Правильные и полуправильные многогранники. Тела Архимеда.

СОДЕРЖАНИЕ

Правильные и полуправильные многогранники

- Правильным многогранником называется выпуклый многогранник, грани которого – равные правильные многоугольники, а двугранные углы при всех вершинах равны между собой. Доказано, что в каждой из вершин правильного многогранника сходится одно и то же число граней и одно и то же число ребер.
- Всего в природе существует пять правильных многогранников. По сравнению с количеством правильных многоугольников это – очень мало: для каждого целого *n*>*2* существует один правильный *n*-угольник, т.е. правильных многоугольников – бесконечно много. Правильные многогранники имеют названия по числу граней: тетраэдр (4 грани): гексаэдр (6 граней), октаэдр (8 граней), додекаэдр (12 граней) и икосаэдр (20 граней).

Правильные и полуправильные многогранники

По-гречески "хедрон" означает грань, "тетра", "гекса" и т. д. – указанные числа граней. Нетрудно догадаться, что гексаэдр есть не что иное, как всем знакомый куб. Грани тетраэдра, октаэдра и икосаэдра – правильные треугольники, куба – квадраты, додекаэдра – правильные пятиугольники.

Правильные и полуправильные многогранники

Если обозначить количество углов у одной грани правильного многогранника за *q*, а количество граней, сходящихся в одной вершине – за *p*, можно получить точные характеристики каждого правильного многогранника. Вот они (первое число – *q*, второе – *p*): *(3;3), (3;4), (4;3), (3;5), (5;3)*. При этом у куба и октаэдра, а также у икосаэдра и додекаэдра, числа *p* и *q* оказываются как бы переставленными. Эти многогранники называют двойственными. Тетраэдр считается двойственным сам себе. У двойственных многогранников количество ребер одинаковое.

Правильные и полуправильные многогранники

Правильные многогранники симметричны. Это означает, что для любого произвольно выбранного ребра *AB* и примыкающей к нему грани *F* можно так повернуть многогранник, что ребро *AB* перейдет в любой отличное от него ребро *CD*, точка *A* – в любой его конец (*C* или *D*), а грань *F* совпадет с одной из двух примыкающих к нему граней. Таких возможных поворотов – самосовмещений всего существует *4P*, где *P* – число ребер многогранника. При этом половина из них – повороты вокруг воображаемых осей, соединяющих центр многогранника с его вершинами, серединами ребер и граней на углы, кратные соответственно $2\pi/q$, π и $2\pi/p$, а другая половина – симметрии относительно плоскостей и "зеркальные повороты". Указанное "свойство максимальной симметричности" иногда принимают за определение правильного многогранника. Но человеку, далекому от математики, трудно представить себе геометрическое тело с таким определением.

Правильные и полуправильные многогранники

Иоганн Кеплер называл куб "родителем" всех правильных многогранников. На основе куба он смог построить все другие виды правильных многогранников.

Если провести в противоположных гранях куба скрещивающиеся диагонали, то их концы окажутся вершинами тетраэдра, а вершины октаэдра – это центры граней куба. Полученные многоугольники действительно правильные, так как их грани – правильные треугольники. Равенство же двугранных углов следует из того, что при повороте куба ребро многогранника можно перевести в любое другое.

Правильные и полуправильные многогранники

Для того, чтобы построить икосаэдр, на каждой грани куба нужно построить отрезок длиной *x* (пока что это – любая длина) так, чтобы он был параллелен двум сторонам своей грани и перпендикулярен таким же отрезкам на соседних гранях. Середина его должна совпадать с центром грани. Соединим концы этих отрезков между собой, и мы получим двадцатигранник, грани которого – треугольники, и при каждой вершине их пять. Найдем такое число *x*, при котором все ребра этого многогранника равны, т. е. он правильный. Т.к. куб симметричен, то все ребра, не принадлежащие граням куба равны между собой. Примем длину ребра куба за *a*. Рассмотрим треугольник *ABC* (рис. 2), где $AC = a - x$, $BC^2 = CD^2 + BD^2 = 1/4\ a^2 + 1/4\ x^2$. По теореме Пифагора получаем: $AB^2 = AC^2 + CB^2 = (\ x^2 + a^2 + (a - x)^2\ ) / 4$.

Приравнивая *AB* к *x*, получаем квадратное уравнение: $x^2 + a\,x - a^2 = 0$, откуда $x = a\,(\sqrt{5} - 1) / 2$. Интересно, что полученный множитель при *a*, т. е. отношение ребра куба к ребру вписанного в него икосаэдра – не что иное, как золотое сечение.

Правильные и полуправильные многогранники

Теперь докажем равенство двугранных углов. Рассмотрим 5 ребер, выходящих из точки *A*. Концы их всех равноудалены и от точки *A*, и от центра куба *O*. Отсюда следует, что они лежат на пересечении двух сфер с центрами *A* и *O*, а значит – на окружности, причем ребра, соединяющие их с точкой *A*, равны. Значит, эти пять точек и точка *a* – вершины правильной пирамиды, а ее двугранные углы при вершине равны.

Додекаэдр из икосаэдра можно получить так же, как и октаэдр из куба. соединяя середины смежных граней икосаэдра, мы получаем правильный пятиугольник. Всего таких пятиугольников будет 12. Двугранные углы многоугольника будут равны, так как трехгранные углы при его вершинах имеют равные плоские углы.

Правильные и полуправильные многогранники

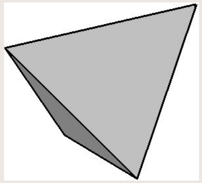
Правильные многогранники также называют платоновыми телами, хотя они были известны еще за несколько веков до Платона. В одном из своих диалогов Платон связал правильные многоугольники с четырьмя стихиями. Тетраэдру соответствовал огонь, кубу – земля, октаэдру – воздух, икосаэдру – вода. Додекаэдру соответствовала пятая стихия – эфир.

Так называемые полуправильные многогранники связывают с именем Архимеда. Это 13 тел, полученных при усечении правильных многогранников и два бесконечных ряда правильных призм и антипризм с равными ребрами.

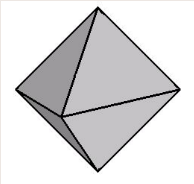
Правильные и полуправильные многогранники

В эпоху Возрождения ученый Иоганн Кеплер вслед за Платоном попытался связать правильные многогранники со строением Вселенной. С большей или меньшей точностью он разместил между сферами, содержащими орбиты шести известных планет, правильные многогранники таким образом, что каждый был описан около меньшей сферы и вписан в большую. Но имя Кеплера в геометрии прославило открытие двух из четырех правильных звездных тел. Два других в 1809 г. нашел француз Луи Пуансон.

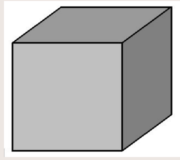
Правильные многогранники



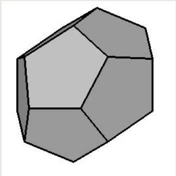
Тетраэдр



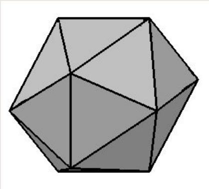
Октаэдр



Куб

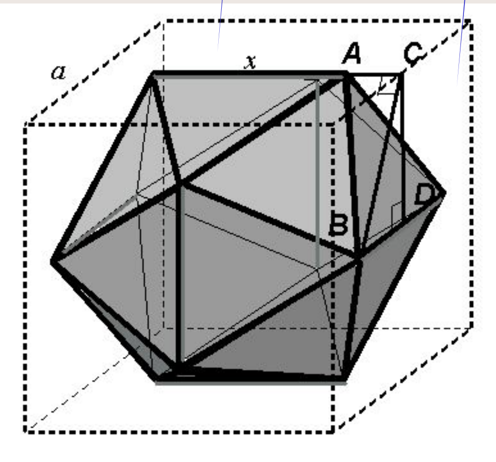


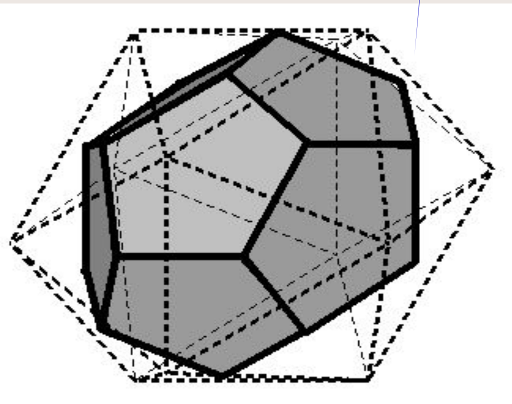
Додекаэдр

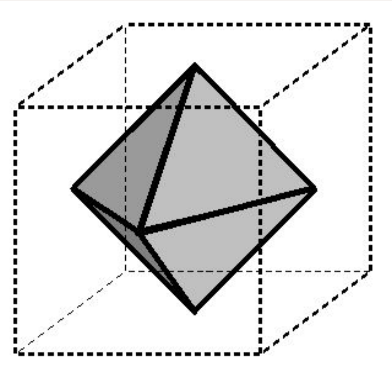


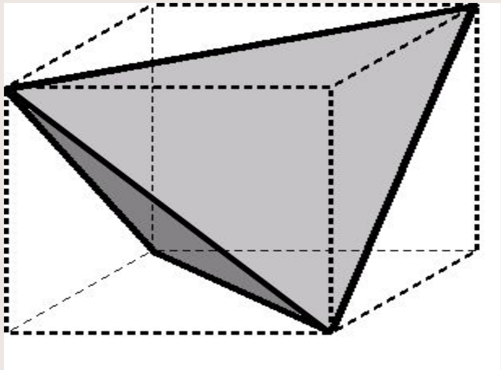
Икосаэдр

Получение правильных многогранников из куба

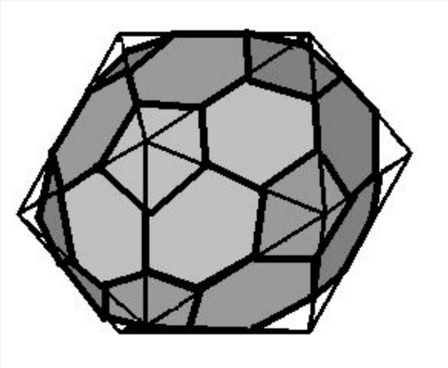




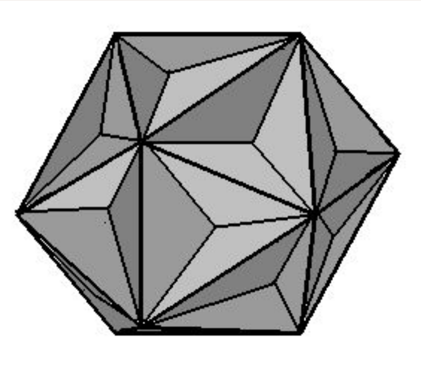




Архимедово тело, образованное из икосаэдра



Одно из звездных тел



СОДЕРЖАНИЕ

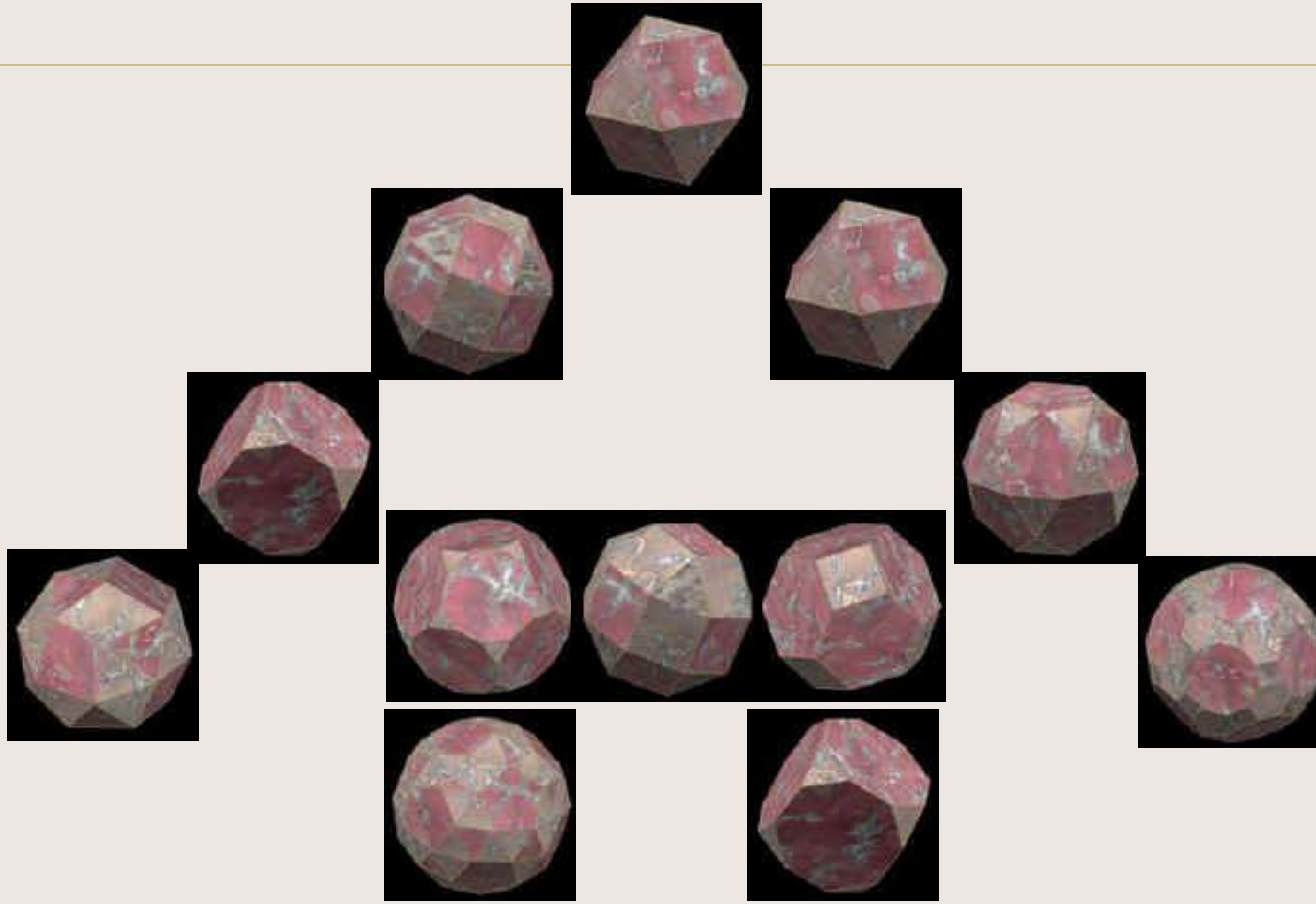
Тела Архимеда

Тела Архимеда

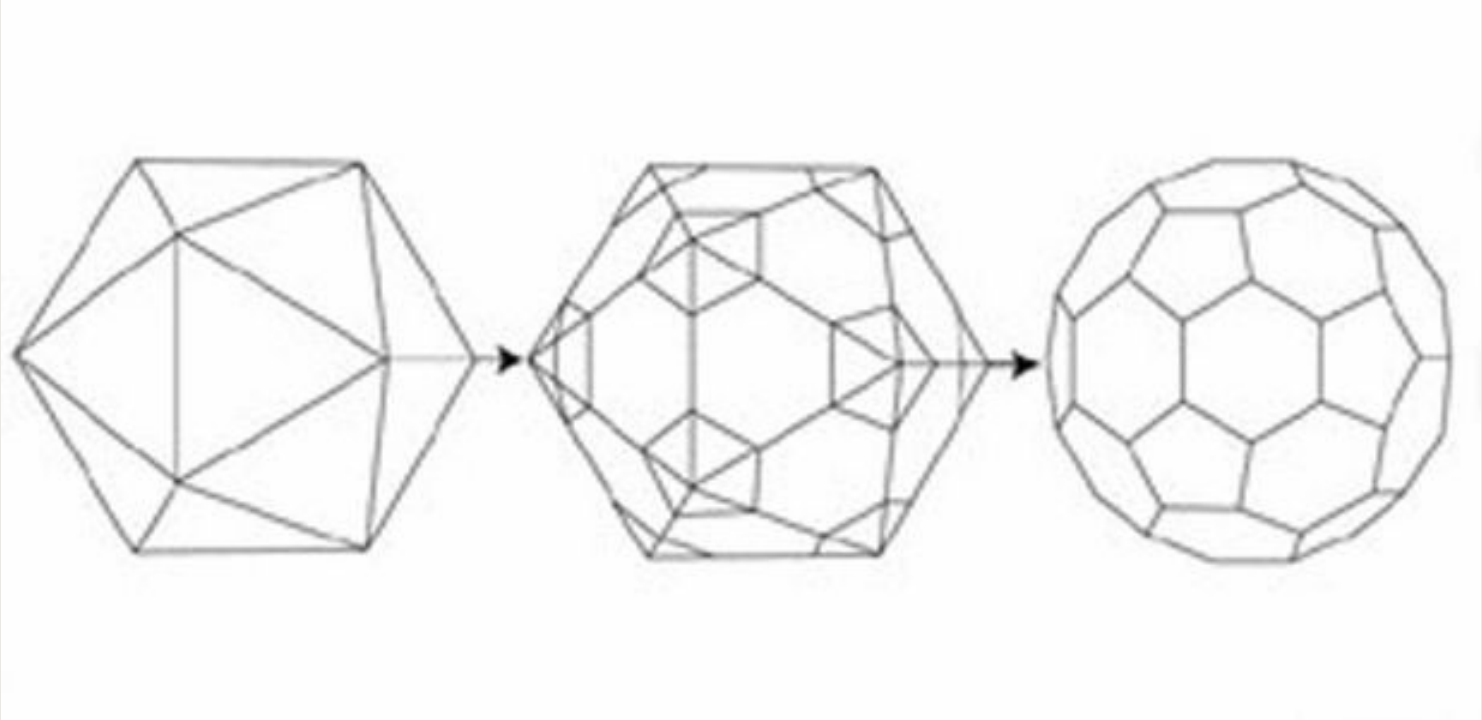
Архимедовыми телами называются полуправильные, однородные выпуклые многогранники, т.е. выпуклые многогранники, все многогранные углы которых равны, а грани -- правильные многоугольники нескольких типов (этим они отличаются от Платоновых тел, грани которых правильные многоугольники одного типа).

Открытие четырнадцати полуправильных многогранников приписывается Архимеду (287-212 г. до н.э.), который впервые перечислил их свойства в не дошедшей до нас работе. Ссылки на эту работу имеются в трудах математика Паппа. Теорией этих тел занимался также Кеплер.

Архимедовы тела



Из нижеприведенного рисунка видно получение усеченного икосаэдра из платонова икосаэдра отсечением у каждой вершины 12 частей плоскостью.



СОДЕРЖАНИЕ

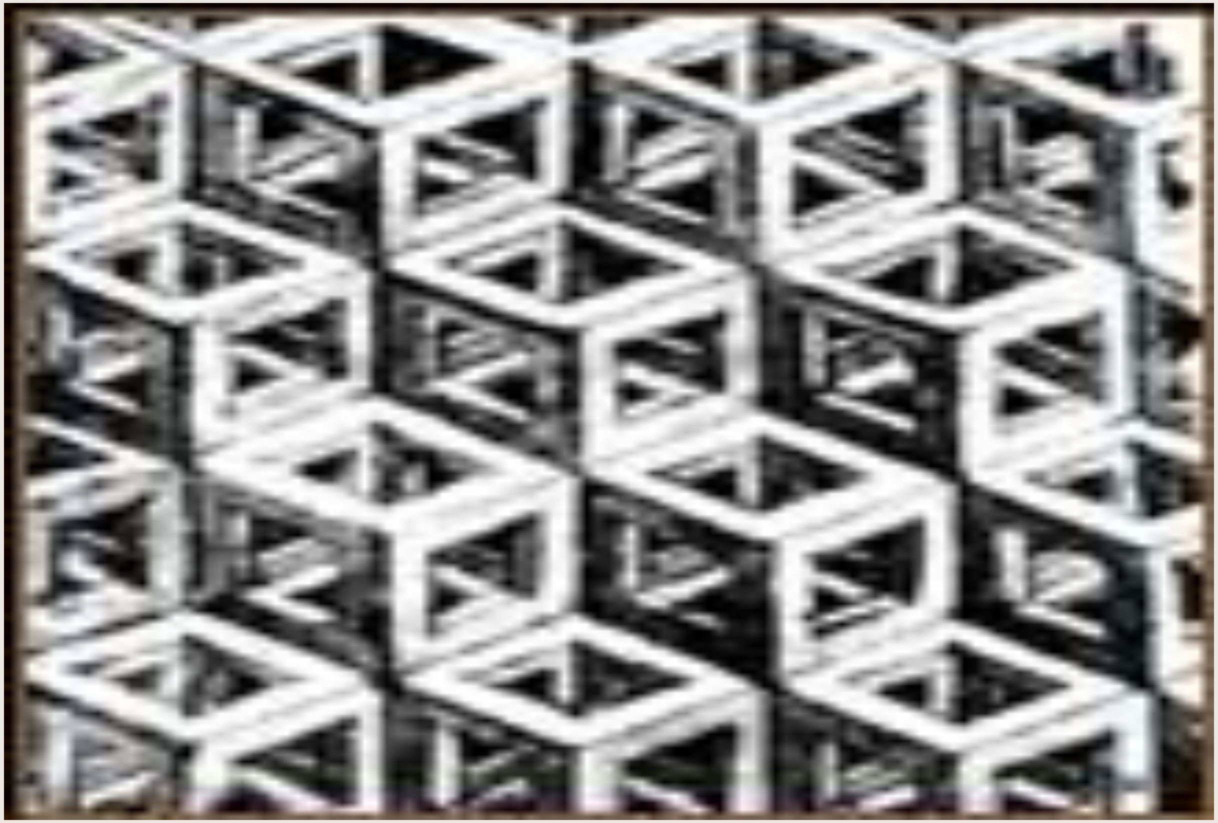
Леонардо да Винчи

Оригинальный способ пространственного изображения усечённого икосаэдра предложил Леонардо да Винчи.

Изображение усечённого икосаэдра мы можем встретить в иллюстрированной Леонардо книге его современника, францисканского монаха и математика Луки Пачоли (1445-1514) «Божественная пропорция» («De Devina Proportione»), изданной в 1509 г.

Титан Возрождения, живописец, скульптор, ученый и изобретатель Леонардо да Винчи (1452-1519) — символ неразрывности искусства и науки, а следовательно, закономерен его интерес к таким прекрасным, высокосимметричным объектам, как выпуклые многогранники вообще и усеченный икосаэдр в частности.

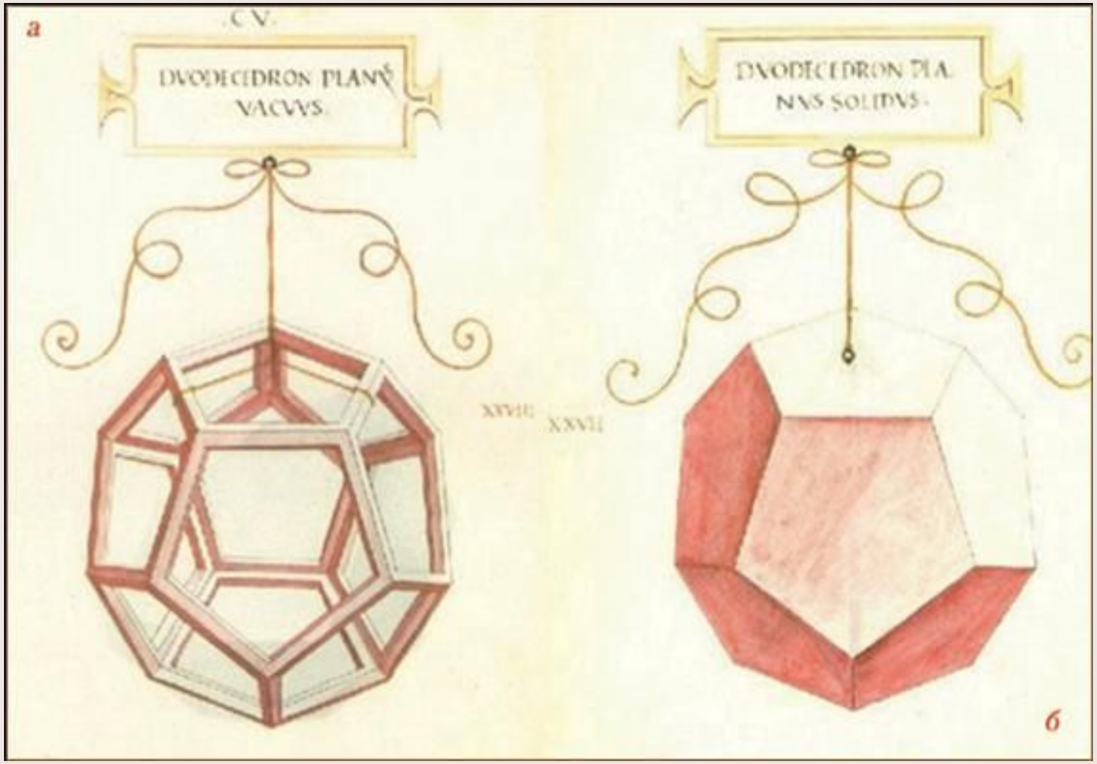
Геометрия кисти Леонардо. Поистине, живопись — наука и законная дочь природы, ибо она порождена природой.



Леонардо да Винчи

Гравюру с изображением усеченного икосаэдра Леонардо предваряет надписью по латыни Ycocedron Abscisus (усеченный икосаэдр) Vacuus. Термин Vacuus обозначает тот факт, что грани многогранника изображены «пустыми» — не сплошными. Строго говоря, грани не изображаются вовсе, они существуют только в нашем воображении. Зато ребра многогранника изображены не геометрическими линиями (которые, как известно, не имеют ни ширины, ни толщины), а жесткими трехмерными сегментами. Обе эти особенности данной гравюры и составляют основу способа пространственного изображения многогранников, изобретенного Леонардо для иллюстрации книги Луки Пачоли и называемого сегодня методом жестких (или сплошных) ребер. Такая техника позволяет зрителю, во-первых, безошибочно определить, какие из ребер принадлежат передним, а какие — задним граням многогранника (что практически невозможно при изображении ребер геометрическими линиями), и, во-вторых, взглянуть как бы сквозь геометрическое тело, ощутить его в перспективе, глубине, которые теряются при использовании техники сплошных граней.

Изображения Леонардо да Винчи додекаэдра методом жёстких рёбер (а) и методом сплошных граней (б) в книге Луки Пачоли «Божественные пропорции».



СОДЕРЖАНИЕ