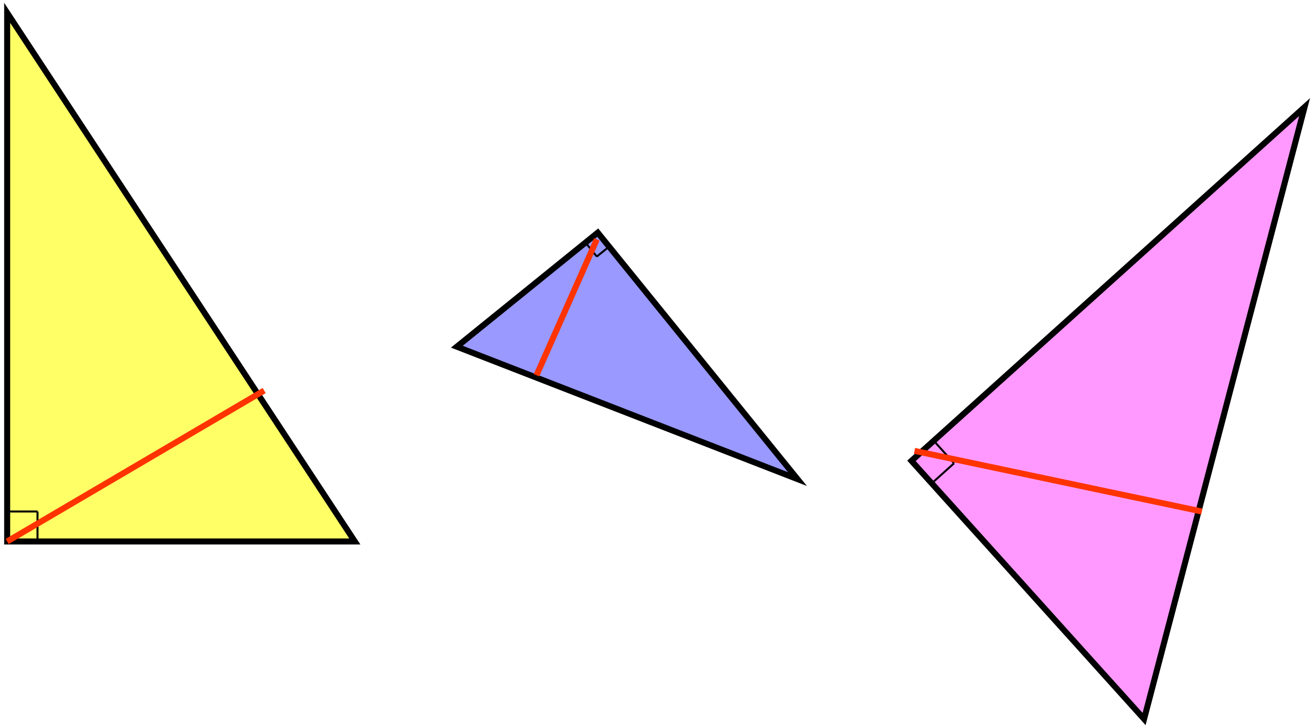
Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике



Определение: отрезок **x** называется средним пропорциональным или средним геометрическим между двумя отрезками **а** и **в**, если **а** : **x** = **x** : **в**

Например, отрезок длиной 6 см является средним пропорциональным между отрезками с длинами 9 см и 4 см, т.к. 9 : 6 = 6 : 4

Равенство а : x = x : в можно записать в виде $x^2 = a\,в$ **или в виде** $x = \sqrt{aв}$

x – среднее геометрическое между **а** и **в**

Реши задачи:

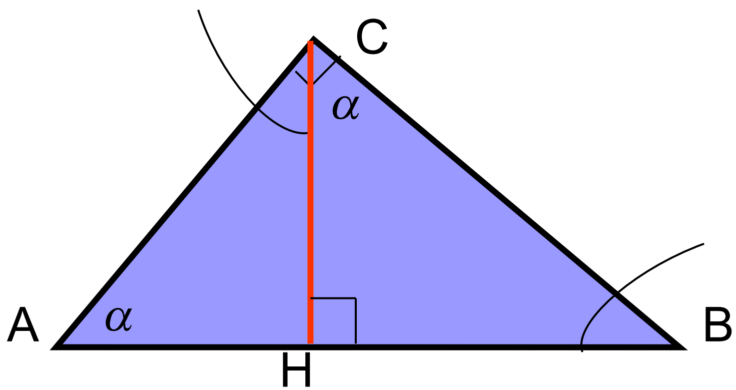
1. Является ли отрезок длиной 8 см средним пропорциональным между отрезками с длинами 16 см и 4 см? да

2. Является ли отрезок длиной 9 см средним пропорциональным между отрезками с длинами 15 см и 6 см? нет

3. Является ли отрезок длиной $2\sqrt{5}$ см средним пропорциональным между отрезками с длинами 5 см и 4 см? да

Важное свойство.

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^0$,
$CH \perp AB$

Доказать: $\triangle$ ACH и $\triangle$ CBH подобны
$\triangle$ ACH и $\triangle$ ABC подобны
$\triangle$ CBH и $\triangle$ ABC подобны

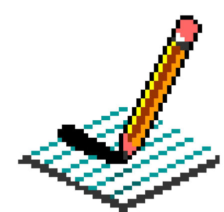
Доказательство:

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle B = 90^0 - \alpha$,
$\angle ACH = 90^0 - \alpha$, $\angle BCH = 90^0 - (90^0 - \alpha) = \alpha$.

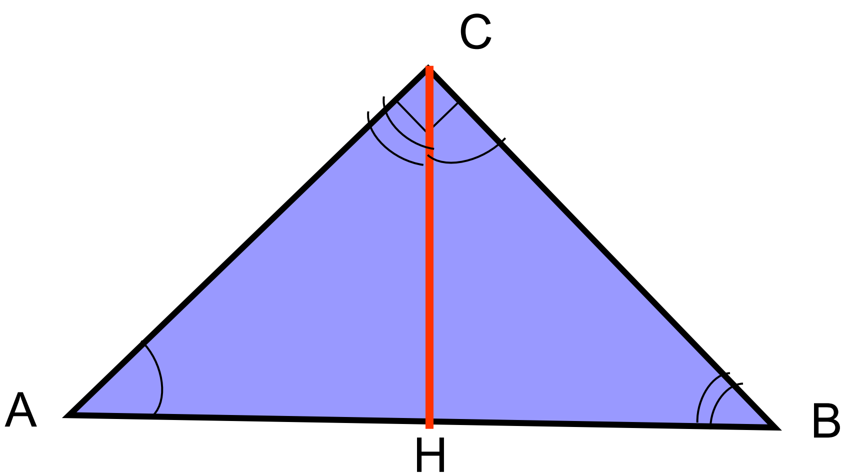
Итак, прямоугольные треугольники ACH и CBH подобны, т.к. $\angle A = \angle BCH$,

прямоугольные треугольники ACH и ABC подобны, т.к. $\angle A$ - общий,

прямоугольные треугольники CBH и ABC подобны, т.к. $\angle B$ – общий.



Свойство 1. **Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.**



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^0$,
$CH \perp AB$

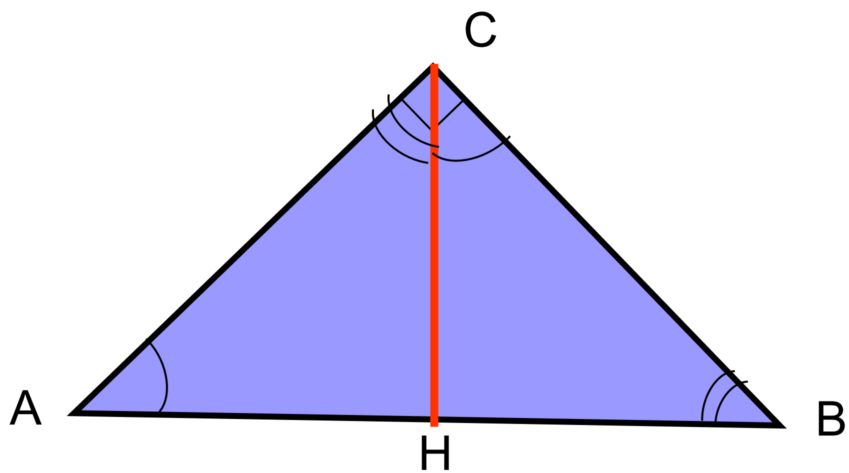
Доказать: $CH = \sqrt{AH \cdot HB}$

Доказательство:

По доказанному $\triangle ACH$ и $\triangle CBH$ подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

$\dfrac{AH}{CH} = \dfrac{CH}{HB}$, следовательно, $CH^2 = AH \cdot HB$, т. е. $CH = \sqrt{AH \cdot HB}$

Свойство 2. **Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключённым между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла.**



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^0$, $CH \perp AB$

Доказать: $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$

$BC = \sqrt{AB \cdot BH}$

Доказательство:

По доказанному $\triangle ACH$ и $\triangle ABC$ подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AH}$$

Значит, $AC^2 = AB \cdot AH$, т. е. $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$

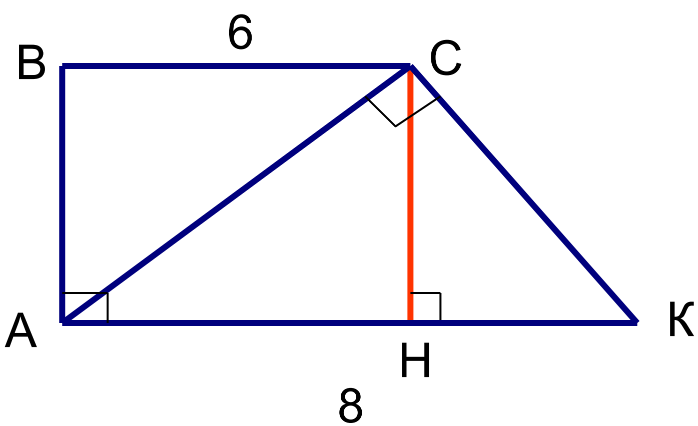
По доказанному $\triangle BCH$ и $\triangle ABC$ подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BH}$$

Значит, $BC^2 = AB \cdot BH$, т. е. $BC = \sqrt{AB \cdot BH}$

Решение задачи

В трапеции АВСК $AB \perp AK$, $AC \perp CK$, ВС = 6, АК = 8.
Найдите углы трапеции.



Решение:
Проведём $CH \perp AK$,
т. к. АВСК – трапеция и $AB \perp AK$, то
АВСН – прямоугольник, АН = ВС = 6,
НК = АК – АН = 8 – 6 = 2.

Т. к. $AC \perp CK$, то $\triangle ACK$ – прямоугольный,
СН – высота, проведённая из вершины прямого угла, значит,

$$CH = \sqrt{AH \cdot HK} = \sqrt{6 \cdot 2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

По теореме Пифагора ($\triangle CHK$) $CK^2 = CH^2 + HK^2$, $CK^2 = 12 + 4 = 16$, СК = 4.
(2 способ нахождения СК из $\triangle ACK$: $CK = \sqrt{AK \cdot HK} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$)

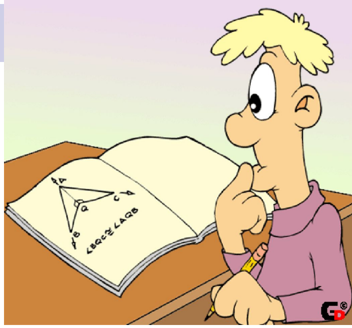
В прямоугольном треугольнике СНК НК = ½ СК, значит, $\angle KCH = 30^0$,
$\angle K = 90^0 - 30^0 = 60^0$.

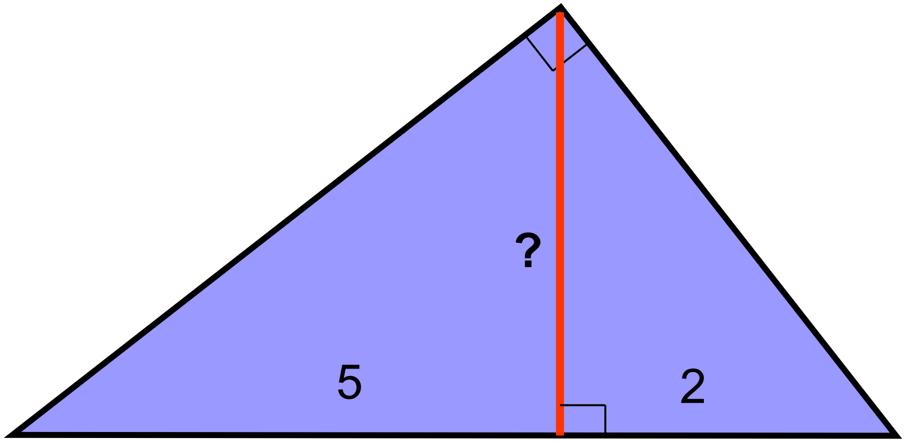
В трапеции АВСК $\angle A = \angle B = 90^0$, $\angle K = 60^0$, $\angle BCK = 180^0 - 60^0 = 120^0$.

Ответ: 90^0; 90^0; 120^0; 60^0.

1.

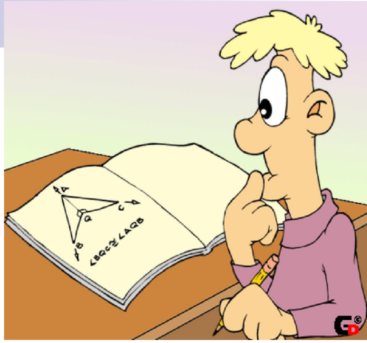
Реши задачу

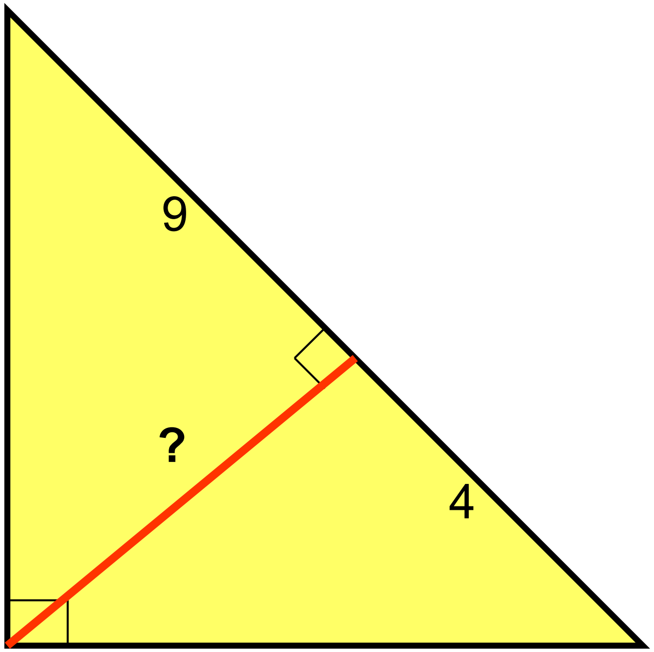




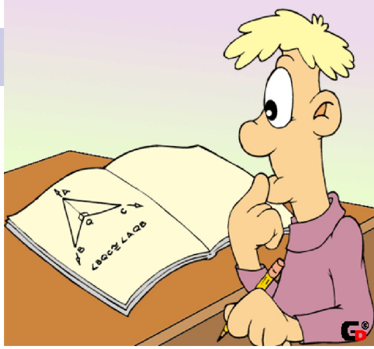
Реши задачу

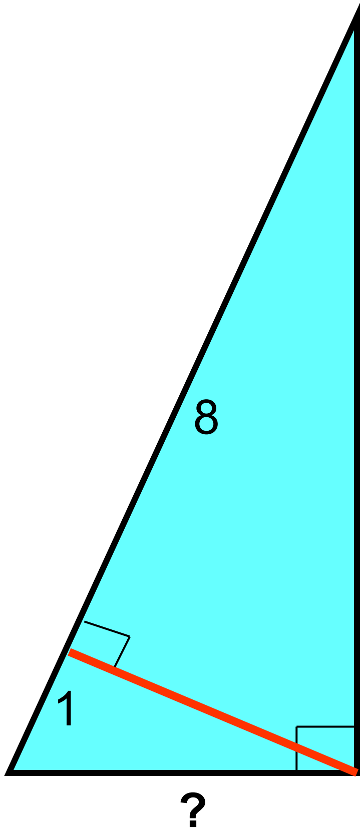
2.





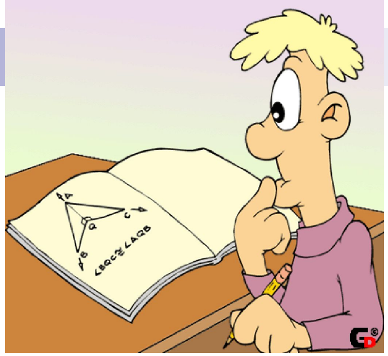
3. Реши задачу

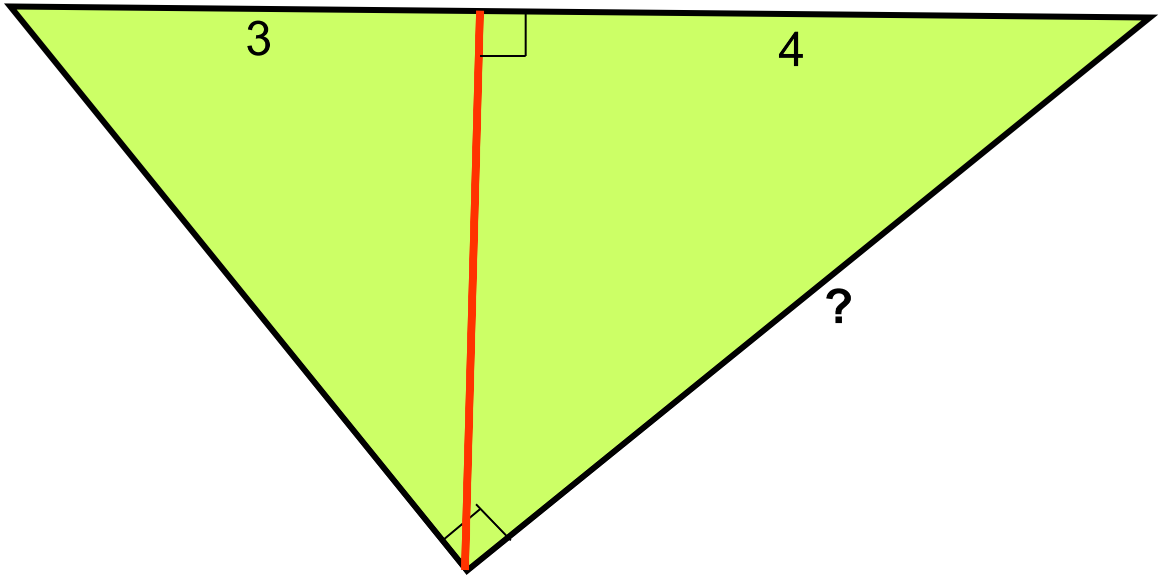


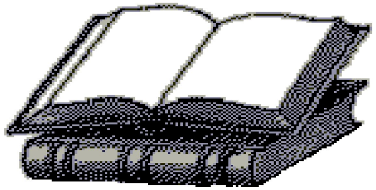


Реши задачу

4.







Желаю успехов в учёбе!

Михайлова Л. П.
ГОУ ЦО № 173.