Правильные многоугольники.

Определение правильного многоугольника.

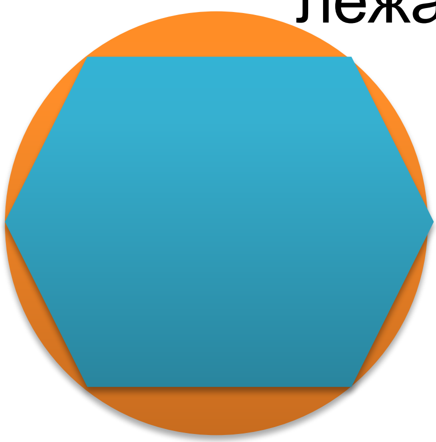
Правильный многоугольник – это выпуклый многоугольник, у которого равны все стороны и все (внутренние) углы.

Формула для вычисления угла правильного n-угольника.

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \times 180^\circ$$

Окружность, описанная около правильного многоугольника.

Окружность называется описанной около многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности.

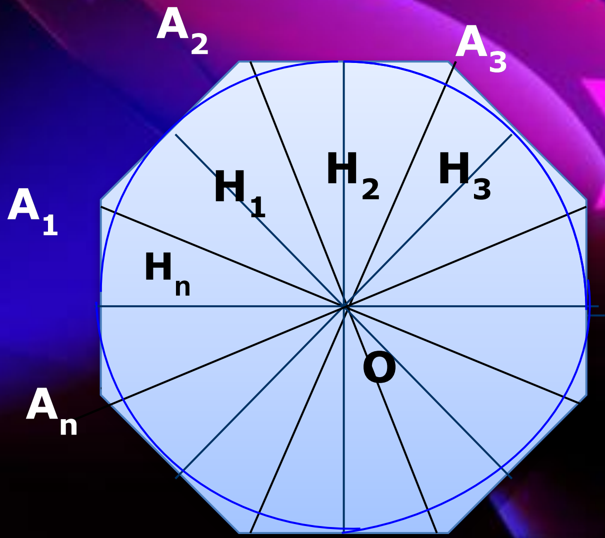


Теорема: около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Окружность, вписанная в правильный многоугольник.

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.

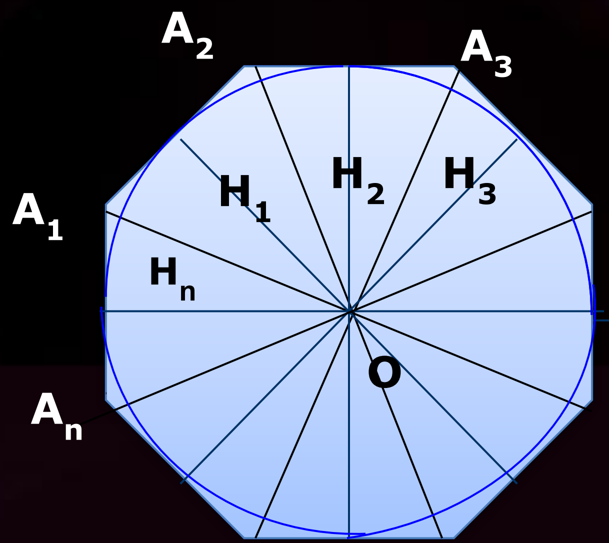
Теорема: В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.



Дано: ABCD…A_n - правильный многоугольник.
Доказать: в любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

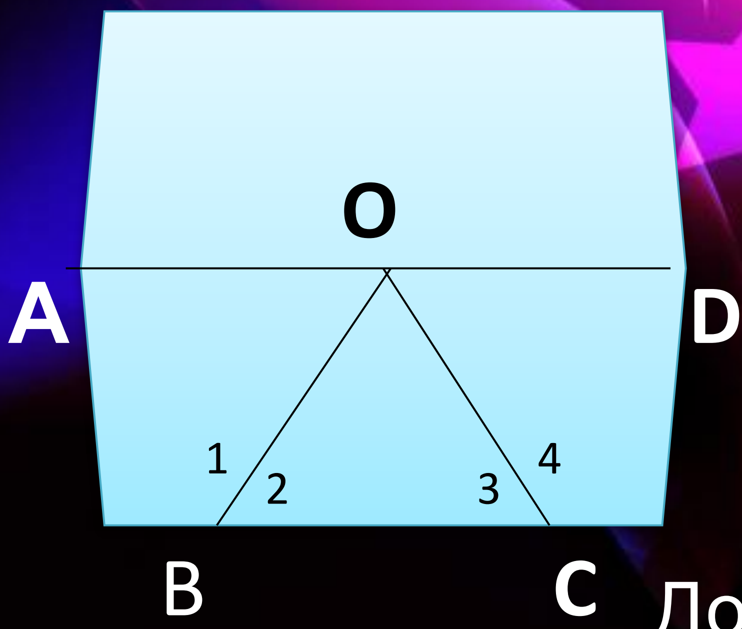
Пусть A_1 A_2 …A_n - правильный многоугольник, O – центр описанной окружности. При доказательстве теоремы 1 мы выяснили, что $\Delta OA_1A_2 = \Delta OA_2A_3 = \Delta OA_nA_1$, поэтому высоты этих треугольников, проведённые из вершины O, также равны. Поэтому окружность с центром O и радиусом OH проходит через точки H_1, H_2, H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т.е. окружность вписана в данный многоугольник.

Докажем, что вписанная окружность только одна. Предположим, что существует другая вписанная окружность с центром О и радиусом ОА. Тогда её центр равноудалён от сторон многоугольника, т.е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника, и поэтому совпадает с точкой О пересечения этих биссектрис.



Дано: ABCD…A_n - правильный многоугольник.

Доказать: около любого правильного многоугольника можно провести окружность, и притом только одну.

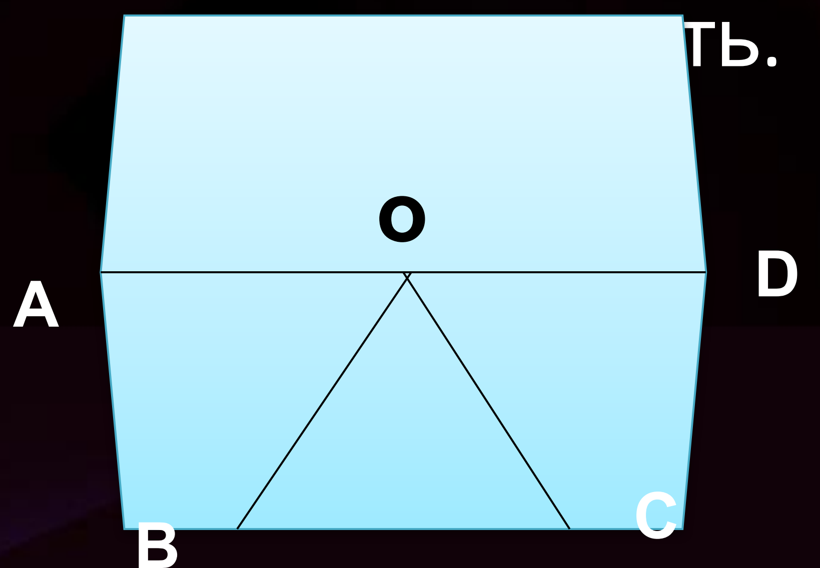


Доказательство:

Проведём биссектрисы BO и CO равных углов ABC и BCD. Они пересекутся, так как сумма углов выпуклого многоугольника меньше 180°. Пусть точка их пересечения – O. Тогда, проведя отрезки OA и OD, получим ΔBOA, ΔBOC и ΔCOD. ΔBOA = ΔBOC по первому признаку (BO – общая, AB=BC, угол 2 = углу 3). Аналогично ΔBOC=ΔCOD.

Т.к. угол 2 = углу 3 как половины равных углов, то ΔBOC – равнобедренный, так как этому треугольнику равны ΔBOA и ΔCOD, то они тоже равнобедренные, значит, OA=OB=OC=OD, т.е. точки A, B, C и D равноудалены от точки O и лежат на окружности (O, OB). Аналогично и другие вершины многоугольника лежат на этой же окружности.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например А, В, С. Т.к. через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника АВС...$А_n$ можно описать только одну

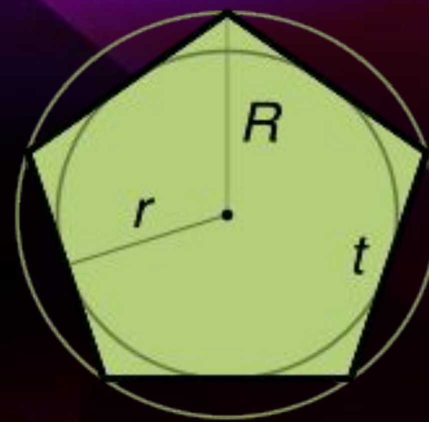


ть.

Следствия.

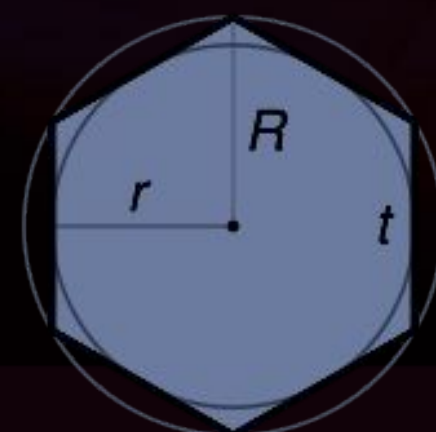
Следствие №1

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

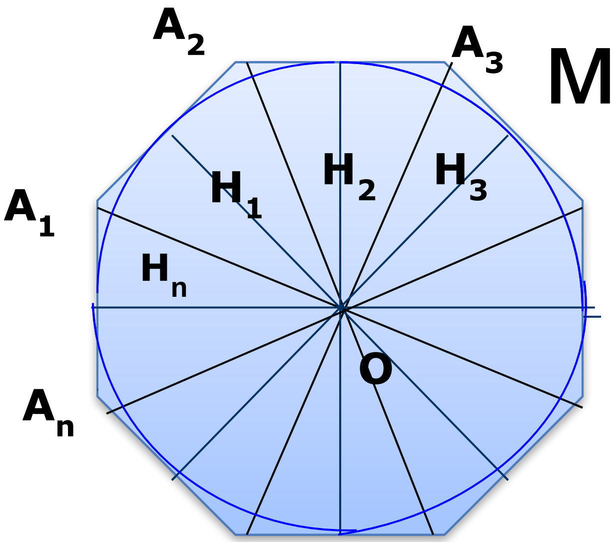


Следствие №2

Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

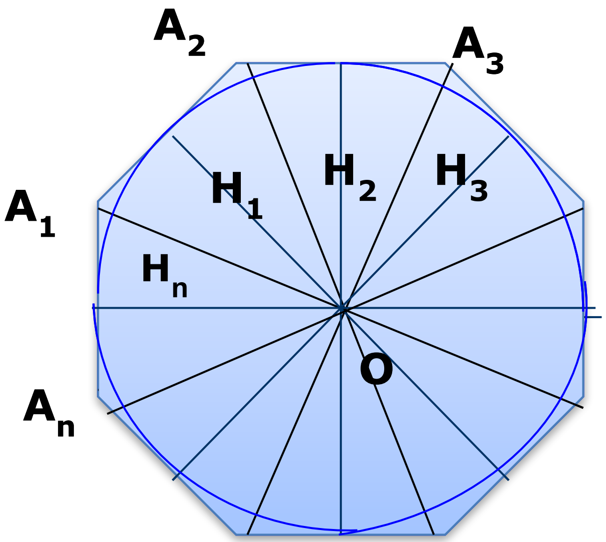


Формула для вычисления площади правильного многоугольника.



Пусть S – площадь правильного n-угольника, a_1 – его сторона, P – периметр, а r и R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}Pr$$



Для этого, соединим центр данного многоугольника с его вершинами. Тогда многоугольник разобьется на n равных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}a_n r$

Следовательно,

$$S = n \times \frac{1}{2}a_n r = \frac{1}{2}(na_n)r = \frac{1}{2}\mathrm{Pr}$$

Формула для вычисления стороны правильного многоугольника.

Выведем формулы:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \qquad r = R\cos\frac{180^\circ}{n}$$

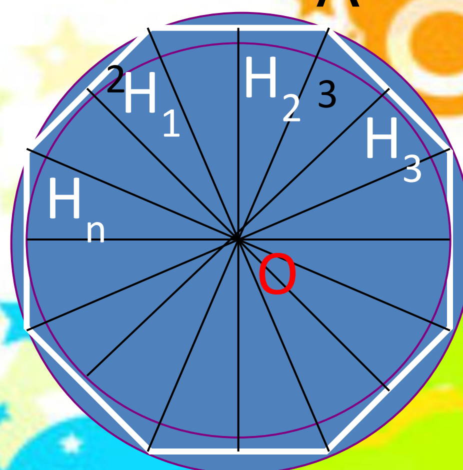
Для вывода этих формул воспользуемся рисунком. В прямоугольном треугольнике A_1H_1O

$$\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{n-2}{2n}\times 180^\circ = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$$

Следовательно,

$$a_n = 2A_1H_1 = 2R\cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

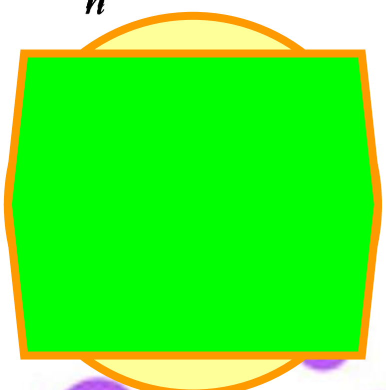
$$r = OH_1 = R\sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = R\cos\frac{180^\circ}{n}$$



$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

Полагая в формуле n = 3, 4 и 6, получим выражения для сторон правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{4} = 2R\sin 45^\circ = 2R\times\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$$



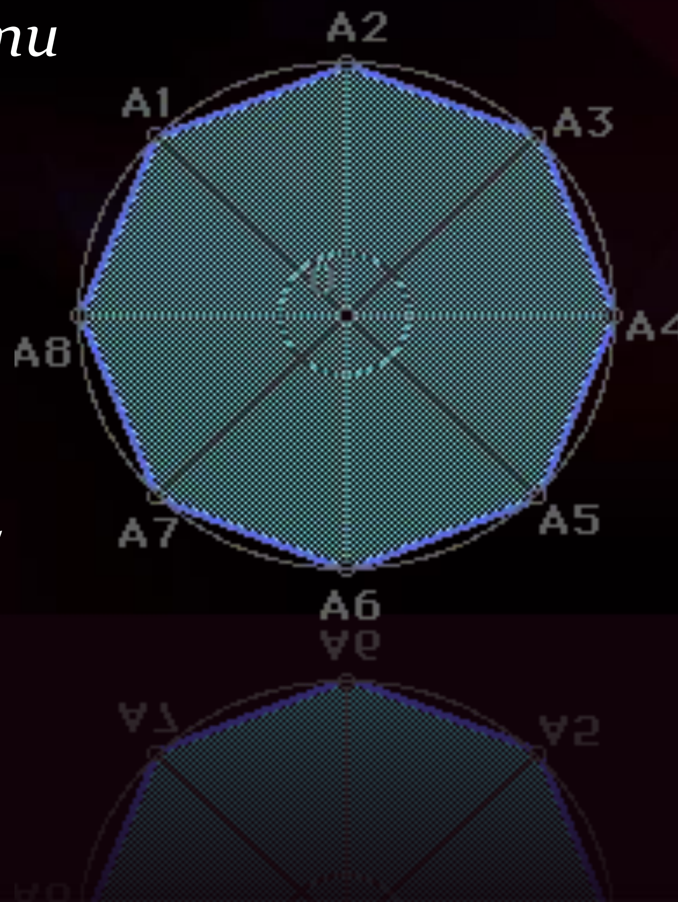
Построение правильных многоугольников.

Задача №1

Дано: окружность(О; R)

Построить правильный n- угольник.

1. *окружность разделим на n равных дуг. Для этого проведем радиусы ОA1, ОA2,…, ОAn этой окружности так, чтобы угол A1OA2= угол A2OA3 =…= угол An-1OAn= угол AnOA1= 360°/n (на рисунке n=8).*
2. *Если теперь провести отрезки A1A2, A2A3,…, An-1An, AnA1, то получим n- угольник A1A2…An. Треугольники A1OA2, A2OA3,…, AnOA1 равны друг другу, поэтому A1A2= A2A3=…= An-1An= AnA1. Отсюда следует, что A1A2…An- правильный n- угольник.*



Задача №2

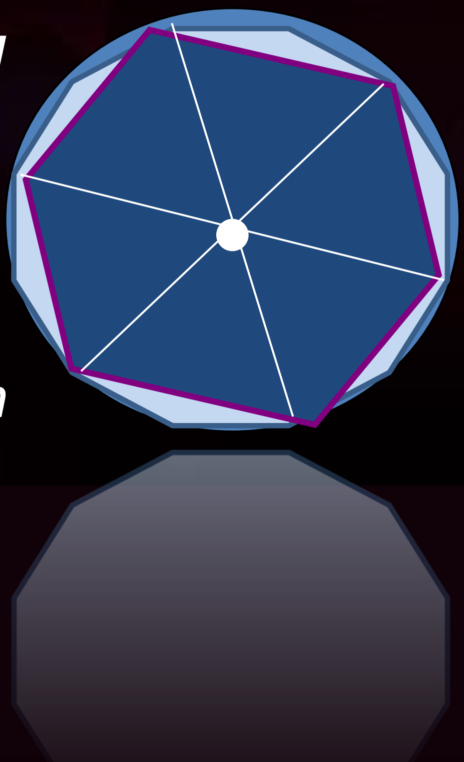
Дано: A1, A2…An - правильный n - угольник

Построить правильный 2n-угольник

Решение.

1. Опишем около него окружность. Для этого построим биссектрисы углов A_1 и A_2 и обозначим буквой O точку их пересечения.
2. Затем проведем окружность с центром O радиуса OA1.
3. Разделим дуги A_1A_2, A_2A_3…, A_n A_1 пополам
4. Каждую из точек деления B_1, B_2, …, B_n соединим отрезками с концами соответствующей дуги.
5. Для построения точек B_1, B_2, …, B_n можно воспользоваться серединным перпендикулярами к сторонам данного n - угольника.

   На рисунке таким способом построен правильный двенадцатиугольник A_1 B_1 A_2 B_2 … A_6 B_6.



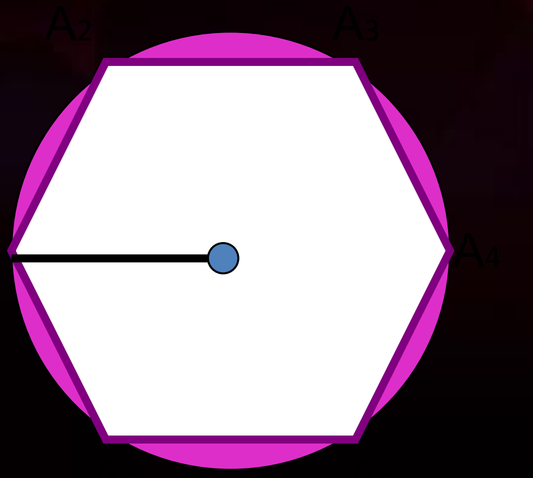
Задача №3

Дано: отрезок PQ.

Построить правильный шестиугольник , сторона которого равна данному отрезку.

Решение:

1. Построим окружность (O;PQ) и отметим на ней произвольную точку A_1
2. Не меняя раствора циркуля, построим на этой окружности точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, чтобы выполнялись равенства $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$.
3. Соединяя последовательно построенные точки отрезками, получим искомый правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



1.Любой правильный многоугольник является выпуклым

2.Любой выпуклый многоугольник является правильным

3.Многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны

4.Треугольник является правильным, если все его углы равны

5.Любой равносторонний треугольник является правильным

6.Любой четырехугольник с равными сторонами является правильным

7.Любой правильный четырехугольник является квадратом

1	ДА	НЕТ
2	ДА	НЕТ
3	ДА	НЕТ
4	ДА	НЕТ
5	ДА	НЕТ
6	ДА	НЕТ
7	ДА	НЕТ

ПРАВИЛЬНО

НЕПРАВИЛЬНО

ПРЕЗЕНТАЦИЮ ВЫПОЛНИЛИ

УЧЕНИЦЫ 9А КЛАССА:

АЛЕКСАНДРА

АНАСТАСИЯ