

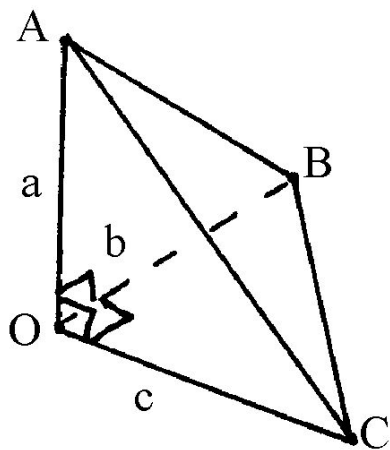


Пространственная теорема Пифагора

- 
- **Все плоские углы тетраэдра $OABC$ при вершине O — прямые. Докажите, что квадрат площади треугольника ABC равен сумме квадратов площадей остальных граней (пространственная теорема Пифагора).**
- 



Пусть $OA=a$; $OC=c$; $OB=b$. Площадь трех верхних граней равна: $\frac{1}{2}(cb + ba + ac)$, а сумма квадратов

этих площадей: $\frac{1}{4}(c^2b^2 + b^2a^2 + a^2c^2)$.

$$AC^2=a^2+c^2; \quad AB^2=a^2+b^2; \quad CB^2=c^2+b^2.$$

По теореме косинусов:

$$a^2+c^2=a^2+b^2+c^2+b^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+b^2)}\cos ABC;$$

$$\cos ABC = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+b^2)}}.$$

$$S = \frac{1}{4} AB^2 \cdot BC^2 \cdot \sin^2 ABC = \frac{1}{4} (a^2+b^2)(c^2+b^2) \left(1 - \frac{b^4}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} \right) =$$

$$= ((a^2+b^2)(c^2+b^2) - b^4) \frac{1}{4} = (a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + b^4 - b^4) \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2),$$

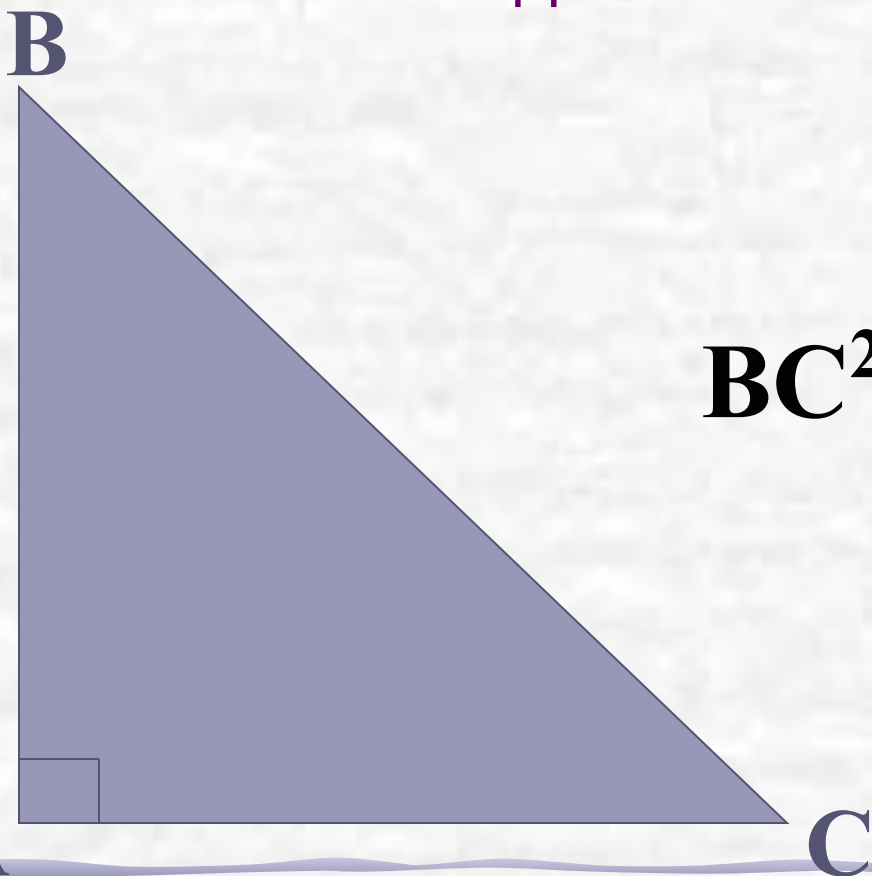
Три формулировки теоремы Пифагора:



- *В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов;*
- *Квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов длин двух его взаимно перпендикулярных сторон;*
- *Квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на любые две взаимно перпендикулярные прямые.*



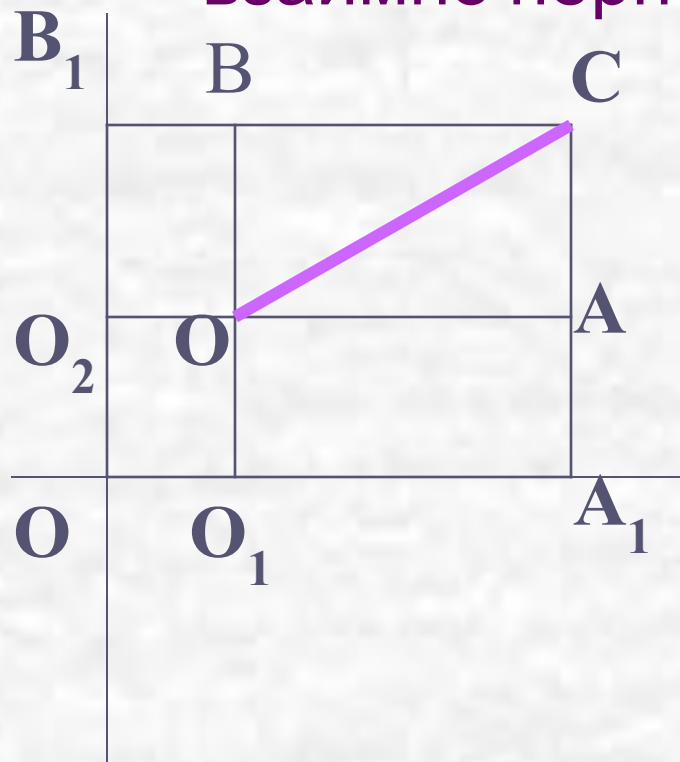
1. В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$



2. Квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов длин двух его взаимно перпендикулярных сторон



$$OC^2 = OA^2 + OB^2$$

$$OA = O_1A_1$$

$$OB = O_2B_1$$

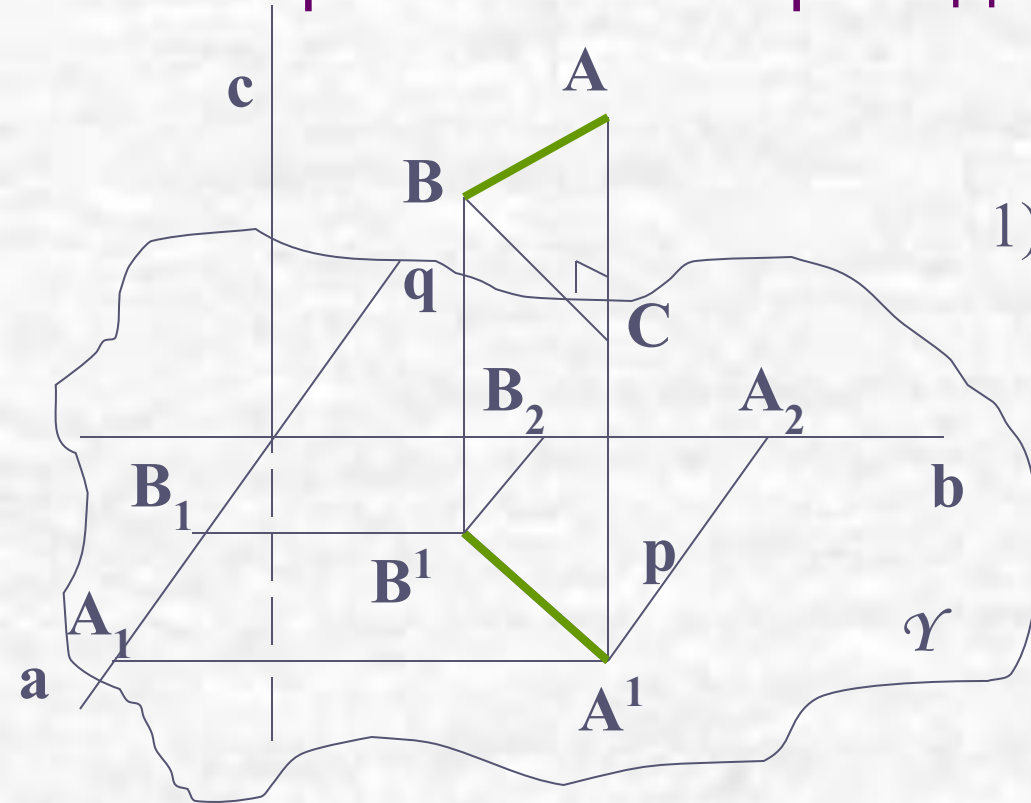


3. Квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на любые три взаимно перпендикулярные прямые

Доказательство:

- 1) Отрезки A^1B^1 и AC – это проекции отрезка AB на две взаимно перпендикулярные прямые к плоскости γ . По теореме Пифагора (3 формул.)

$$AB^2 = A^1B^{12} + AC^2;$$



2) Спроектируем отрезок A^1B^1 на прямую a в отрезок A_1B_1 и на прямую b в отрезок A_2B_2 . По теореме Пифагора

$$A^1B^{12} = A_1B_1^2 + A_2B_2^2;$$

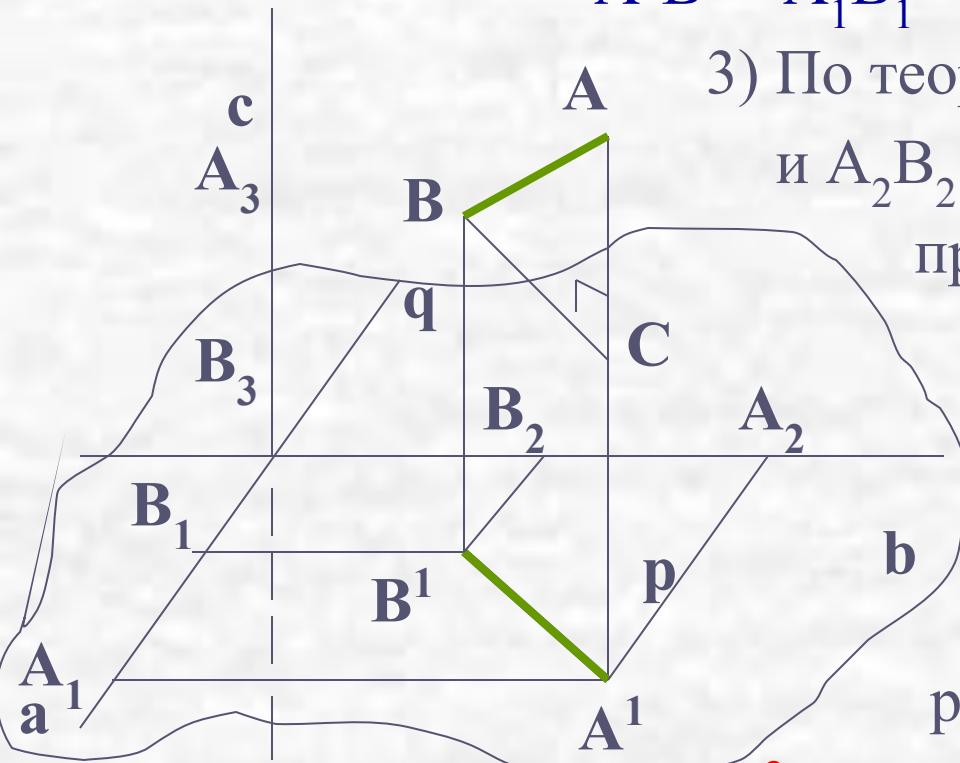
3) По теореме о проекциях отрезки A_1B_1 и A_2B_2 – это проекции отрезка AB на прямые a и b . $A_3B_3 \parallel AC$.

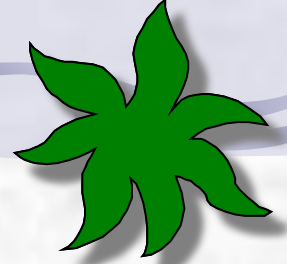
$$A_3B_3 = AC;$$

4) Заменяя длины AC и A^1B^1 длинами проекций A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , получаем

равенство:

$$\underline{AB^2 = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2}$$





***Всегда хочется
быть выше
перед страхом
казаться
неумелым...***

***Будь уверен в
себе***

***все
получится!!!***