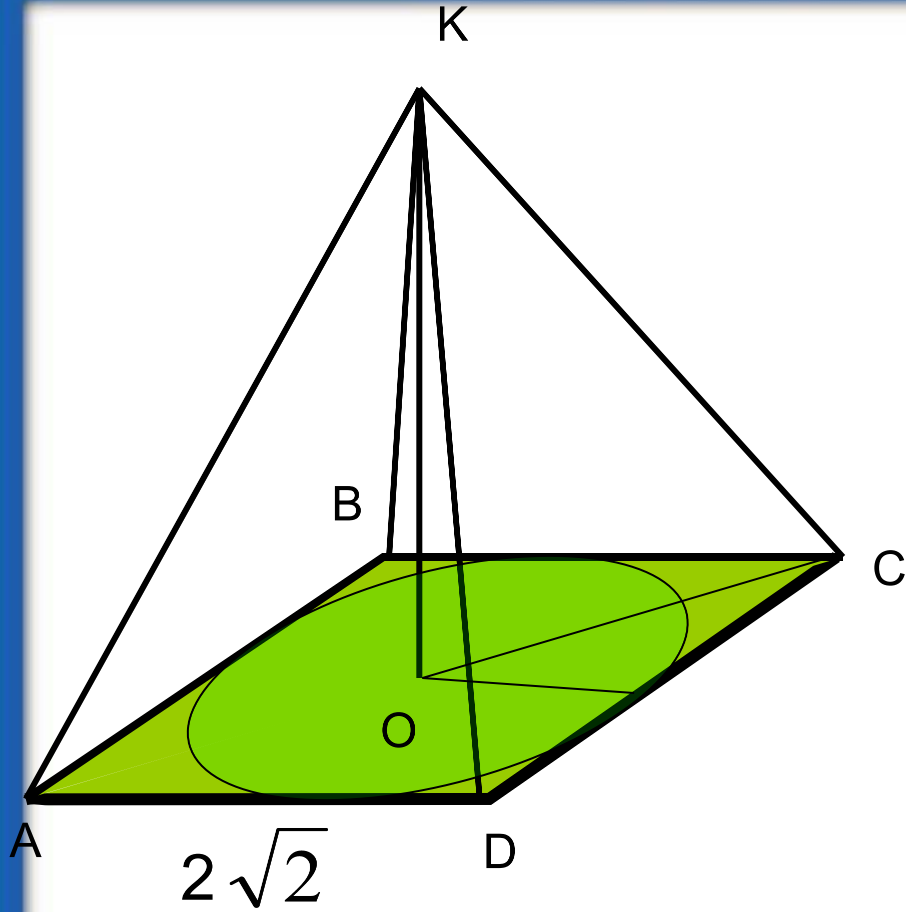
$$\textit{Учитывая, что}\ \overrightarrow{SN} \perp \overrightarrow{BD}, \left(\overrightarrow{SN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0\right)$$

$$\overrightarrow{SN} \perp \overrightarrow{CK} \left(\overrightarrow{SN} \cdot \overrightarrow{CK} = 0\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (4x - 2)4 = 0 \\ (2 - 2y)(-2) + 2y \cdot 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}5, \\ y = 0{,}5. \end{cases}$$

$$\textit{Получаем}\ \overrightarrow{SN}\{0;1;1\}$$

$$\left|\overrightarrow{SN}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



л) Высота вписанного конуса равна высоте пирамиды, а радиус основания конуса равен радиусу окружности, вписанной в квадрат *ABCD,* поэтому

$$V_{вписан.конуса} = \frac{1}{3} \cdot \pi (\sqrt{2})^2 \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi$$

м) Образующая описанного конуса равна боковому ребру пирамиды, а радиус основания конуса равен радиусу окружности, описанной около квадрата *ABCD,* поэтому

$$S_{впис.конуса} = \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi.$$

Спасибо за внимание.