

# Признак перпендикулярности прямой и плоскости

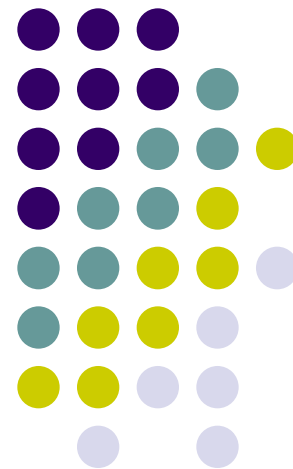
Васильева Наталья Евгеньевна

*учитель математики*

*МОУ средняя общеобразовательная*

*школа №1*

*г. Малая Вишера*



# Цели урока:

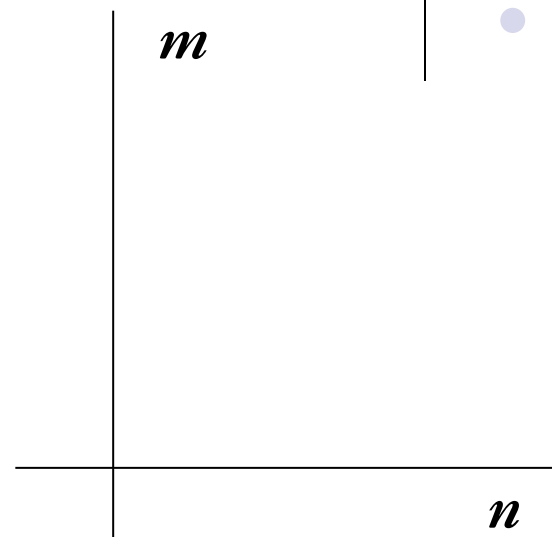


- Материалы этого урока знакомят с признаком перпендикулярности прямой и плоскости и свойствами перпендикулярных прямой и плоскости.
- Окружающий нас мир дает много примеров перпендикулярности прямой и плоскости. Правильно установленный вертикальный столб перпендикулярен к плоскости земли. Линии пересечения стен комнаты перпендикулярны к плоскости пола. При строительстве зданий при установке столбов для их устойчивости очень важно обеспечить перпендикулярность к поверхности земли. Для этого существуют специальные способы проверки перпендикулярности, основанные на признаке перпендикулярности прямой и плоскости и свойствах перпендикулярных прямой и плоскости, которые мы и будем изучать.
- Изучив материалы предыдущего урока, вы познакомились с определением и свойствами перпендикулярных прямых, с определением прямой перпендикулярной к плоскости. Повторите еще раз эти материалы. Это поможет вам правильно ответить на вопросы теста, проверяющего ваши знания по теме «Перпендикулярные прямые».

# Перпендикулярные прямые



Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными** (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен  $90^\circ$ . Для обозначения перпендикулярности используется знак  $\perp$ . На рисунке прямая  $m$  перпендикулярна прямой  $n$  или  $m \perp n$ .



## Лемма о перпендикулярных прямых

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

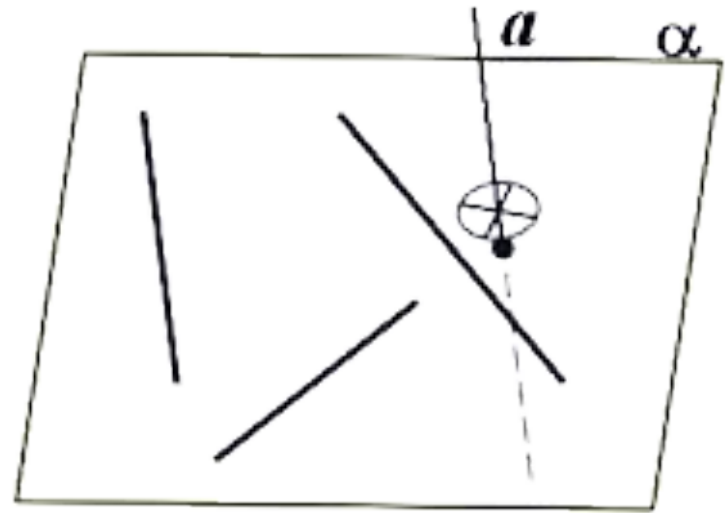
Символически эту лемму можно записать так

$$\left. \begin{array}{l} a \perp c \\ a \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp c$$

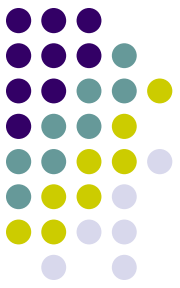
# Прямая, перпендикулярная к плоскости



Прямая называется *перпендикулярной* к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой на этой плоскости. Для обозначения перпендикулярности используется знак  $\perp$ . На рисунке изображена прямая  $a$ , перпендикулярная плоскости  $\alpha$  или  $a \perp \alpha$ .



# Теорема о двух параллельных прямых и плоскости



Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Символически эту теорему можно записать так

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

# Теорема о двух прямых, перпендикулярных к плоскости

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны друг другу.

Символически эту теорему можно записать так

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

# Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Наверное, каждому приходилось вкапывать штанги футбольных ворот. До перекладки порой и не доходило. Как важно при этом было так установить штангу так, чтобы она была перпендикулярна поверхности земли. Если использовать определение перпендикулярности прямой к плоскости, то тогда следует проверять перпендикулярность штанги к каждой прямой на футбольном поле. А нельзя ли ограничиться меньшим числом проверок? Оказывается можно. Но одной проверки явно недостаточно. Если данная прямая перпендикулярна только к одной прямой на плоскости, то она не перпендикулярна к самой плоскости (рис.3). Она может и лежать в этой плоскости. Если же прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости (рис.4). Это утверждение называется признаком перпендикулярности прямой и плоскости и формулируется в виде теоремы. Таким образом, чтобы установить штангу ворот перпендикулярно плоскости поля достаточно проверить ее перпендикулярность, посмотрев на нее с двух разных, но не противоположных сторон.

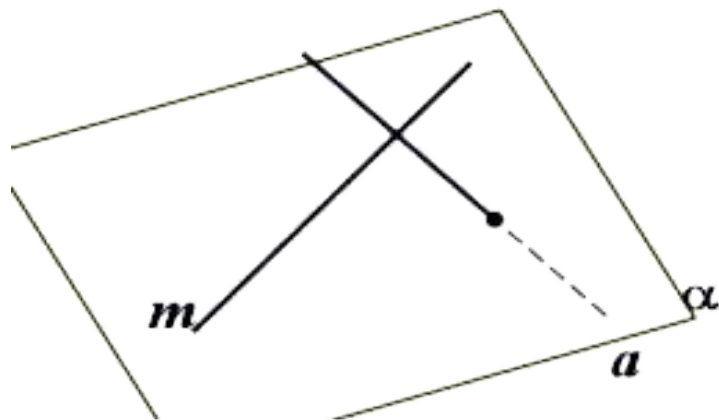


Рис. 10.3

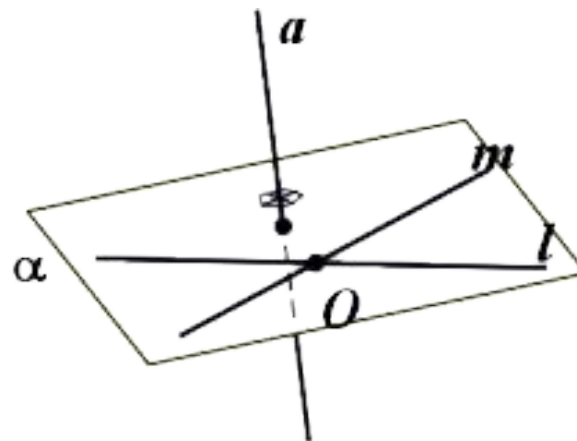


Рис. 10.4.

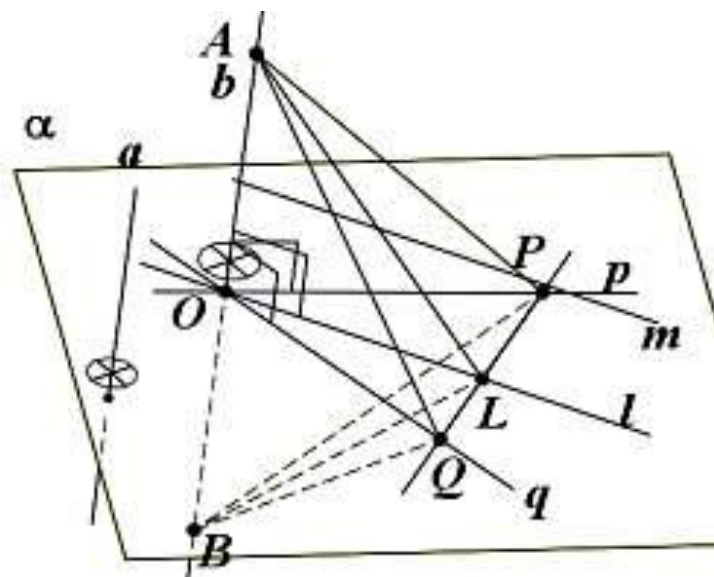
# Теорема

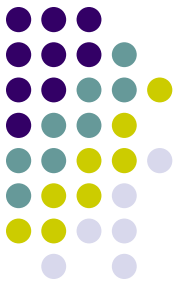
*Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.*



Пусть  $b \perp q$ ;  $b \perp p$ ;  $p \subset a$ ;  $q \subset a$ ;  $p \cap q = O$ . Докажем, что  $b \perp a$ .

Для этого нужно доказать, что прямая  $b$  перпендикулярна к любой (произвольной) прямой  $m$  на плоскости  $a$ . Рассмотрим сначала случай, когда прямая  $b$  проходит через точку пересечения  $O$ . Проведем через точку  $O$  прямую  $l$ , параллельную прямой  $m$ . Отметим на прямой  $b$  точки  $A$  и  $B$ , равноудаленные от точки  $O$ , и проведем в плоскости  $a$  прямую, пересекающую прямые  $p$ ,  $l$  и  $q$  соответственно в точках  $P$ ,  $L$  и  $Q$ . Так как прямые  $p$  и  $q$  – серединные перпендикуляры, то  $AP = BP$  и  $AQ = BQ$ . Следовательно,  $\triangle APQ = \triangle BPQ$  (по трем сторонам). Тогда  $\angle APL = \angle BPL$  и  $\triangle APL = \triangle BPL$  (по двум сторонам и углу). Тогда  $AL = BL$ . Следовательно,  $\triangle ALB$  – равнобедренный, отрезок  $LO$  является медианой и высотой в этом треугольнике,  $\angle AOL = 90^\circ$  и  $b \perp l$ . Поскольку  $l \parallel m$ , то  $b \perp m$  (по лемме о перпендикулярных прямых), то есть  $b \perp a$ .





Рассмотрим теперь случай, когда прямая  $a$  не проходит через точку  $O$ , но  $a \perp q$ ;  $a \perp r$ . Проведем через точку  $O$  прямую, параллельную прямой  $a$ . Эта прямая перпендикулярна прямым  $r$  и  $q$  (по лемме о перпендикулярных прямых) и, следовательно, совпадает с прямой  $b$ . Поскольку  $b \perp a$  и  $b \parallel a$ , то  $a \perp a$  (по теореме о двух параллельных прямых и плоскости).

Теорема доказана. Символически эту теорему можно записать так

$$\left. \begin{array}{l} c \cap b \neq \emptyset \\ b \subset \alpha \\ c \subset \alpha \\ a \perp b \\ a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

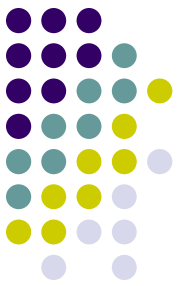
Докажем две теоремы, обосновывающие существование плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой и существование прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной плоскости. При доказательстве этих теорем будет использован признак перпендикулярности прямой и плоскости.



# Плоскость, перпендикулярная прямой

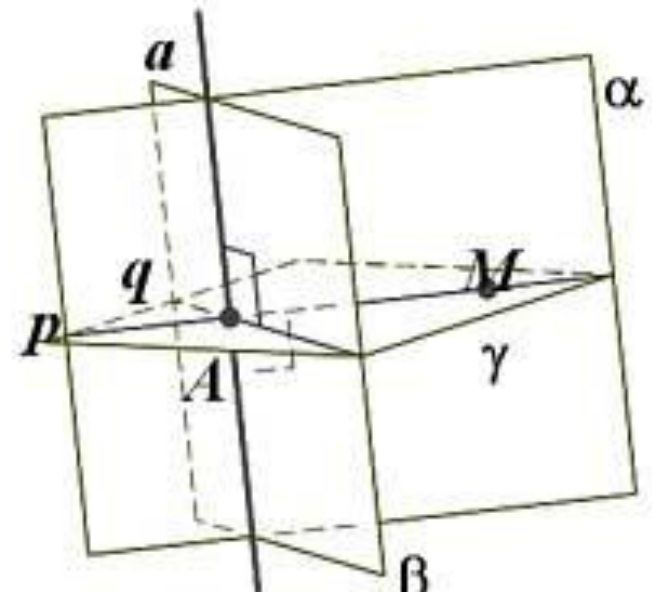
## Теорема

*Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой и притом только одна.*

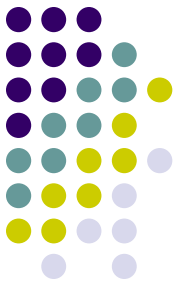


Обозначим данную прямую буквой  $a$ , а произвольную точку пространства – буквой  $M$ .

1. Докажем существование плоскости, перпендикулярной прямой  $a$  и проходящей через точку  $M$ . Проведем через прямую  $a$  две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы плоскость  $\alpha$  проходила через точку  $M$ . В плоскости  $\alpha$  проведем через точку  $M$  прямую  $r$ , перпендикулярную прямой  $a$  и пересекающую ее в точке  $A$ . В плоскости  $\beta$  проведем прямую  $q$ , перпендикулярную прямой  $a$  и проходящую через точку  $A$ . Рассмотрим плоскость, проходящую через прямые  $r$  и  $q$ . Эта плоскость перпендикулярна прямой  $a$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) и проходит через произвольную точку  $M$ . Следовательно, это искомая плоскость.

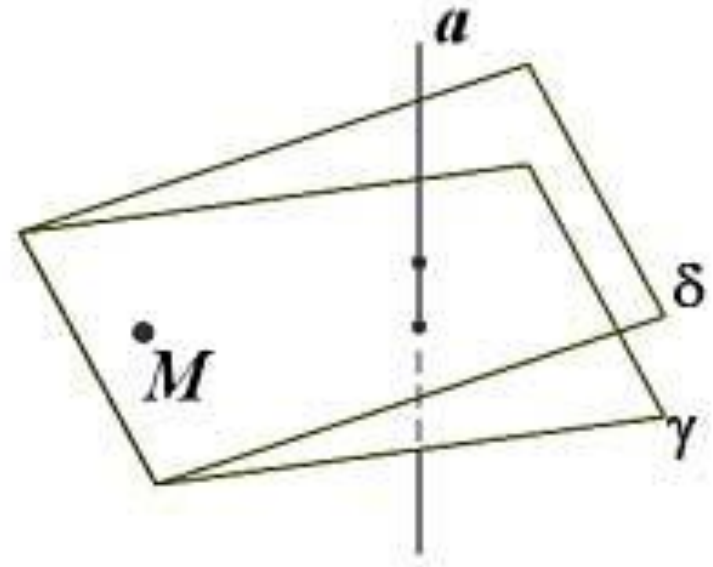


Существование доказано.



2. Докажем единственность такой плоскости.

Проведем доказательство от противного. Пусть существуют две плоскости  $\delta$  и  $\gamma$ , проходящие через точку  $M$  и перпендикулярные прямой  $a$ . Но тогда  $\delta \parallel \gamma$ . Но плоскости  $\delta$  и  $\gamma$  не могут быть параллельными друг другу, так как имеют общую точку  $M$ . Следовательно наше предположение неверно и существует только одна плоскость, проходящая через произвольную точку пространства перпендикулярно данной прямой. Единственность доказана.



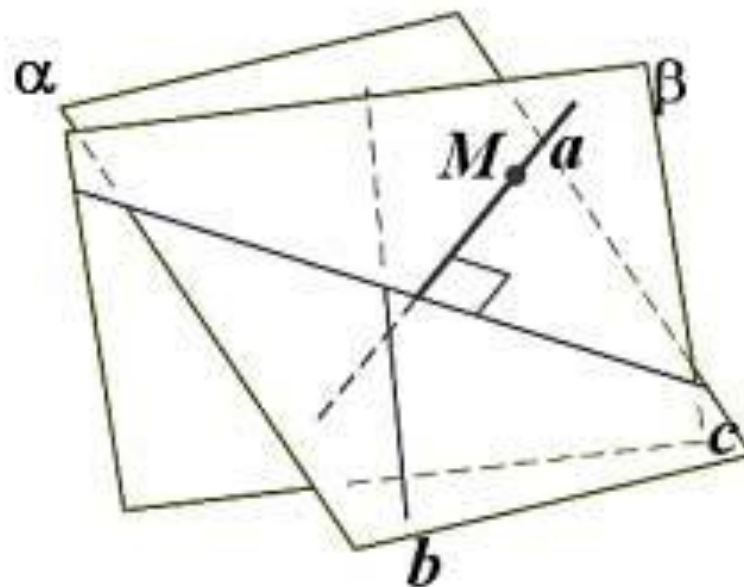
## Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

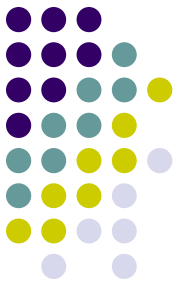
*Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости и притом только одна.*



Обозначим данную плоскость буквой  $\alpha$ , а произвольную точку пространства – буквой  $M$ .

1. Докажем существование прямой, перпендикулярной плоскости  $\alpha$  и проходящей через точку  $M$ . Проведем в плоскости  $\alpha$  прямую  $b$ . Через точку  $M$  проведем плоскость  $\beta$ , перпендикулярную прямой  $b$  (это мы можем сделать на основании предыдущей теоремы о плоскости перпендикулярной прямой). Пусть  $c$  – общая прямая плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ . Проведем в плоскости  $\beta$  через точку  $M$  прямую  $a$ , перпендикулярную прямой  $c$ . Тогда прямая  $a$  перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости  $\alpha$ . Следовательно, прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Следовательно,  $a$  – искомая прямая. Существование доказано.

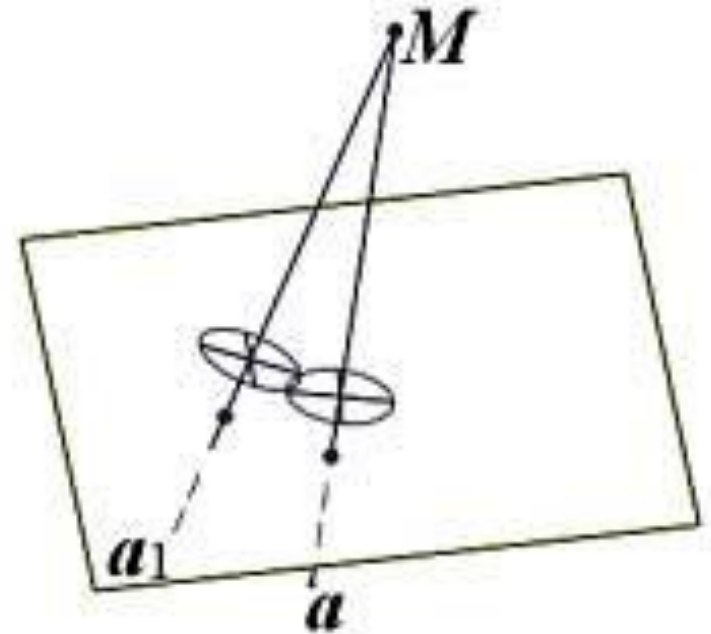




2. Докажем единственность такой прямой.

Проведем доказательство от противного. Пусть существует две прямые  $a$  и  $a_1$ , проходящие через точку  $M$  и перпендикулярные плоскости  $\alpha$ . Но тогда  $a \parallel a_1$  (см. теорему о двух прямых, перпендикулярных к плоскости). Но прямые  $a$  и  $a_1$  не могут быть параллельными друг другу, так как имеют общую точку  $M$ . Следовательно наше предположение неверно и существует только одна прямая проходящая через произвольную точку пространства перпендикулярно данной плоскости.

Единственность доказана.



# Примеры задач на доказательство. Примеры задач на вычисления

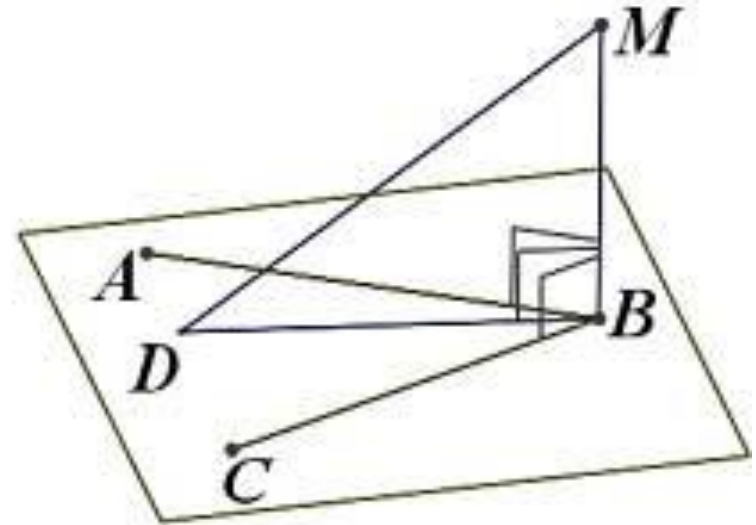


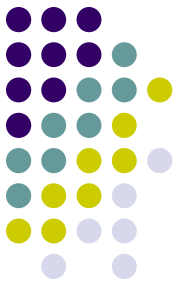
**Дано:** плоскость  $(ABC)$ ,  $MB \perp AB$ ,  
 $MB \perp BC$ ,  $D \in (ABC)$ .

**Доказать:**  $\triangle MBD$  - прямоугольный.

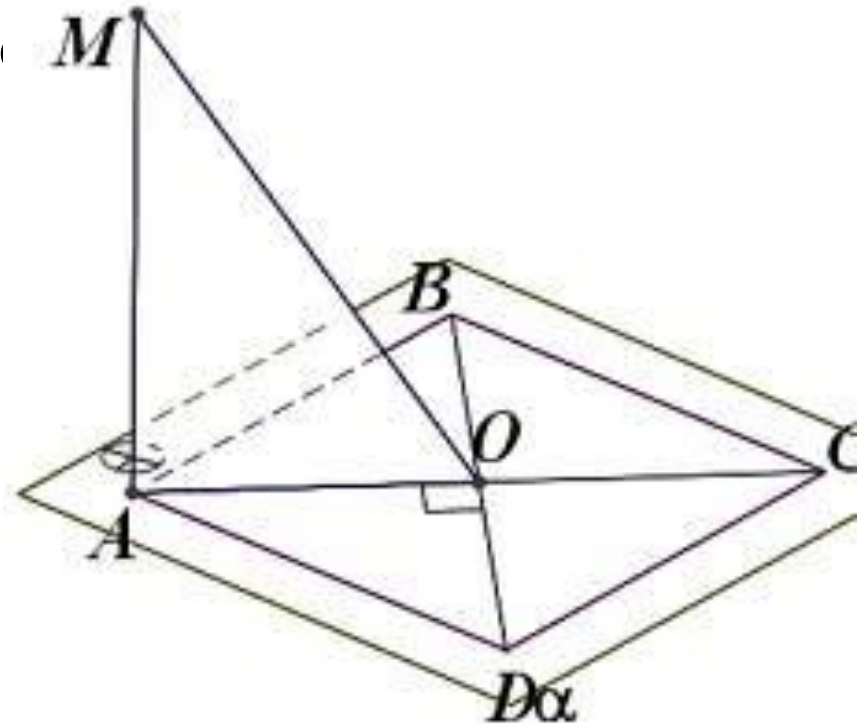
**Доказательство.**

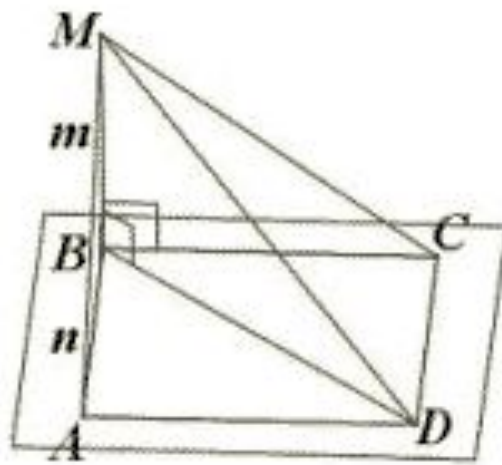
$MB \perp AB$ ,  $MB \perp BC$ . Следовательно,  
 $MB \perp (ABC)$  (по признаку  
перпендикулярности прямой и  
плоскости). Тогда  $MB \perp BD$  (по  
определению прямой,  
перпендикулярной к плоскости).  
Следовательно,  $\angle DBM = 90^\circ$  и  
 $\triangle MBD$  – прямоугольный, что и  
требовалось доказать.





- **Дано:**  $ABCD$  - квадрат,  $MA \perp \alpha$ ,  $ABCD \in \alpha$ .
- **Доказать:**  $BD \perp MO$ .
- **Доказательство.**
- $MA \perp \alpha$ , следовательно,  $MA \perp BD$  (по определению прямой, перпендикулярной к плоскости).  $BD \perp AO$  (по свойству квадрата). Тогда  $BD \perp (AOM)$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости –  $BD$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $AO$  и  $MA$ , лежащим в этой плоскости). Следовательно,  $BD \perp MO$  (по определению прямой, перпендикулярной к плоскости), что и требовалось доказать.





**Дано:**  $ABCD$  - квадрат,  
 $\angle MBA = \angle MBC = 90^\circ$ ,  $MB = m$ ,  $AB = n$   
 $ABCD \in \alpha$ .

**Найти:**  $MA, MC, MD$ .

**Решение.**

$BC = AB = n$  (т.к.  $ABCD$  - квадрат).

Тогда из  $\triangle MBC$

$$MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{m^2 + n^2} \text{ (по теореме Пифагора).}$$

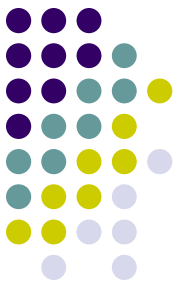
Аналогично из  $\triangle MBA$

$$MA = \sqrt{MB^2 + BA^2} = \sqrt{m^2 + n^2} \text{ (по теореме Пифагора).}$$

$BD = n\sqrt{2}$  (диагональ квадрата).  $BM \perp (ABC)$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости – по условию  $BM$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $AB$  и  $BC$ , лежащим в этой плоскости). Следовательно,  $BM \perp BD$  (по определению прямой, перпендикулярной к плоскости). Тогда

$\angle MBD = 90^\circ$ . Из  $\triangle MBD$   $MD = \sqrt{MB^2 + BD^2} = \sqrt{m^2 + 2n^2}$  (по теореме Пифагора).

Ответ:  $MA = MC = \sqrt{m^2 + n^2}$ ;  $MD = \sqrt{m^2 + 2n^2}$ .



# Проверь себя.

## Перпендикулярные прямые



*Перед Вами записаны предложения, разбитые на две части.  
Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы  
получилось верное предложение. Введите номер выбранного  
варианта.*

**Если одна из двух параллельных прямых  
перпендикулярна к третьей прямой,**

- то и другая прямая перпендикулярна к третьей прямой.
- то другая прямая всегда параллельна третьей прямой.
- то другая прямая никогда не пересекает третью прямую.
- то другая прямая всегда скрещивается с третьей прямой.



# Проверь себя.

## Перпендикулярные прямые



*Перед Вами записаны предложения, разбитые на две части. Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы получилось верное предложение. Введите номер выбранного варианта.*

**Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых,**

то она всегда лежит в одной плоскости с другой прямой

то она параллельна с другой прямой.

то она скрещивается с другой прямой.

то она перпендикулярна и к другой прямой. .

# Проверь себя.

## Перпендикулярные прямые



*Перед Вами записаны предложения, разбитые на две части. Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы получилось верное предложение. Введите номер выбранного варианта.*

**Если две прямые параллельны третьей прямой,**

то все три прямые всегда лежат в одной плоскости.

то они скрещиваются друг с другом.

то они параллельны друг другу.

то они перпендикулярны друг к другу.

# Проверь себя.

## Перпендикулярные прямые



*Перед Вами записаны предложения, разбитые на две части. Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы получилось верное предложение. Введите номер выбранного варианта.*

**Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей**

то она принадлежит другой плоскости.

то другая плоскость не перпендикулярна данной прямой.

то она перпендикулярна и другой плоскости.

то она всегда параллельна другой плоскости.

# Проверь себя.

## Перпендикулярные прямые



*Перед Вами записаны предложения, разбитые на две части. Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы получилось верное предложение. Введите номер выбранного варианта.*

**Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости,**

то другая прямая не перпендикулярна к этой плоскости.

то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

то другая прямая параллельна этой плоскости.

то другая прямая лежит в этой плоскости.

Перед Вами записаны предложения, понятия и названия теорем. Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы предложению понятию или теореме соответствовала верная символическая запись.



## Лемма о перпендикулярных прямых

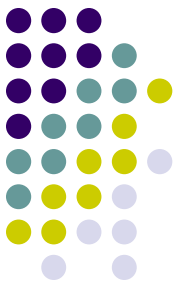
$$1) \left. \begin{array}{l} a \perp c \\ a \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp c$$

$$2) \left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

$$3) \left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

$$4) \left. \begin{array}{l} a \perp c \\ a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp c$$

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.



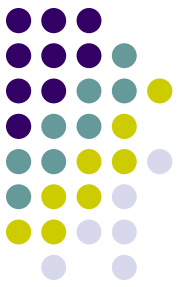
$$1) \left. \begin{array}{l} a \perp c \\ a \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp c$$

$$2) \left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

$$3) \left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

$$4) \left. \begin{array}{l} a \perp c \\ a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp c$$

Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости



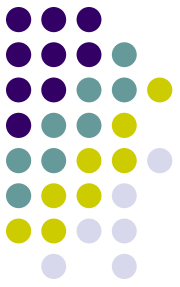
$$1) \left. \begin{array}{l} a \perp c \\ a \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp c$$

$$2) \left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

$$3) \left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

$$4) \left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ \alpha \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \beta$$

# Домашнее задание:



Л.С.Атанасян и др. Геометрия. Учебник для 10-11 классов средней школы.

## 1. Упражнение 129 б)

Прямая  $AM$  перпендикулярна к плоскости квадрата  $ABCD$ , диагонали которого пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что  $MO \perp MD$ .

## 2. Упражнение 131

В тетраэдре  $ABCD$  точка  $M$  – середина ребра  $BC$ ,  $AB=AC$ ,  $DB=DC$ . Докажите, что плоскость треугольника  $ADM$  перпендикулярна к прямой  $BC$ .

## 3. Упражнение 134

Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку  $M$  прямой  $a$  и перпендикулярные к этой прямой, лежат в плоскости, проходящей через точку  $M$  и перпендикулярной прямой  $a$ .

## 4. Упражнение 137

Докажите, что через каждую из двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых проходит плоскость, перпендикулярная к другой прямой.