Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №172

ТЕМА: «Принцип Дирихле»

Выполнила:
Зверева Екатерина Александровна
Учащаяся 8 «а» класса
Научный руководитель: Кирпичева Е.Е.

2011 - 2012 учебный год

Цели работы:

1. Ознакомиться с биографией Дирихле
2. Рассмотреть различные формулировки принципа Дирихле
3. Научиться применять изученный принцип к решению задач
4. Классифицировать задачи в соответствии с их содержанием:
   а) геометрические задачи;
   б) задачи на пары;
   в) задачи на знакомства и дни рождений;
   г) задачи на среднее арифметическое;
   д) задачи на делимость;
   е) задачи на комбинаторику;
   ж) задачи на теорию чисел;
5. Придумать свои задачи, и решить их используя принцип Дирихле

Биография

- ДИРИХЛЕ Петер Густав Лежен (13.2.1805-5.5.1859) - немецкий математик. Род. в Дюрене. В 1822-1827 Д. был домашним учителем в Париже. Входил в кружок молодых ученых, которые группировались вокруг Ж. Фурье. В 1827 Д. занял место доцента в Бреславле; с 1829 работал в Берлине. В 1831-1855 - профессор Берлинского ун-та, а после смерти К. Гаусса (1855) - Геттингенского ун-та.

Биография

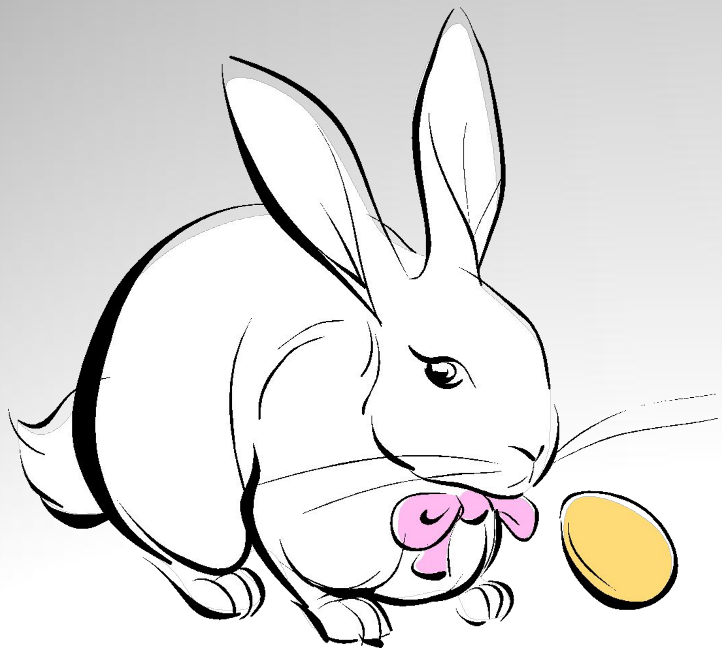
- Д. создал общую теорию алгебраических единиц в алгебраическом числовом поле.
- В области математического анализа Д. впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функции, что послужило обоснованием для многих дальнейших исследований.
- Значительны труды Д. в механике и математической физике, в частности в теории потенциала.

Биография

- Д. сделал ряд крупных открытий в теории чисел: установил формулы для числа классов бинарных квадратичных форм с заданным определителем и доказал теорему о бесконечности количества простых чисел в арифметической прогрессии из целых чисел, первый член и разность которой - взаимно просты. К решению этих задач Д. применил аналитические функции, названные функциями (рядами) Дирихле.

Принцип Дирихле

« Дирихле по частоте упоминаний школьниками навсегда обеспечено одно из самых высших мест.»



Наиболее применяемая формулировка:

"Если в n клетках сидят

n + 1 "кроликов",

то есть клетка, в которой не менее 2-х "кроликов "

Несколько утверждений:

У1. «Если в n клетках сидят не более n-1 "кроликов", то есть пустая клетка»

У2. «Если в n клетках сидят n + 1 "кроликов", то есть клетка, в которой не менее 2-х «кроликов»

У3. «Если в n клетках сидят не более nk-1 "кроликов", то в какой-то из клеток сидят не более k-1 "кроликов»

У4. «Если в n клетках сидят не менее n k+1 "кроликов", то в какой-то из клеток сидят не менее k+1 "кроликов»

У5. Непрерывный принцип Дирихле.

«Если среднее арифметическое нескольких чисел больше а, то, хотя бы одно из этих чисел больше а»;

У6. «Если сумма n чисел меньше S, то по крайней мере одно из этих чисел меньше S/n».

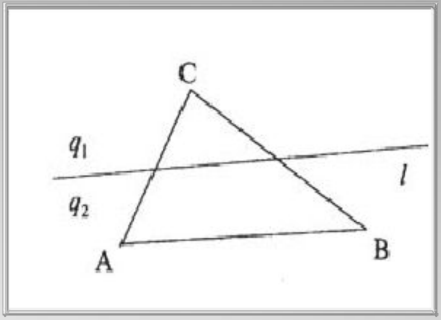
У7. «Среди p + 1 целых чисел найдутся два числа, дающие при делении на p один и тот же остаток».

1) Геометрические задачи

Задача 1. Доказать, что если прямая l, расположенная в плоскости треугольника ABC, не проходит ни через одну из его вершин, то она не может пересечь все три стороны треугольника.

Решение

Полуплоскости, на которые прямая l разбивает плоскость треугольника ABC, обозначим через q_1 и q_2; эти полуплоскости будем считать открытыми (то есть не содержащими точек прямой l). Вершины рассматриваемого треугольника (точки A, B, C) будут "зайцами", а полуплоскости q_1 и q_2 - "клетками". Каждый "заяц" попадает в какую-нибудь "клетку" (ведь прямая l не проходит ни через одну из точек A, B, C).

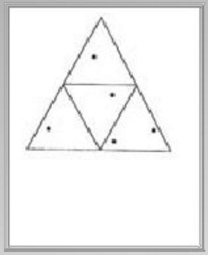


Так как "зайцев" три, а "клеток" только две, то найдутся два "зайца", попавшие в одну "клетку"; иначе говоря, найдутся такие две вершины треугольника ABC, которые принадлежат одной полуплоскости.

Пусть, скажем, точки А и В находятся в одной полуплоскости, то есть лежат по одну сторону от прямой l. Тогда отрезок AB не пересекается с l. Итак, в треугольнике ABC нашлась сторона, которая не пересекается с прямой l.

Задача 2. **Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Доказать, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5**

<u>Решение</u>



Средние линии правильного треугольника со стороной 1 разбивают его на четыре правильных треугольничка со стороной 0,5. Назовём их "клетками", а точки будем считать "зайцами".

По принципу Дирихле из пяти точек хотя бы две окажутся в одном из четырёх треугольничков. Расстояние между этими точками меньше 0,5, поскольку точки не лежат в вершинах треугольничков.

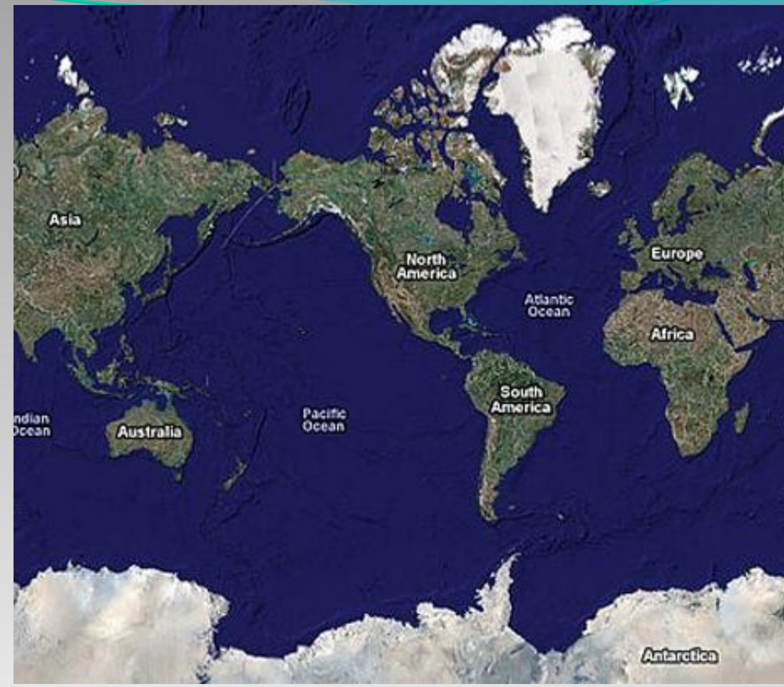
(Здесь использована известная лемма о том, что длина отрезка, расположенного внутри треугольника, меньше длины его наибольшей стороны.)

Задача №3. («на пары»)

На планете Земля океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.

Африка расположена между 37° с. ш. и 35° ю. ш., между 17 ° з.д., 51° з. д.

Континент расположен между примерно 9° з. д. и 169° з. д., 12° ю. ш. 81° с. ш.



- *Решение.* Будем считать "кроликами" точки океана, а "клетками" - пары диаметрально противоположных точек планеты. Количество "кроликов" в данном случае - это площадь океана, а количество "клеток" - *половина* площади планеты. Поскольку площадь океана больше половины площади планеты, то "кроликов" больше, чем "клеток". Тогда есть "клетка", в которой сидит не менее двух "кроликов", т.е. пара противоположных точек, обе из которых - океан. У2

Задача №4.

В хвойном лесу растут 800000 елей. На каждой ели - не более 500000 иголок. Доказать, что существуют хотя бы две ели с одинаковым числом иголок.

- *Решение.* Число "клеток" – 500000 (на каждой ели может быть от 1 иголки до 500000 иголок, 800000 ели – число "кроликов", так как, "кроликов" больше чем клеток, значит, есть "клетка", в которой сидит не менее двух "кроликов". Значит, существуют хотя бы две ели с одинаковым числом иголок. (У2)

Задача №5. («на делимость»)

Задача . Дано 11 различных целых чисел. Доказать, что из них можно выбрать два числа, разность которых делится на 10.

Решение. По крайней мере, два числа из 11 дают одинаковый

остаток при делении на 10 . Пусть это будут $A = 10a + r$ и $B = 10b + r$.

Тогда их разность делится на 10: $A - B = 10(a - b)$. (У2)

Задача №6. («на делимость»)

Доказать, что число N^5 оканчивается на ту же цифру, что число N.

Решение.

Докажем, что N^5-N кратно 10.

$$N^5-N=N(N^4-1)=N(N^2-1)(N^2+1)=N(N-1)(N+1)(N^2+1)$$

$N(N-1)$ кратно 2

$(N+1)(N^2+1)$ кратно 5

Задача №7. («на комбинаторику»)

В коробке лежат шарики 4-х разных цветов (много белых, много черных, много синих, много красных). Какое наименьшее количество шариков надо наощупь вынуть из мешка, чтобы среди них заведомо оказались два одного цвета?

Решение

Возьмем за «кроликов» шары, а за «клетки» - черный, белый, синий, красный цвета. Клеток 4, поэтому если кроликов, хотя бы 5, то какие-то два попадут в одну клетку (будет 2 одноцветных шарика).

Задача "на комбинаторику»

№8. Маленький брат Андрея раскрасил шашки в восемь цветов. Сколькими способами Андрей может поставить на доску 8 разноцветных шашек так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке было по одной шашке?

Сколькими способами Андрей может поставить на доску 8 белых шашек так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке было по одной шашке?

Решение задачи.

1) Рассмотрим сначала случай, когда шашки белые. Будем расставлять шашки. В первом столбце мы можем поставить шашку в любую из 8 клеток. Во втором столбце — в любую из 7 клеток. (Т. к. нельзя ставить в ту же строку, в которой стоит первая шашка.) Аналогично в третьей строке мы можем поставить шашку в любую из 6 клеток, в четвёртой строке — в любую из пяти и т. д. Итого получаем 8 способов.

2) Теперь рассмотрим случай цветных шашек. Возьмём произвольную расстановку белых шашек. Будем раскрашивать эти шашки в 8 цветов, так чтобы любые две из них были покрашены в разные цвета. Первую мы можем покрасить в один из 8 цветов, вторую — в один из 7 оставшихся и.т. д. Т. е. всего 8 способов раскраски. Поскольку способов расстановки тоже 8 , и каждую из этих расстановок мы можем раскрасить 8 способами, то всего способов в этом случае $8 \cdot 8 = 8^2$.

Ответ: 8^2 способов, 8 способов.

Задача (метод от «противного»)

№9. В Москве проживает более 10 000 000 людей. На голове у каждого человека не может быть более 300 000 волос. Докажите, что наверняка найдутся 34 москвича с одинаковым числом волос на голове.

Решение

1) На голове может быть 0, 1, …, 300 000 волос — всего 300 001 вариант. Каждого москвича отнесём к одной из 300 001 групп в зависимости от количества волос.

2) Если 34 москвича с одинаковым количеством волос не найдутся, то это значит, что в любую из созданных групп входит не более 33 человек.

3) Тогда всего в Москве живёт не более

$33 \cdot 300\,001 = 9\,900\,033 < 10\,000\,000$ человек, что противоречит условию.

4) Значит, такие 34 москвича обязательно найдутся.

Используемые интернет-ресурсы:

- images.yandex.ru (фото Дирихле, картинки о школе)
- http://bars-minsk.narod.ru/teachers/dirichle.html
- http://www.bestreferat.ru/referat-4776.html