

Правильные выпуклые многогранники

**«Правильных многогранников
вызывающе мало, но этот
весьма скромный по
численности отряд сумел
пробраться в самые глубины
различных наук»**

Л. Кэрролл

Цели урока

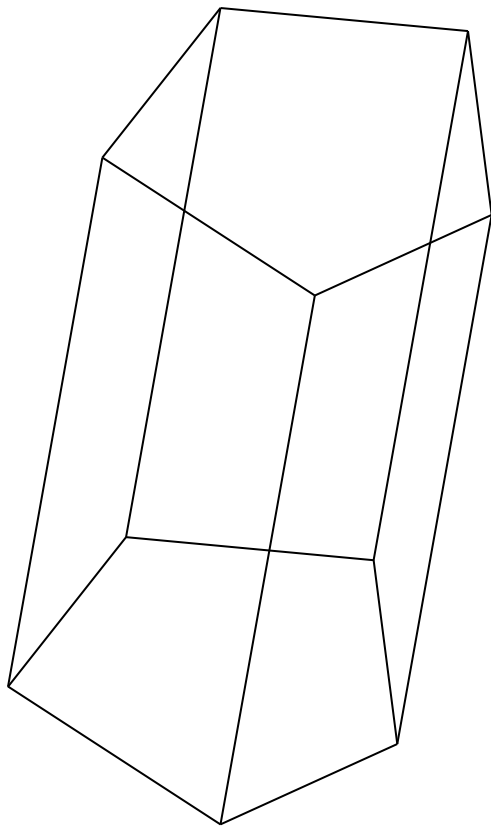
- Познакомиться с новым типом выпуклых многогранников – правильными многогранниками.
- Рассмотреть влияние правильных многогранников на возникновение философских теорий и фантастических гипотез.
- Рассмотреть связь геометрии и природы.

Повторение

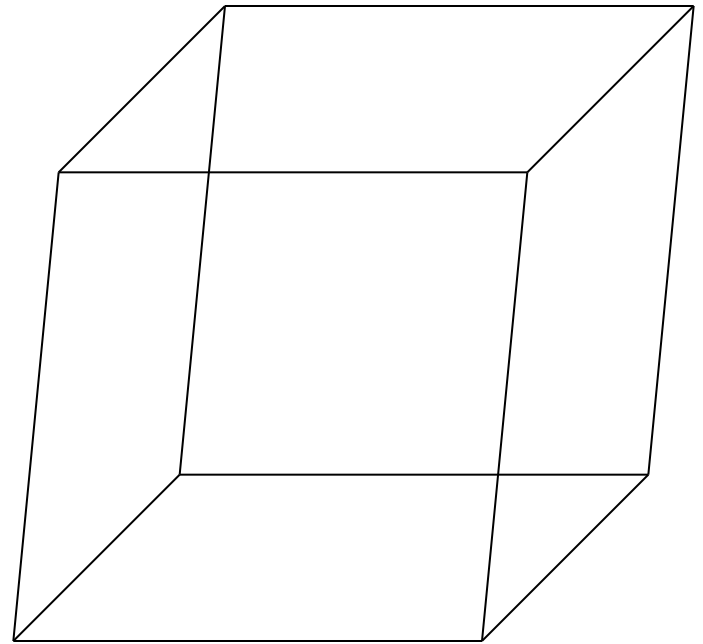
1. Что же называется многогранником? Его вершиной, гранью, ребром?
2. Какой многогранник называется выпуклым?
3. Задача: Определите, какие из многогранников, изображенных на рисунке, являются выпуклыми и какие невыпуклыми?
4. Какие виды многогранников вы знаете?
5. Что называется призмой, параллелепипедом, пирамидой?

Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, называют многогранной поверхностью или многогранником.

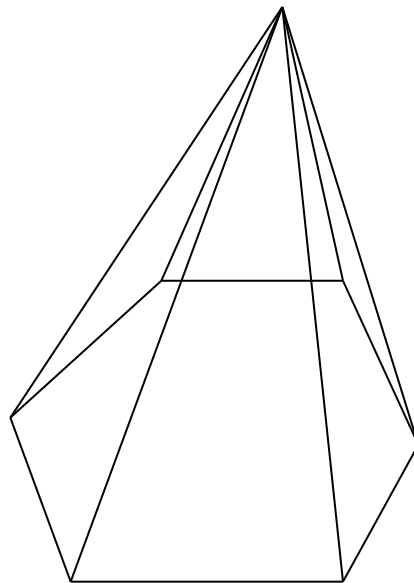
Многогранник называется
выпуклым, если он
расположен по одну
сторону от плоскости
каждой его грани.



призма



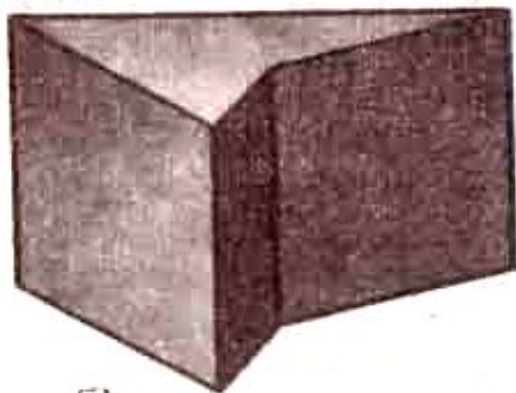
параллелепипед



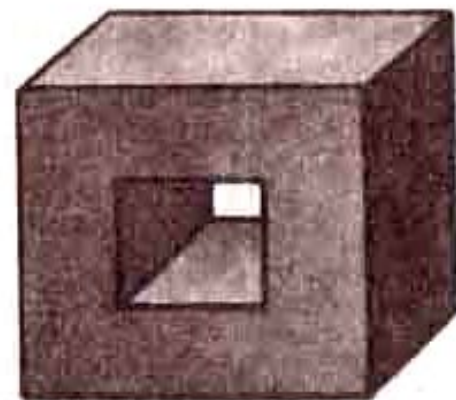
пирамида



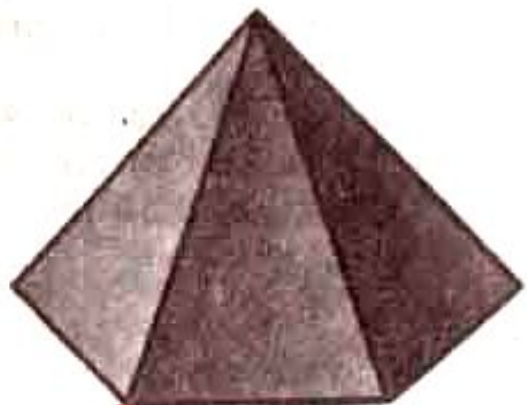
a) +



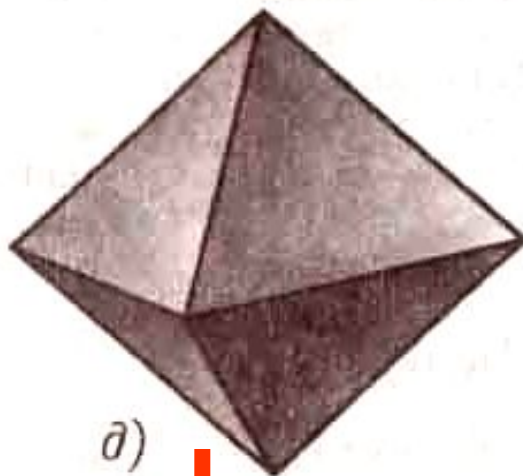
б)



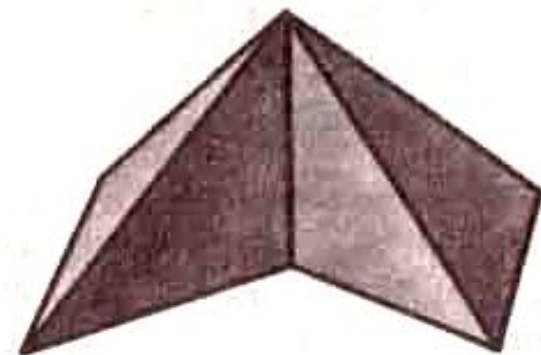
в)



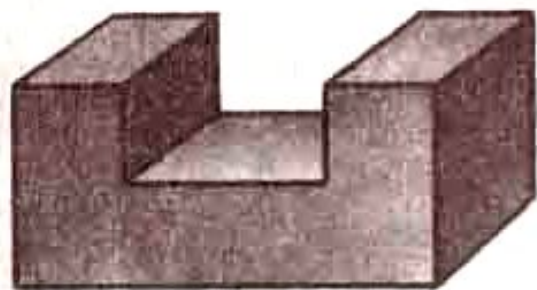
г) +



д) +



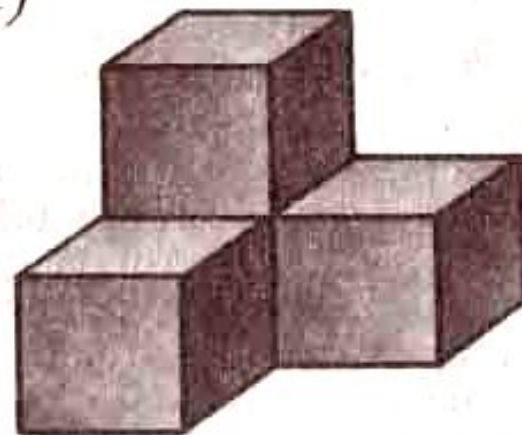
е)



ж)



з) +



и)

Работа с учебником

Что называется правильным многогранником?

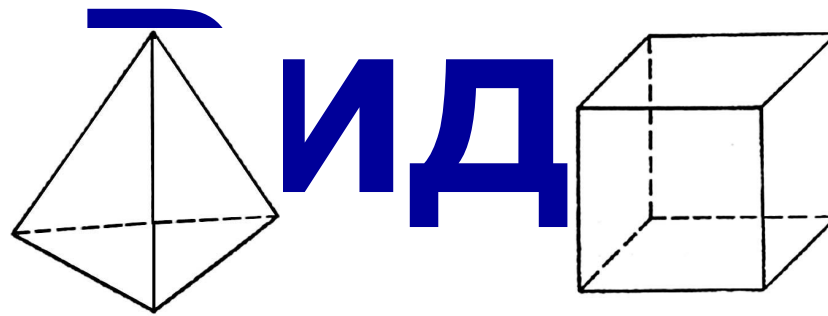
Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон, в каждой вершине многогранника сходится одно и тоже число ребер.

Все ребра правильного многогранника равны друг другу.

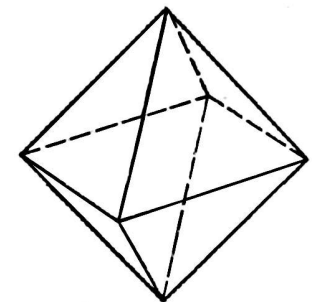
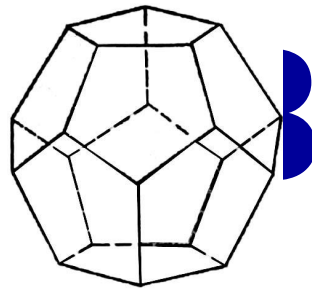
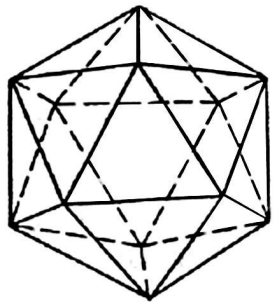
Все двугранные углы правильного многогранника, содержащие две грани с общим ребром равны.

Не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще n -угольники при $n \geq 6$.

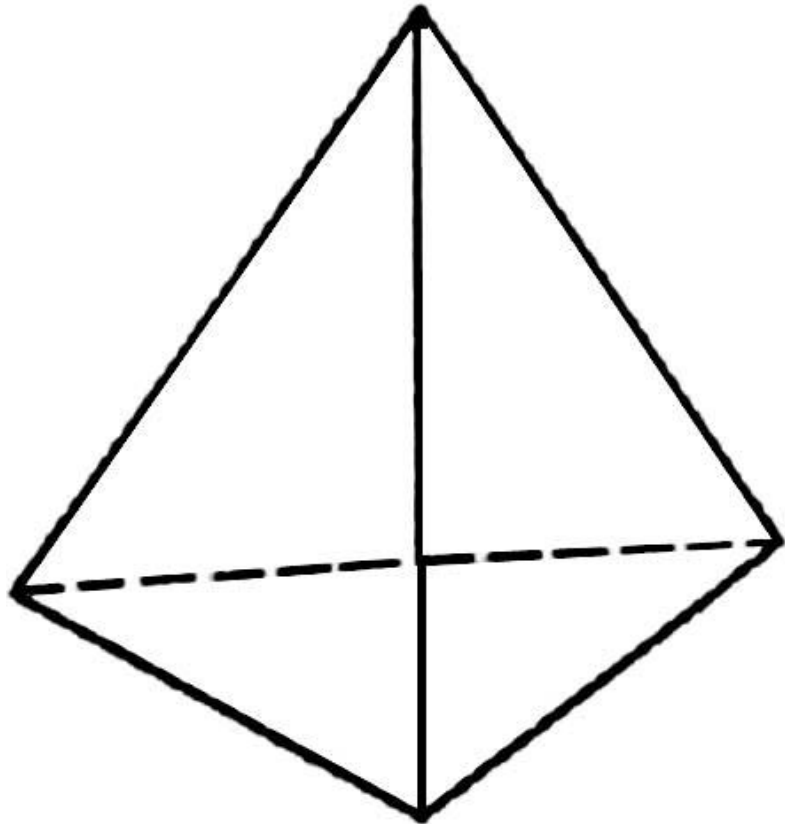
Каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной либо трех, четырех или пяти равносторонних треугольников, либо трех квадратов, либо трех правильных пятиугольников.



правильных многогранник

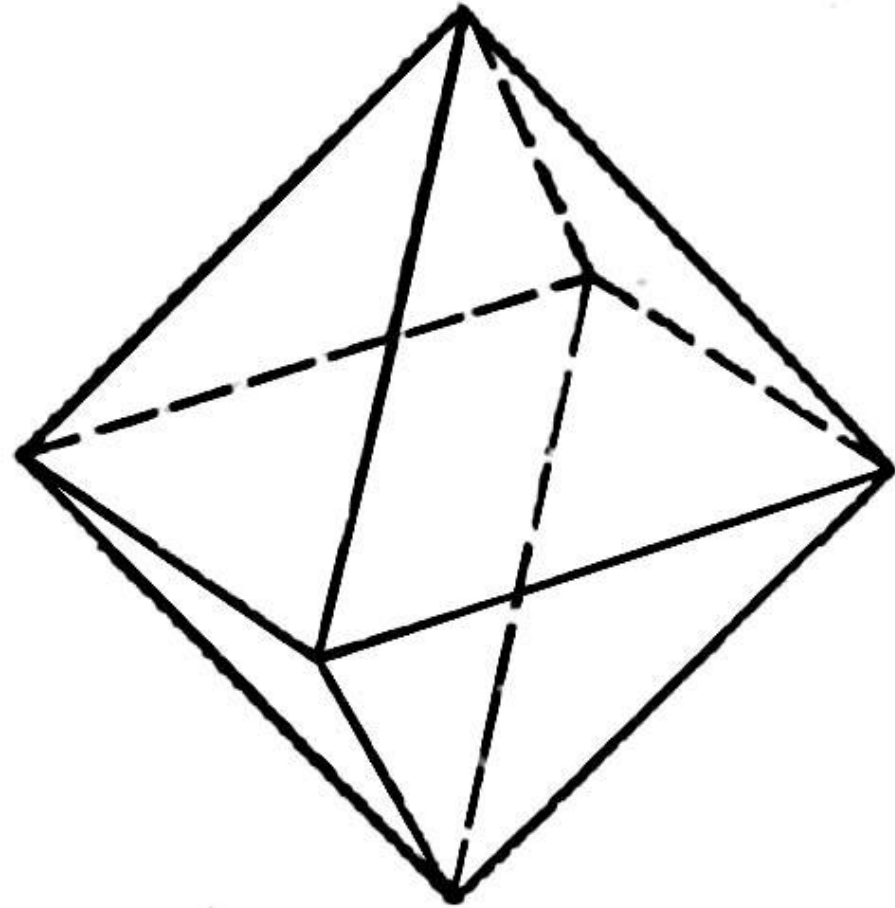


Правильный тетраэдр



Составлен из
четырёх
равносторонних
треугольников.
Каждая его вершина
является вершиной
трех треугольников.
Следовательно,
сумма плоских углов
при каждой вершине
равна 180° .

Правильный октаэдр

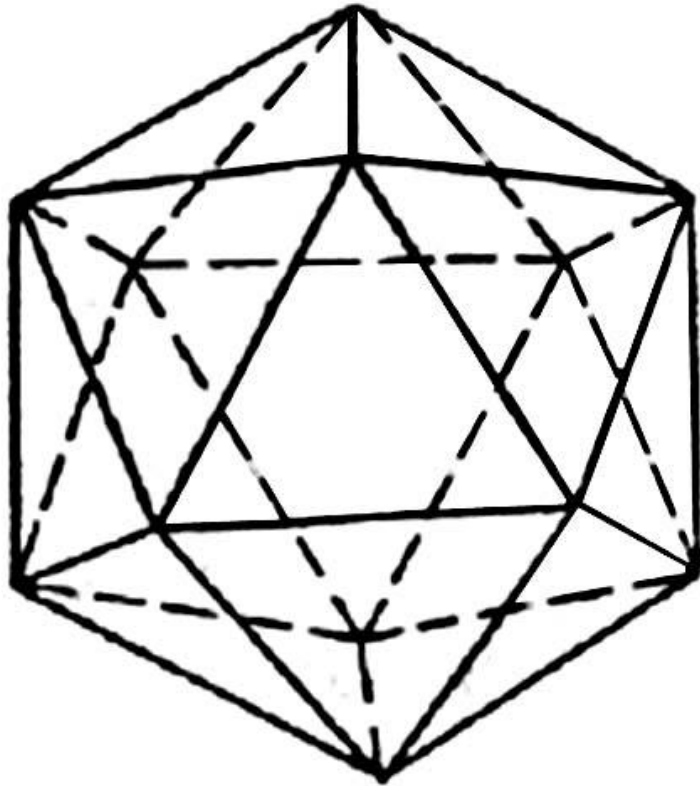


Составлен из восьми
равносторонних
треугольников.

Каждая вершина
октаэдра является
вершиной четырех
треугольников.

Следовательно, сумма
плоских углов при
каждой вершине 240° .

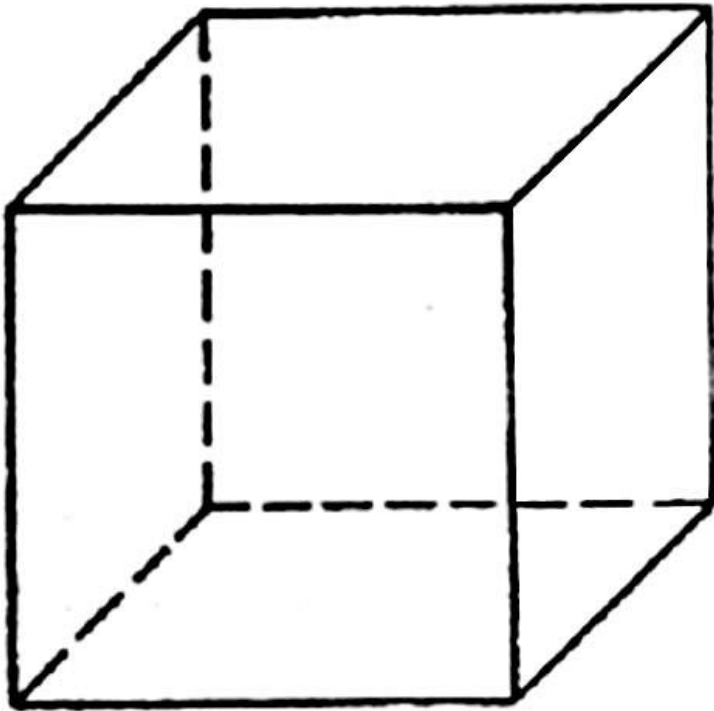
Правильный икосаэдр



Составлен из двадцати
равносторонних
треугольников. Каждая
вершина икосаэдра
является вершиной пяти
треугольников.

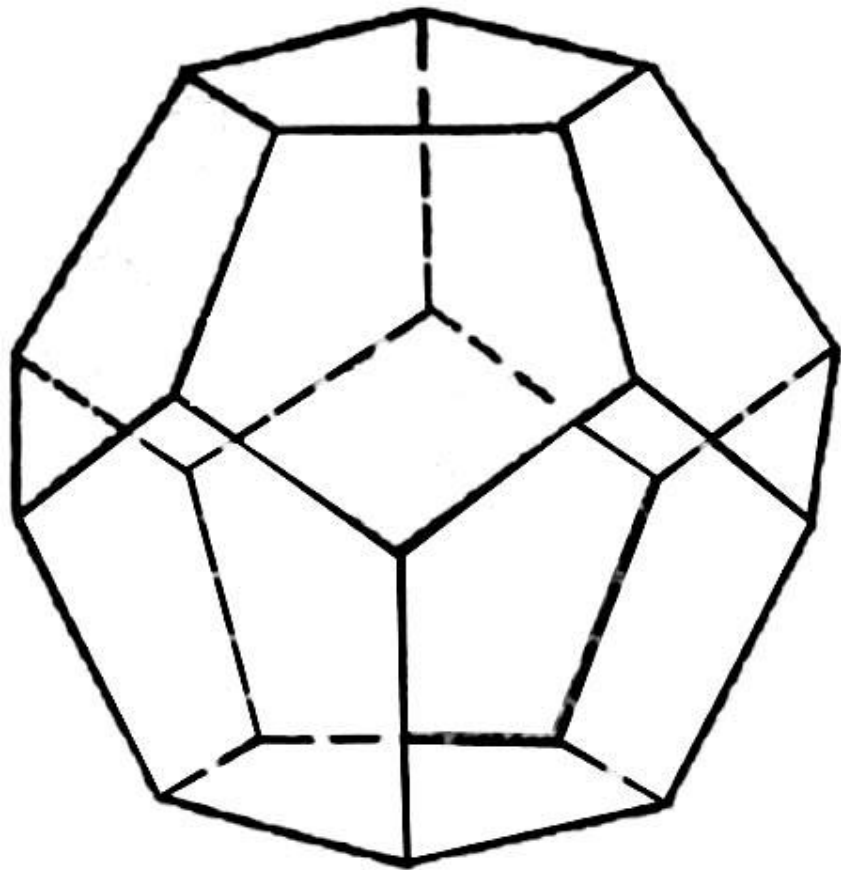
Следовательно, сумма
плоских углов при
каждой вершине равна
 300° .

Куб (гексаэдр)



Составлен из
шести квадратов.
Каждая вершина куба
является вершиной
трех квадратов.
Следовательно, сумма
плоских углов при
каждой вершине равна
 270° .

Правильный додекаэдр



Составлен из
двенадцати правильных
пятиугольников.

Каждая вершина
додекаэдра является
вершиной трёх
правильных
пятиугольников.

Следовательно, сумма
плоских углов при
каждой вершине равна
 324° .

Названия

МНОГОГРАННИКОВ

пришли из древней Греции,
в них указывается число граней:

«эдра» – грань;

«тетра» – 4;

«гекса» – 6;

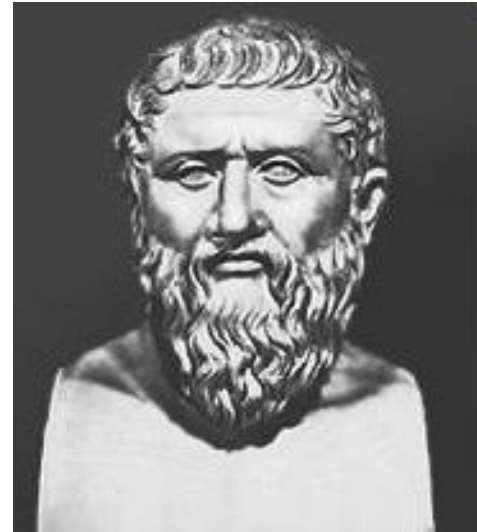
«окта» – 8;

«икоса» – 20;

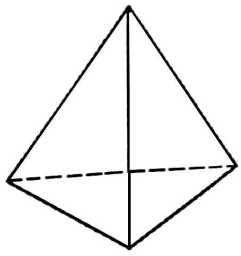
«додека» – 12.

**Правильные
многогранники
в философской
картине мира
Платона**

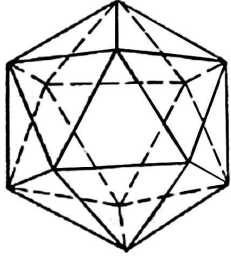
Правильные многогранники иногда называют Платоновыми телами, поскольку они занимают видное место в философской картине мира, разработанной великим мыслителем Древней Греции Платоном (ок. 428 – ок. 348 до н.э.).



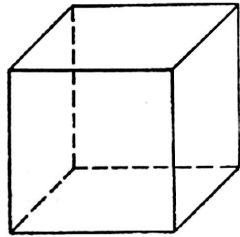
Платон считал, что мир строится из четырёх «стихий» – огня, земли, воздуха и воды, а атомы этих «стихий» имеют форму четырёх правильных многогранников.



Тетраэдр олицетворял огонь, поскольку его вершина устремлена вверх, как у разгоревшегося пламени.

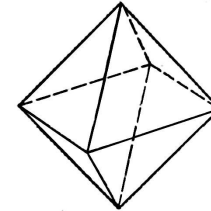


Икосаэдр – как самый обтекаемый – воду.



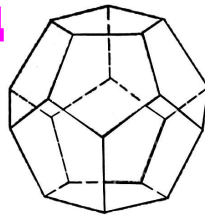
Куб – самая устойчивая из фигур –

землю.



Октаэдр – воздух.

Пятый многогранник – **дод** почитался главнейшим.

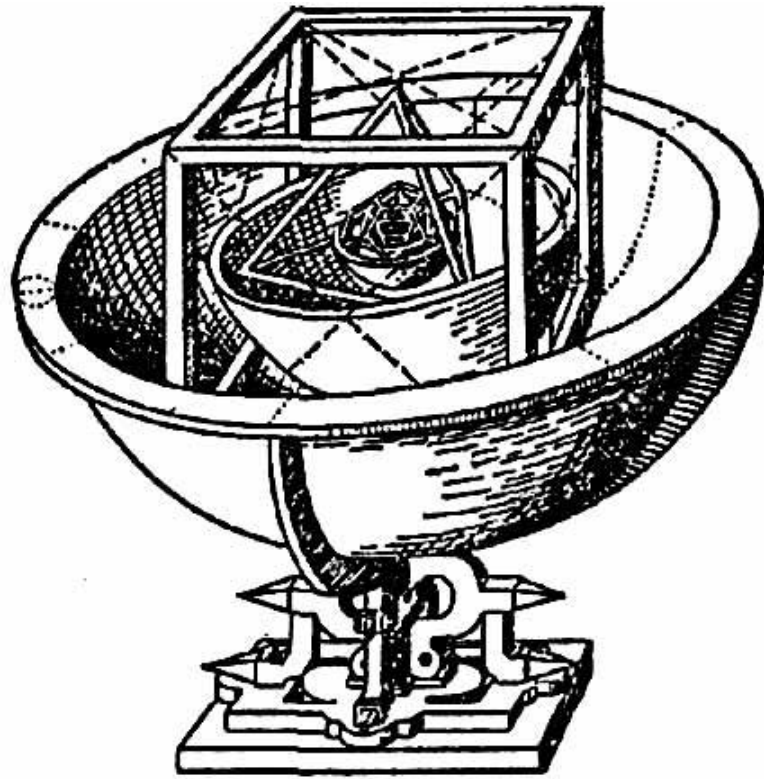


символизировал **весь мир** и

Это была одна из первых попыток ввести в науку идею

Сообщение
«Космический
кубок»
Кеплера

«Космический кубок» Кеплера



**Модель
Солнечной
системы И.
Кеплера**

Кеплер предположил, что существует связь между пятью правильными многогранниками и шестью открытыми к тому времени планетами Солнечной системы.

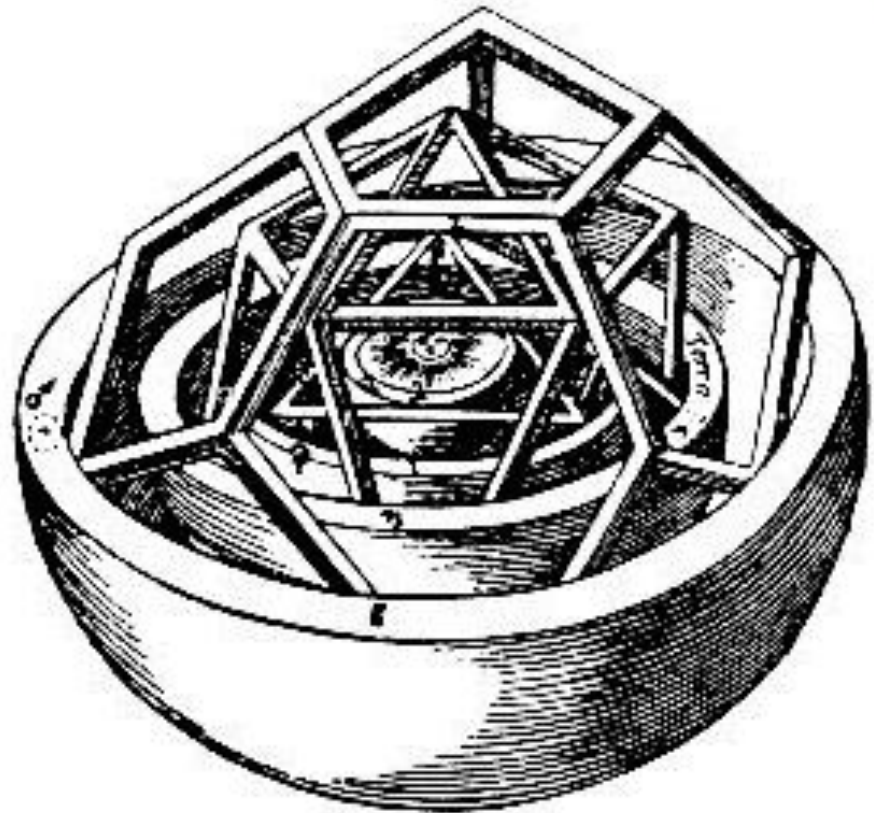
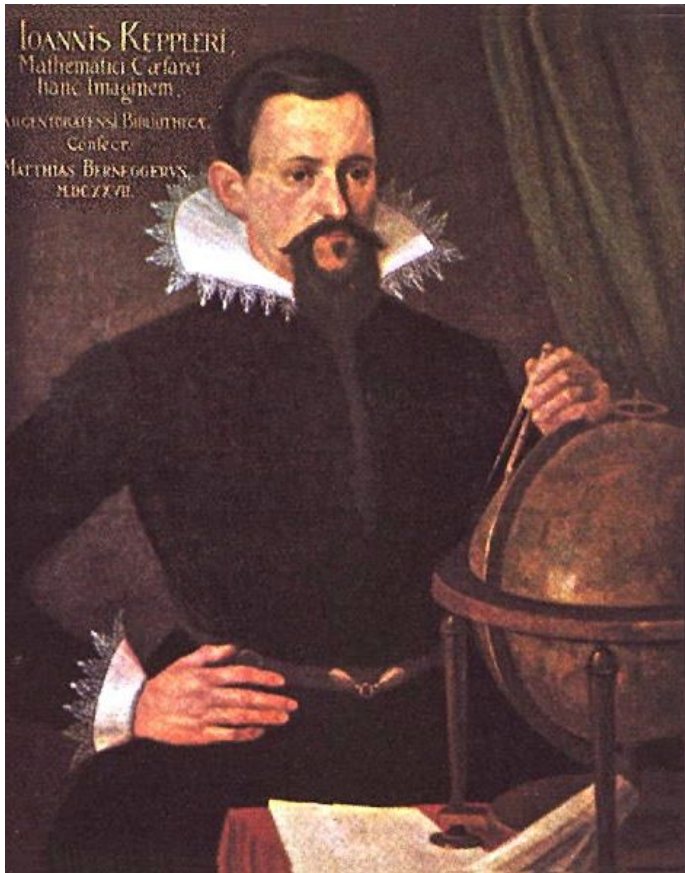
Согласно этому предположению, в сферу орбиты Сатурна можно вписать куб, в который вписывается сфера орбиты Юпитера. В неё, в свою очередь, вписывается тетраэдр, описанный около сферы орбиты Марса. В сферу орбиты Марса вписывается додекаэдр, к который вписывается сфера орбиты Земли. А она описана около икосаэдра, в который вписана сфера орбиты Венеры. Сфера этой планеты описана около октаэдра, в который вписывается сфера Меркурия.

Такая модель Солнечной системы получила название «Космического кубка» Кеплера. Результаты своих вычислений учёный опубликовал в книге «Тайна мироздания». Он считал, что тайна Вселенной раскрыта.

Год за годом учёный уточнял свои наблюдения, перепроверял данные коллег, но, наконец, нашёл в себе силы отказаться от заманчивой гипотезы. Однако её следы просматриваются в третьем законе Кеплера, где говорится о кубах средних расстояний от Солнца.

Сегодня можно с уверенностью утверждать, что расстояния между планетами и их число никак не связаны с многогранниками.

Конечно, структура Солнечной системы не является случайной, но истинные причины, по которым она устроена так, а не иначе, до сих пор не известны. Идеи Кеплера оказались ошибочными, но без гипотез, иногда самых неожиданных, казалось бы, бредовых, не может существовать наука.



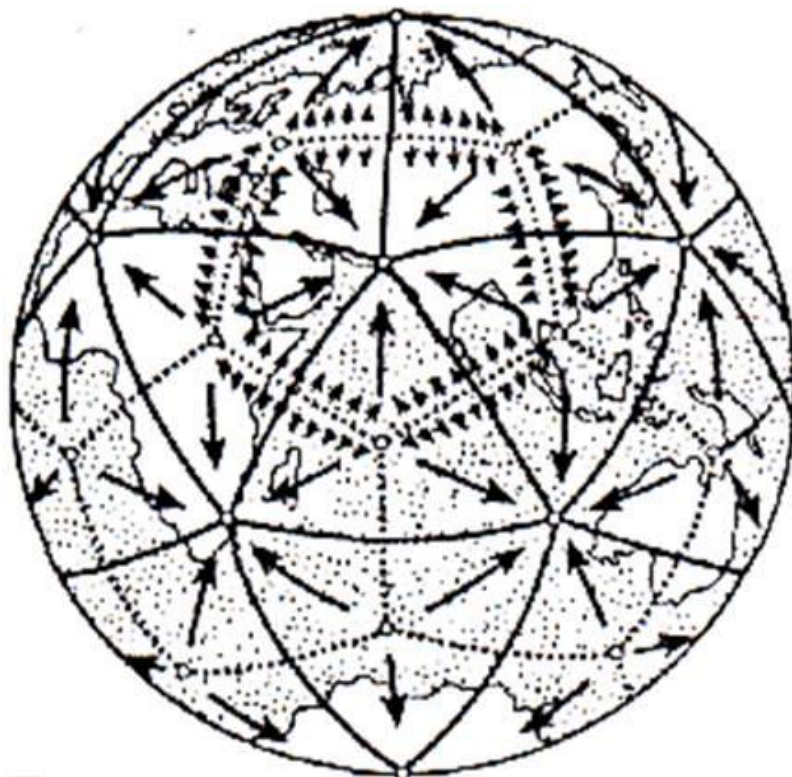
Иоганн Кеплер

Икосаэдро-додекаэдровая структура Земли

Идеи Платона и Кеплера о связи правильных многогранников с гармоничным устройством мира и в наше время нашли своё продолжение в интересной научной гипотезе, которую в начале 80-х гг. высказали московские инженеры В. Макаров и В. Морозов.

Они считают, что ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обуславливают икосаэдро-додекаэдровую структуру Земли. Она проявляется в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра.

Икосаэдро-
додекаэдровая
структура Земли





Многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль икосаэдро-додокаэдровой сетки; 62 вершины и середины рёбер многогранников, называемых авторами узлами, обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления.

Здесь располагаются очаги древнейших культур и цивилизаций: Перу, Северная Монголия, Гаити, Обская культура и другие. В этих точках наблюдаются максимумы и минимумы атмосферного давления, гигантские завихрения Мирового океана. В этих узлах находятся озеро Лох-Несс, Бермудский треугольник.

Дальнейшие исследования Земли, возможно, определят отношение к этой научной гипотезе, в которой, как видно, правильные многогранники занимают важное место.

Исследовательская работа «Формула Эйлера»

Изучая любые многогранники, естественнее всего подсчитать, сколько у них граней, сколько рёбер и вершин.

Подсчитаем и мы число указанных элементов Платоновых тел и занесём результаты в таблицу № 1.

| Правильный многогранник | Число | | |
|-------------------------|--------|--------|-------|
| | граней | вершин | рёбер |
| Тетраэдр | | | |
| Куб | | | |
| Октаэдр | | | |
| Додекаэдр | | | |
| Икосаэдр | | | |

| Правильный многогранник | Число | | |
|------------------------------------|---------------|---------------|--------------|
| | граней | вершин | рёбер |
| Тетраэдр | 4 | 4 | 6 |
| Куб | 6 | 8 | 12 |
| Октаэдр | 8 | 6 | 12 |
| Додекаэдр | 12 | 20 | 30 |
| Икосаэдр | 20 | 12 | 30 |

Нет ли закономерности в
возрастании чисел в каждом
столбце?

| Правильный многогранник | Число | |
|------------------------------------|------------------------------------|----------------------|
| | граней и вершин (Г + В) | рёбер (Р) |
| Тетраэдр | $4 + 4 = 8$ | 6 |
| Куб | $6 + 8 = 14$ | 12 |
| Октаэдр | $8 + 6 = 14$ | 12 |
| Додекаэдр | $12 + 20 = 32$ | 30 |
| Икосаэдр | $20 + 12 = 32$ | 30 |

**«Сумма числа граней и
вершин равна числу рёбер,
увеличенному на 2 », т.е.**

$$\underline{Г}_{\text{рани}} + \underline{В}_{\text{ершины}} = \underline{Р}_{\text{ебра}} + \underline{2}$$

Итак, мы вместе «открыли» формулу, которая была подмечена уже Декартом в 1640 г., а позднее вновь открыта Эйлером (1752), имя которого с тех пор она носит.

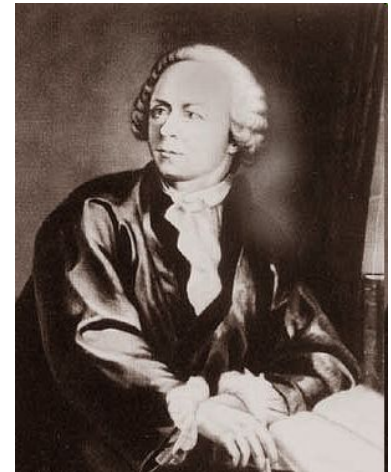
Формула Эйлера верна для

любых выпуклых

многогранников



Рене Декарт



Леонард Эйлер

Большой интерес к формам правильных многогранников проявляли также скульпторы, архитекторы, художники. Их всех поражало совершенство, гармония многогранников.

Леонардо да Винчи (1452 – 1519) увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах.

Сальвадор Дали на картине «Тайная вечеря» изобразил И. Христа со своими учениками на фоне огромного прозрачного додекаэдра.



«Тайная вечеря» Леонардо Да Винчи



«Тайная вечеря» Сальвадор Дали

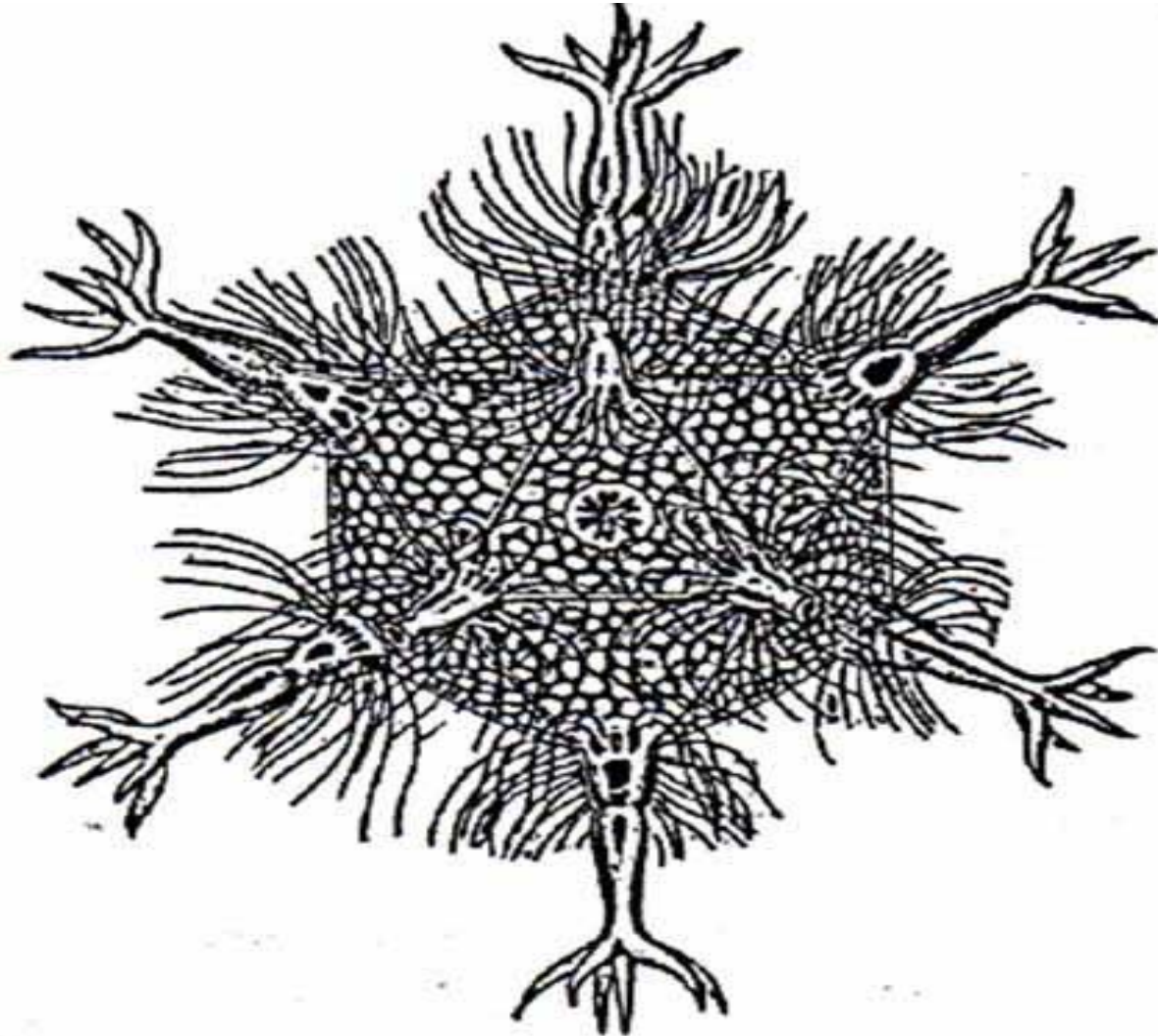
Учёным достаточно хорошо изучены правильные выпуклые многогранники, доказано, что существует всего пять видов таких многогранников, но сам ли человек их придумал. Скорее всего – нет, он «подсмотрел» их у природы.

Сообщение «Правильные многогранники и природа»

Правильные многогранники и природа

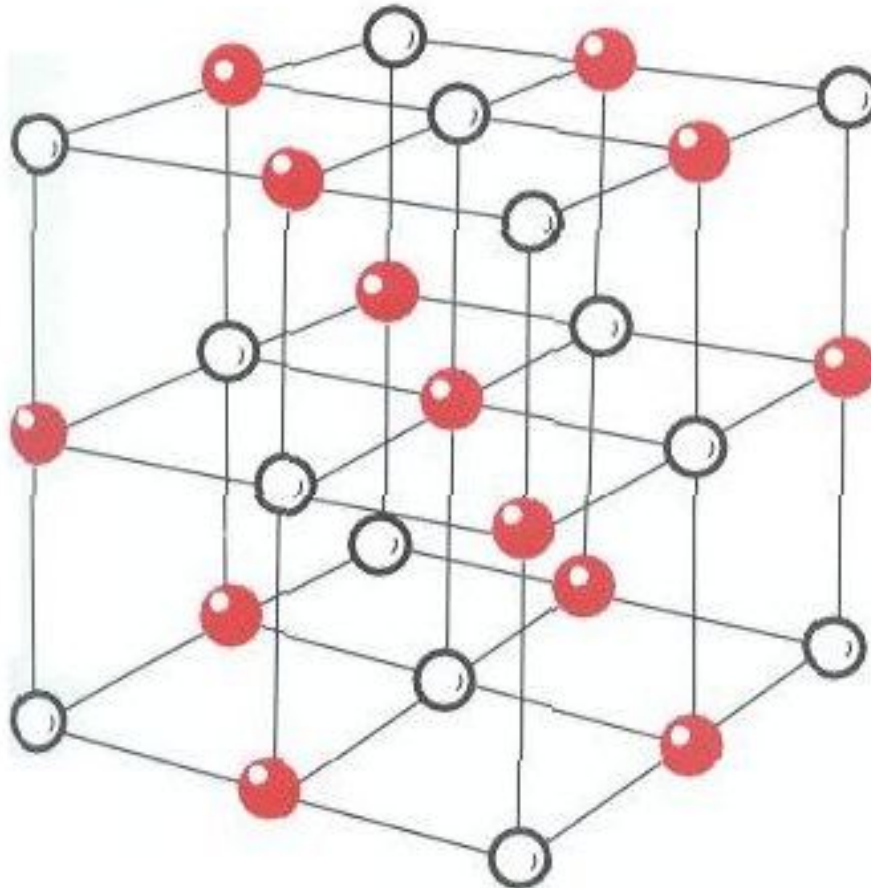
Правильные многогранники встречаются в живой природе. Например, скелет одноклеточного организма феодарии (*Circjgnia icosahdra*) по форме напоминает икосаэдр.

Чем же вызвана такая природная геометризация феодарий? По-видимому, тем, что из всех многогранников с тем же числом граней именно икосаэдр имеет наибольший объём при наименьшей площади поверхности. Это свойство помогает морскому организму преодолевать давление водной толщи.



Правильные многогранники – самые «выгодные» фигуры. И природа этим широко пользуется. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов.

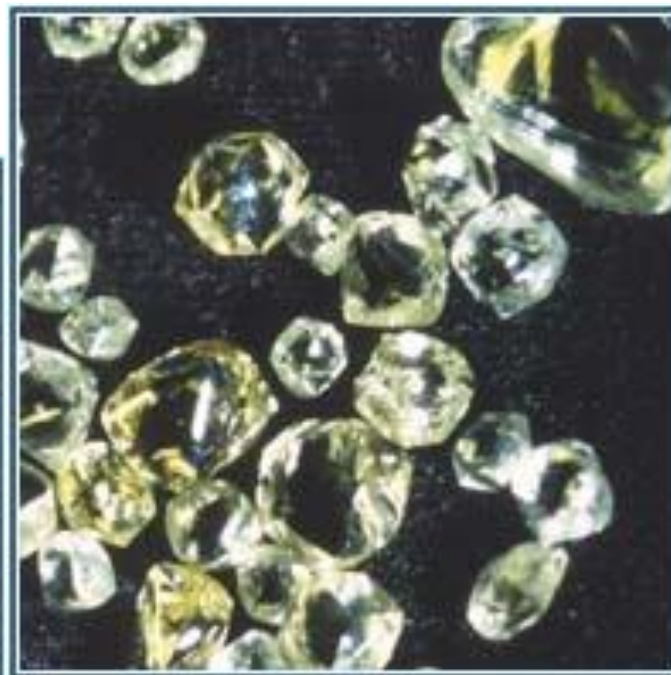
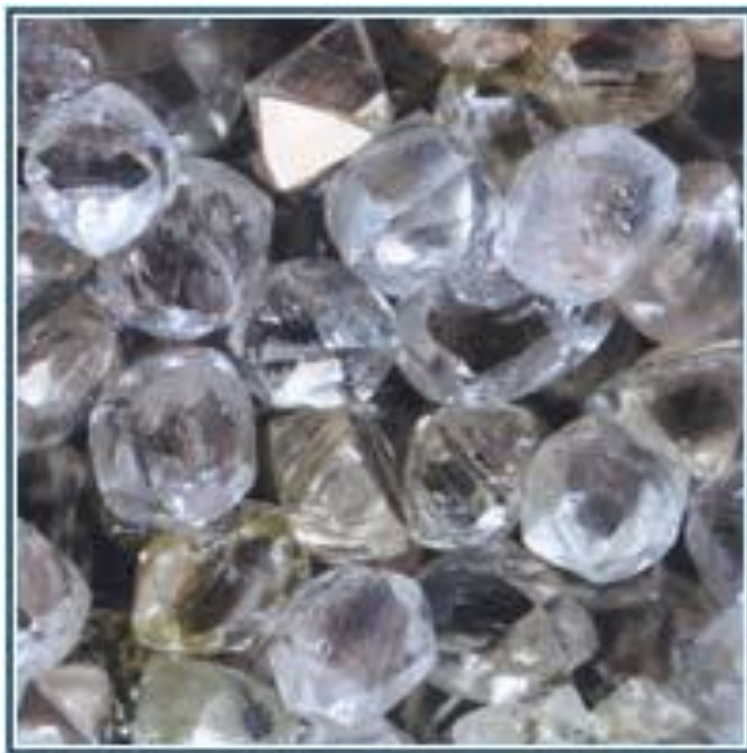
Взять хотя бы поваренную соль, без которой мы не можем обойтись. Известно, что она растворима в воде, служит проводником электрического тока. А кристаллы поваренной соли (NaCl) имеют форму куба.



При производстве алюминия пользуются калиево-алюминиевыми кварцами ($K[Al(SO_4)_2] \cdot 12H_2O$), монокристалл которых имеет форму правильного октаэдра.



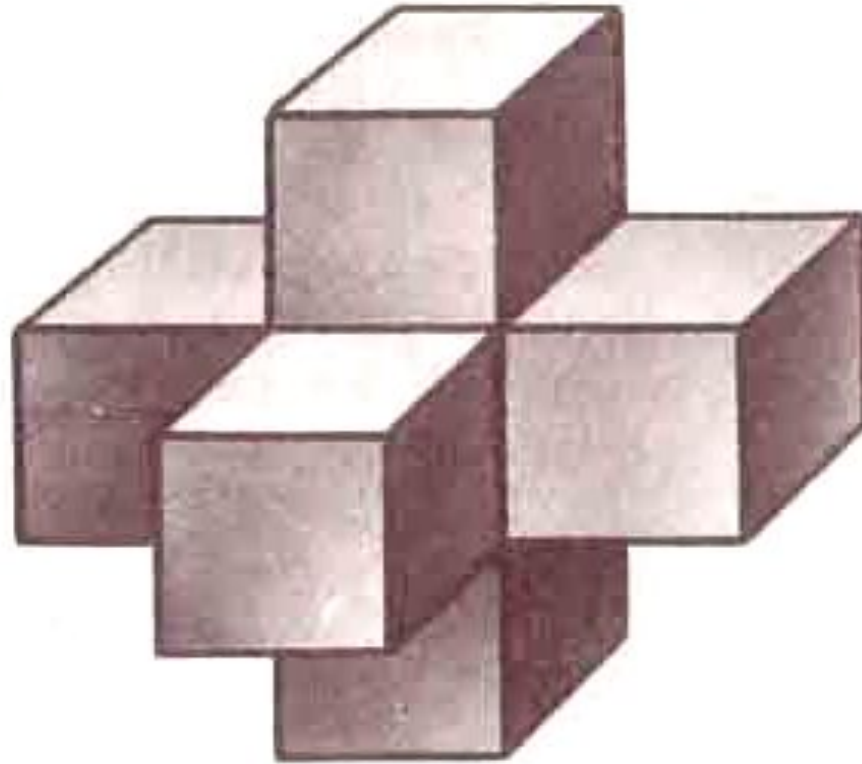
Получение серной кислоты, железа, особых сортов цемента не обходится без сернистого колчедана (FeS). Кристаллы этого химического вещества имеют форму додекаэдра.



В разных химических реакциях применяется сурьменистый сернокислый натрий ($\text{Na}_5(\text{SbO}_4(\text{SO}_4))$) – вещество, синтезированное учёными. Кристалл сурьменистого сернокислого натрия имеет форму тетраэдра.

Последний правильный многогранник – икосаэдр передаёт форму кристаллов бора (B). В своё время бор использовался для создания полупроводников первого поколения.

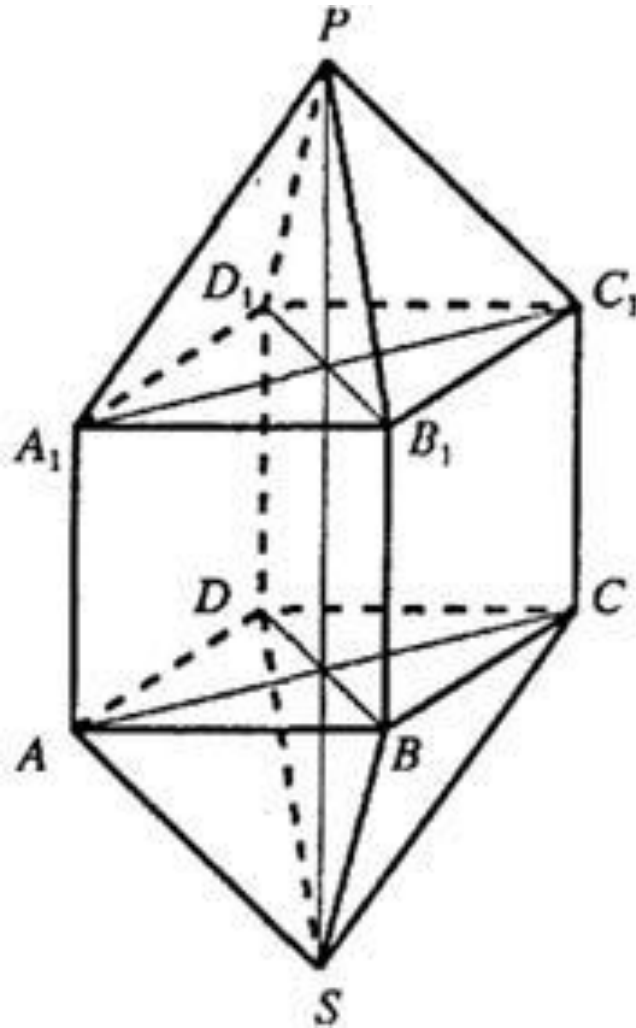
Задача : Данная пространственная фигура называется трехмерный крест. Она состоит из 7 кубов. Почему такая фигура не может быть названа правильной? Сколько квадратов ограничивает ее поверхность? Сколько ребер, вершин и граней у этой фигуры?



Ответ: Эта фигура не является выпуклой, в вершинах многогранника сходится разное число ребер. Фигура имеет 30 граней: у семи кубов 42 грани, у внутреннего куба 6 граней лежат внутри фигуры, и у каждого из остальных шести кубов наружными являются только пять граней. $P = 60$, $V = 32$.

Задача

Определите количество граней, вершин и рёбер многогранника, изображённого на рисунке. Проверьте выполнимость формулы Эйлера для данного многогранника.



С какими новыми геометрическими телами мы сегодня познакомились?

Почему Л. Кэрролл так высоко оценил значение этих многогранников?

Спасибо за урок!