Правильные многоугольники.

Определение правильного многоугольника.

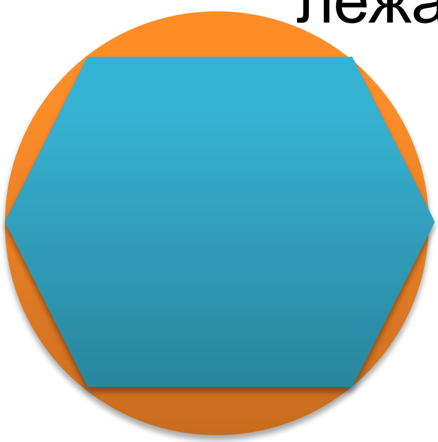
Правильный многоугольник – это выпуклый многоугольник, у которого равны все стороны и все (внутренние) углы.

Формула для вычисления угла правильного n-угольника.

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \times 180^\circ$$

Окружность, описанная около правильного многоугольника.

Окружность называется описанной около многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности.

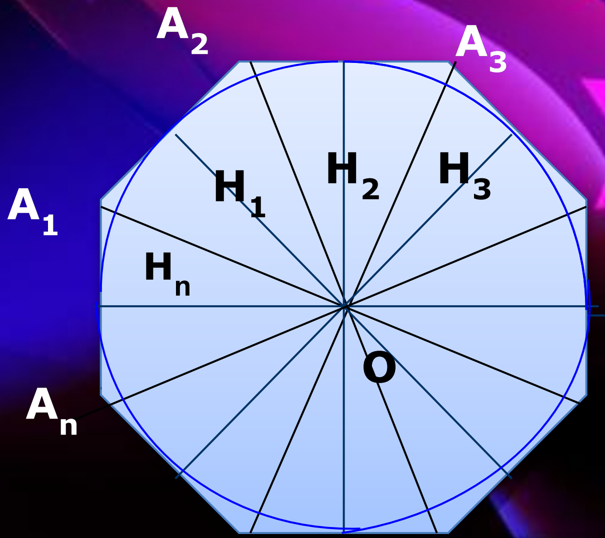


Теорема: около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Окружность, вписанная в правильный многоугольник.

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.

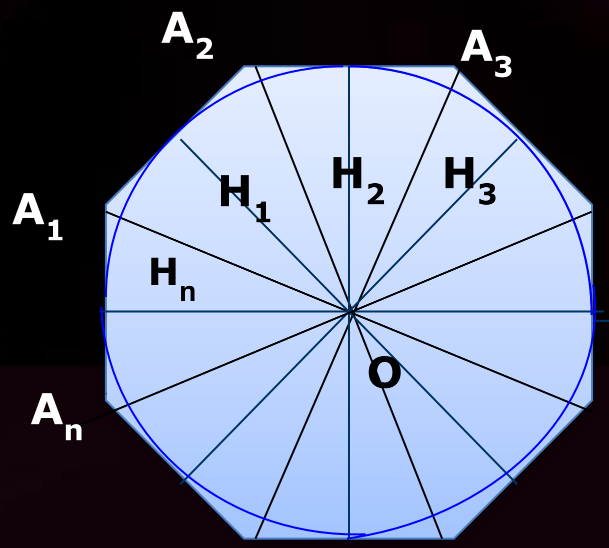
Теорема: В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

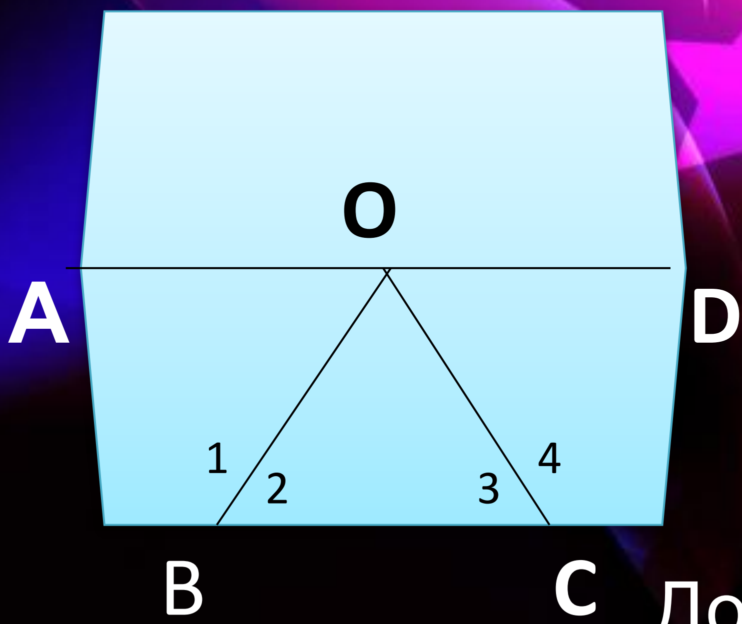


Дано: ABCD…A_n - правильный многоугольник.
Доказать: в любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Пусть A_1 A_2 …A_n - правильный многоугольник, О – центр описанной окружности. При доказательстве теоремы 1 мы выяснили, что $\Delta OA_1A_2 = \Delta OA_2A_3 = \Delta OA_nA_1$, поэтому высоты этих треугольников, проведённые из вершины О, также равны. Поэтому окружность с центром О и радиусом ОН проходит через точки H_1 , H_2, H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т.е. окружность вписана в данный многоугольник.

Докажем, что вписанная окружность только одна. Предположим, что существует другая вписанная окружность с центром О и радиусом ОА. Тогда её центр равноудалён от сторон многоугольника, т.е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника, и поэтому совпадает с точкой О пересечения этих биссектрис.





Дано: ABCD…A_n - правильный многоугольник.

Доказать: около любого правильного многоугольника можно провести окружность, и притом только одну.

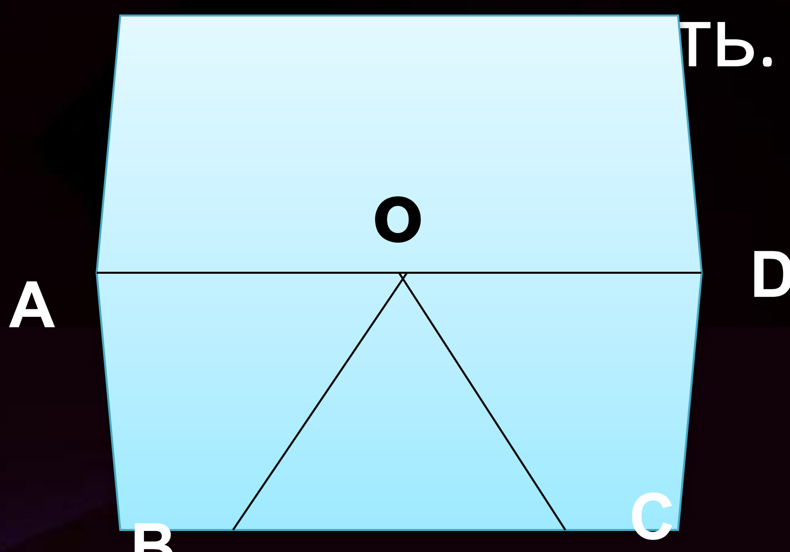
Доказательство:

Проведём биссектрисы BO и CO равных углов ABC и BCD. Они пересекутся, так как углы выпуклого многоугольника меньше 180°. Пусть точка их пересечения O. Тогда, проведя отрезки OA и OD, получим ΔBOA, ΔBOC и ΔCOD. ΔBOA = ΔBOC по первому признаку (BO – общая, AB=BC, угол 2 = углу 3). Аналогично ΔBOC=ΔCOD.

Т.к. угол 2 = углу 3 как половины равных углов, то ΔBOC – равнобедренный. Этому треугольнику равны ΔBOA и ΔCOD => они тоже равнобедренные, значит, OA=OB=OC=OD, т.е. точки A, B, C и D равноудалены от точки O и лежат на окружности (O, OB). Аналогично и другие вершины многоугольника лежат на этой же окружности.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A, B, C. Т.к. через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $ABC...A_n$ можно описать только одну

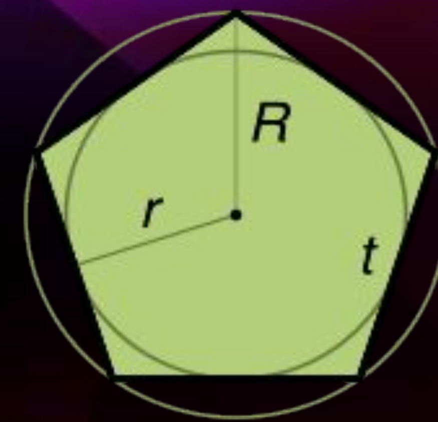
ть.



Следствия.

Следствие №1

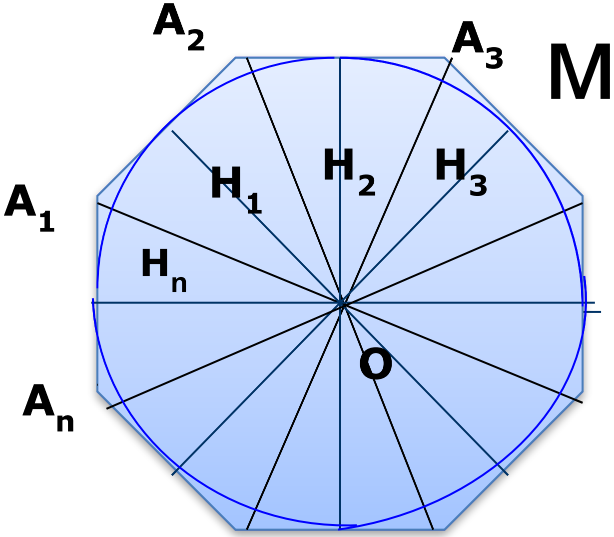
Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.



Следствие №2

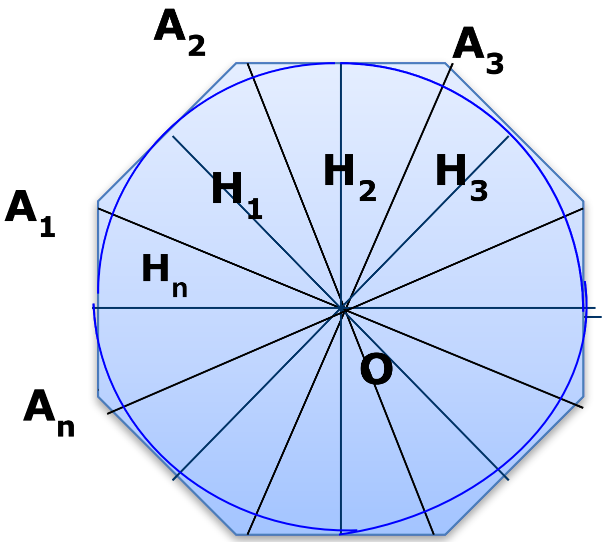
Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Формула для вычисления площади правильного многоугольника.



Пусть S – площадь правильного n-угольника, a_1 – его сторона, P – периметр, а r и R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}Pr$$



Для этого, соединим центр данного многоугольника с его вершинами. Тогда многоугольник разобьется на n равных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}a_n r$

Следовательно,

$$S = n \times \frac{1}{2}a_n r = \frac{1}{2}(na_n)r = \frac{1}{2}\mathrm{Pr}$$

Формула для вычисления стороны правильного многоугольника.

Выведем формулы:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \qquad r = R\cos\frac{180^\circ}{n}$$

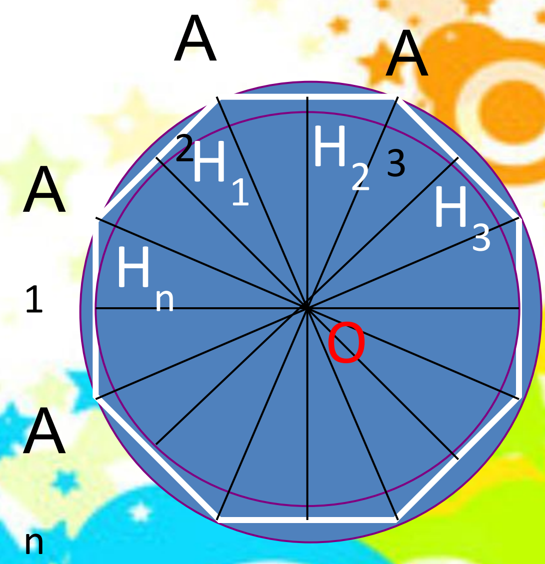
Для вывода этих формул воспользуемся рисунком. В прямоугольном треугольнике A_1H_1O

$$\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{n-2}{2n}\times 180^\circ = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$$

Следовательно:

$$a_n = 2A_1H_1 = 2R\cos(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}) = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

$$r = OH_1 = R\sin(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}) = R\cos\frac{180^\circ}{n}$$



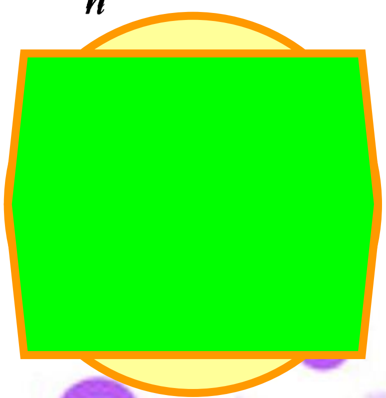
$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

Полагая в формуле n = 3, 4 и 6, получим выражения для сторон правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника:

$$a_3 = 2R\sin\frac{180^\circ}{3} = 2R\sin 60^\circ = 2R\times\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

$$a_4 = 2R\sin\frac{180^\circ}{4} = 2R\sin 45^\circ = 2R\times\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$$

$$a_6 = 2R\sin\frac{180^\circ}{6} = 2R\sin 30^\circ = 2R\times\frac{1}{2} = R$$



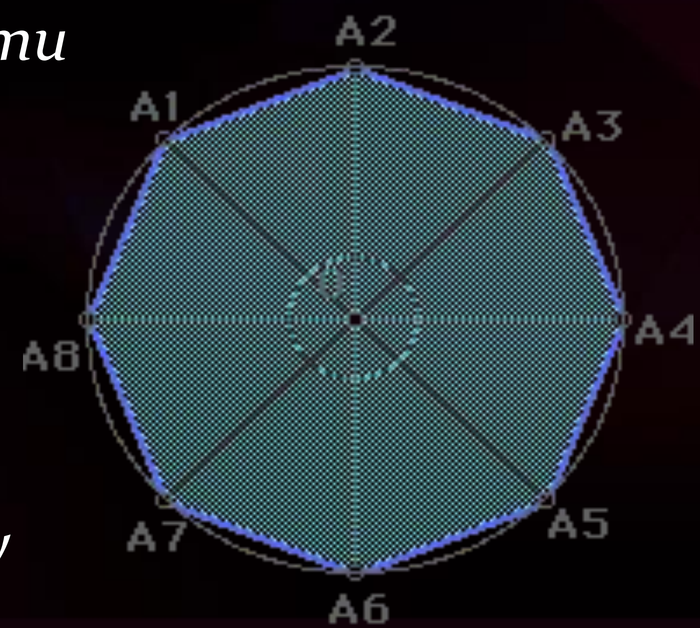
Построение правильных многоугольников.

Задача №1

Дано: окружность(O; R)

Построить правильный n- угольник.

1. *окружность разделим на n равных дуг. Для этого проведем радиусы OA_1, OA_2,…, OA_n этой окружности так, чтобы угол A_1OA_2= угол A_2OA_3 =…= угол $A_{n-1}OA_n$= угол A_nOA_1= 360°/n (на рисунке n=8).*
2. *Если теперь провести отрезки A_1A_2, A_2A_3,…, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, то получим n- угольник $A_1A_2…A_n$. Треугольники A_1OA_2, A_2OA_3,…, A_nOA_1 равны друг другу, поэтому A_1A_2= A_2A_3=…= $A_{n-1}A_n$= A_nA_1. Отсюда следует, что $A_1A_2…A_n$- правильный n- угольник.*



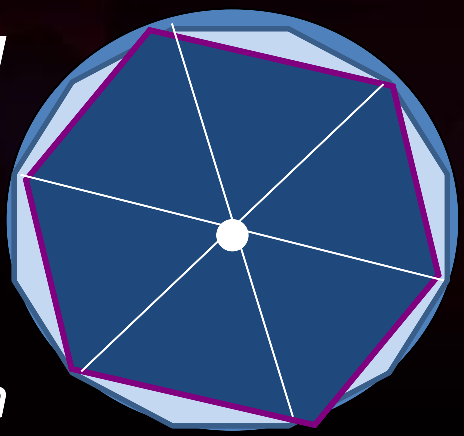
Задача №2

Дано: $A1, A2...An$ - правильный n - угольник

Построить правильный $2n$-угольник

Решение.

1. Опишем около него окружность. Для этого построим биссектрисы углов A_1 и A_2 и обозначим буквой О точку их пересечения.
2. Затем проведем окружность с центром О радиуса $OA1$.
3. Разделим дуги A_1A_2, A_2A_3..., $A_n A_1$ пополам
4. Каждую из точек деления B_1, B_2, ..., B_n соединим отрезками с концами соответствующей дуги.
5. Для построения точек B_1, B_2, ..., B_n можно воспользоваться серединным перпендикулярами к сторонам данного n - угольника.
   На рисунке таким способом построен правильный двенадцатиугольник $A_1 B_1 A_2 B_2 ... A_6 B_6$.



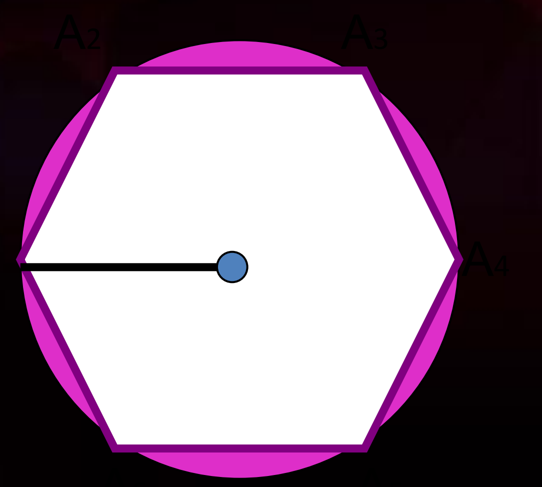
Задача №3

Дано: отрезок PQ.

Построить правильный шестиугольник , сторона которого равна данному отрезку.

Решение:

1. Построим окружность (O;PQ) и отметим на ней произвольную точку A_1
2. Не меняя раствора циркуля, построим на этой окружности точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, чтобы выполнялись равенства $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$.
3. Соединяя последовательно построенные точки отрезками, получим искомый правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



1.Любой правильный многоугольник является выпуклым

2.Любой выпуклый многоугольник является правильным

3.Многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны

4.Треугольник является правильным, если все его углы равны

5.Любой равносторонний треугольник является правильным

6.Любой четырехугольник с равными сторонами является правильным

7.Любой правильный четырехугольник является квадратом

1	ДА	НЕТ
2	ДА	НЕТ
3	ДА	НЕТ
4	ДА	НЕТ
5	ДА	НЕТ
6	ДА	НЕТ
7	ДА	НЕТ

ПРАВИЛЬНО

НЕПРАВИЛЬНО

ПРЕЗЕНТАЦИЮ ВЫПОЛНИЛИ

УЧЕНИЦЫ 9А КЛАССА: