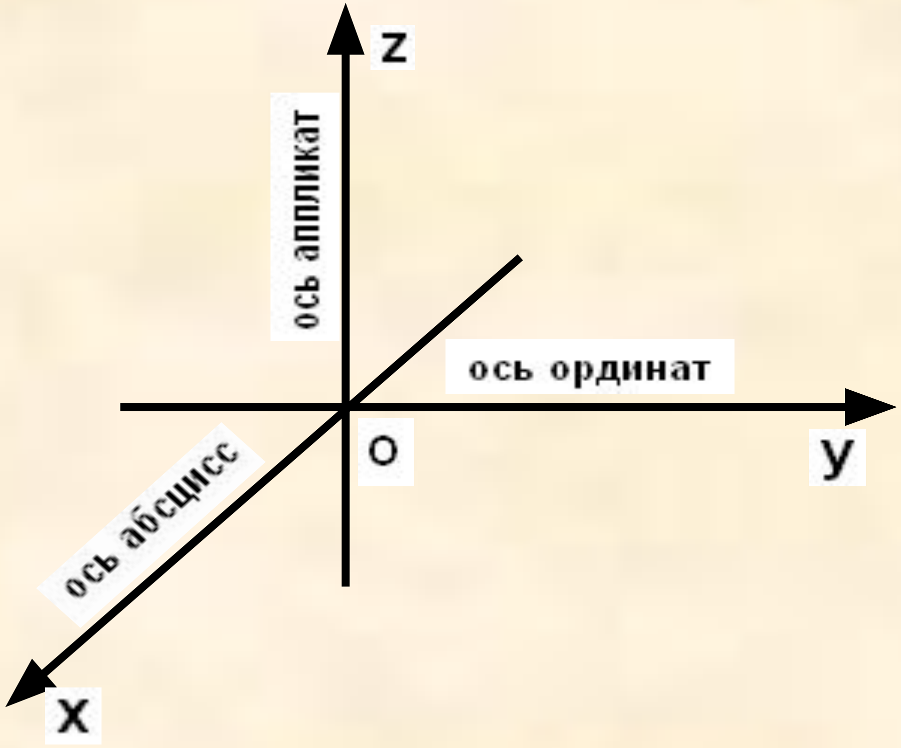
Прямоугольная система координат в пространстве

Прямые с выбранными на них направлениями называются осями координат, а их общая точка – началом координат.

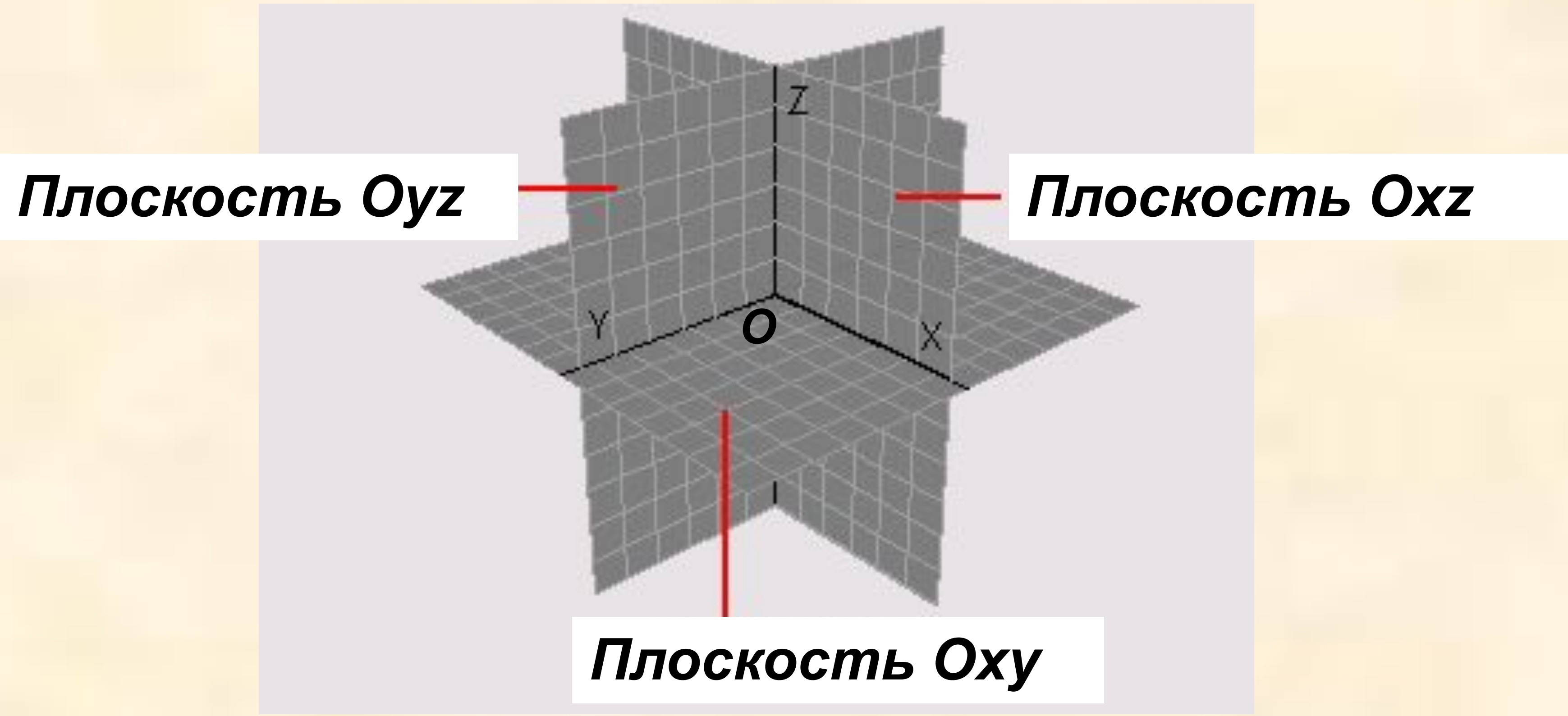
Ox – ось абсцисс,

Oy – ось ординат,

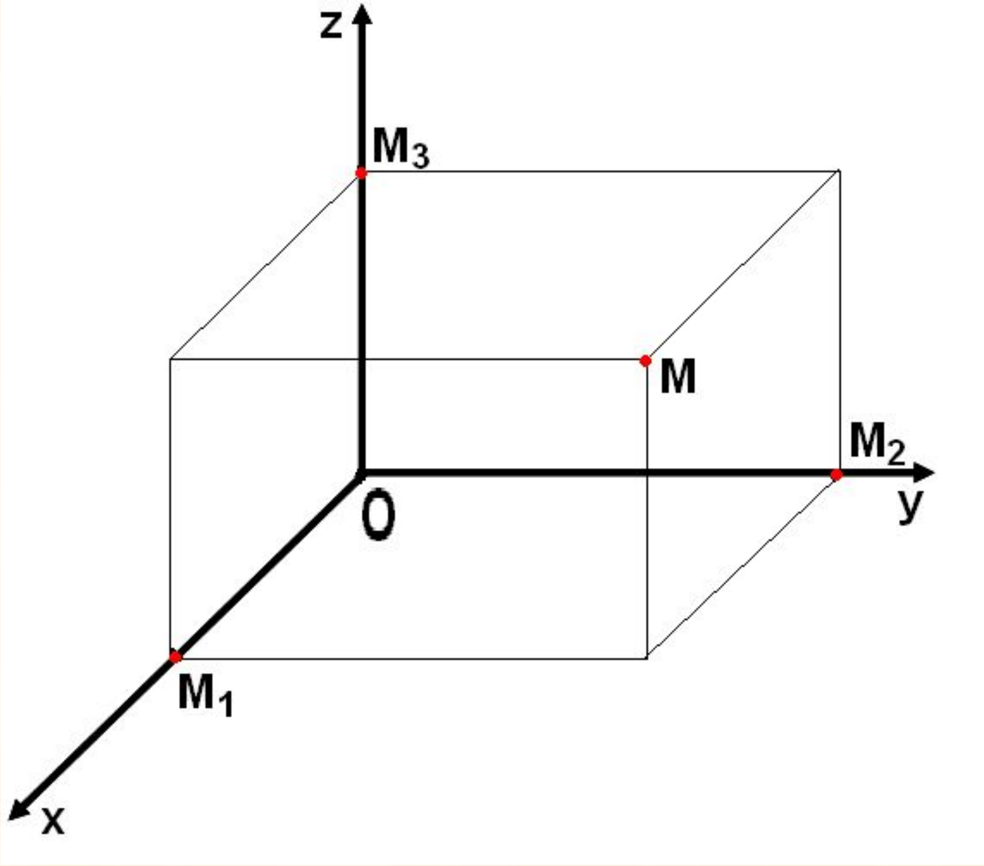
Oz – ось аппликат.

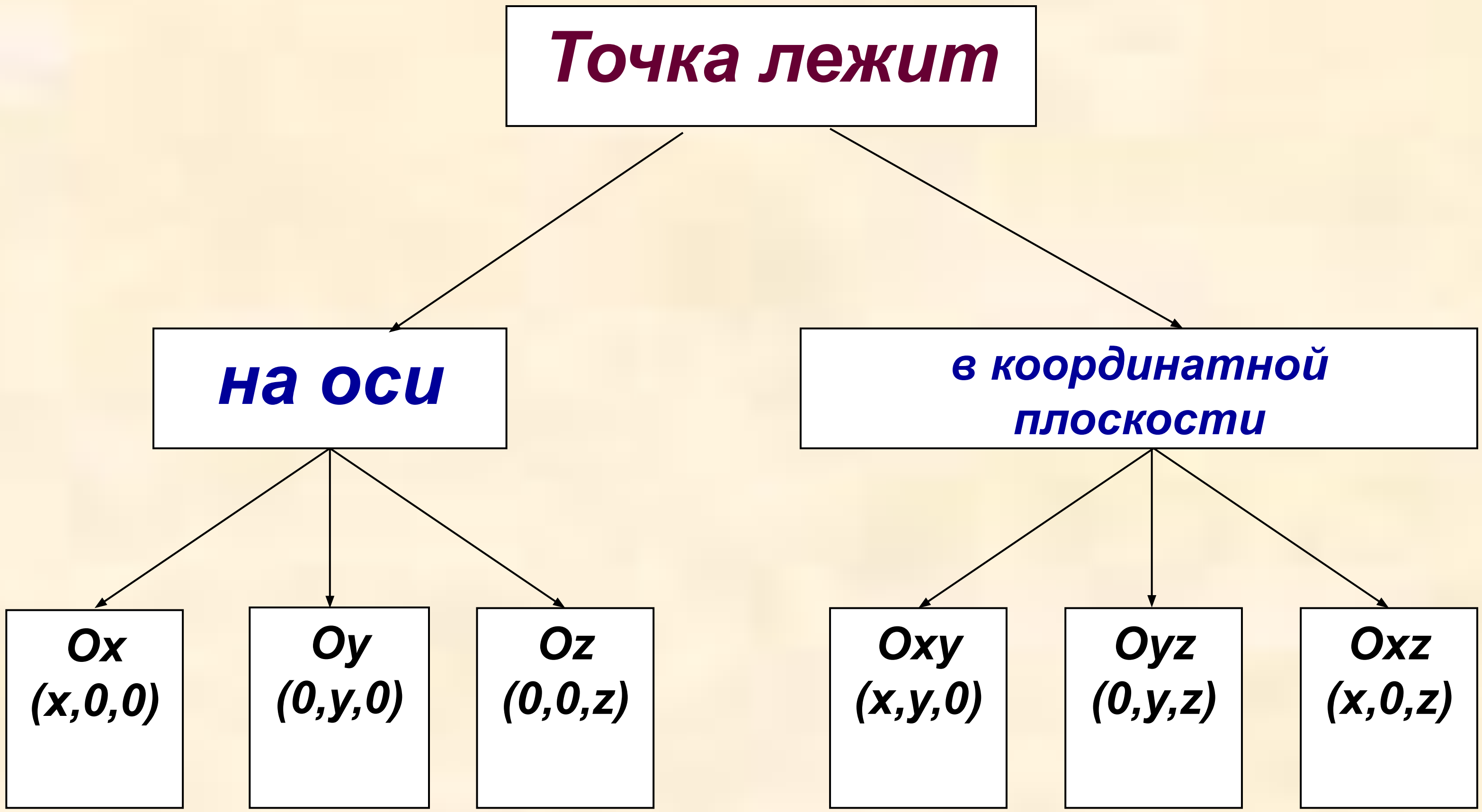


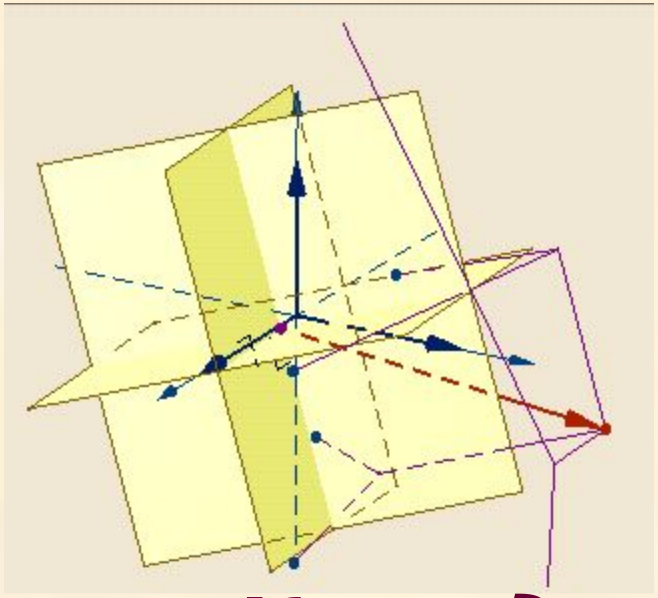
Три плоскости, проходящие через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются координатными плоскостями: Oxy, Oyz, Oxz.

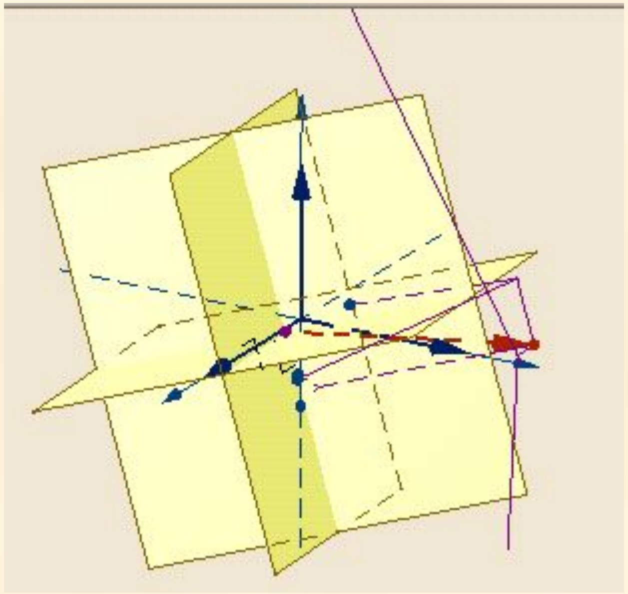


В прямоугольной системе координат каждой точке М пространства сопоставляется тройка чисел – её координаты: М (x, y, z), где x – абсцисса, y – ордината, z - аппликата.

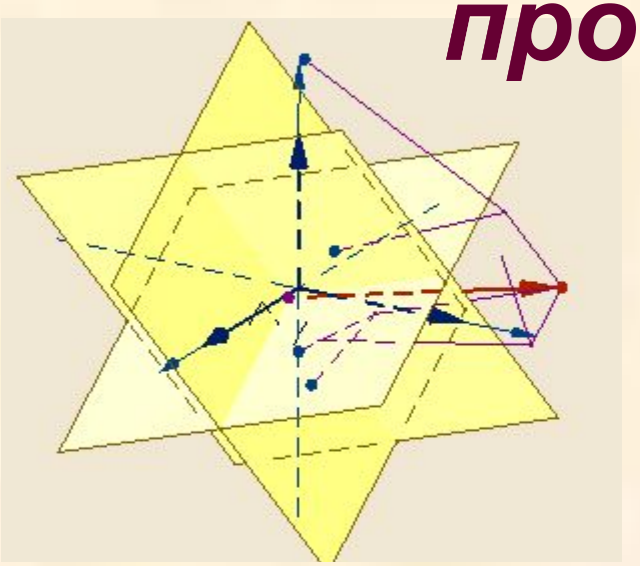


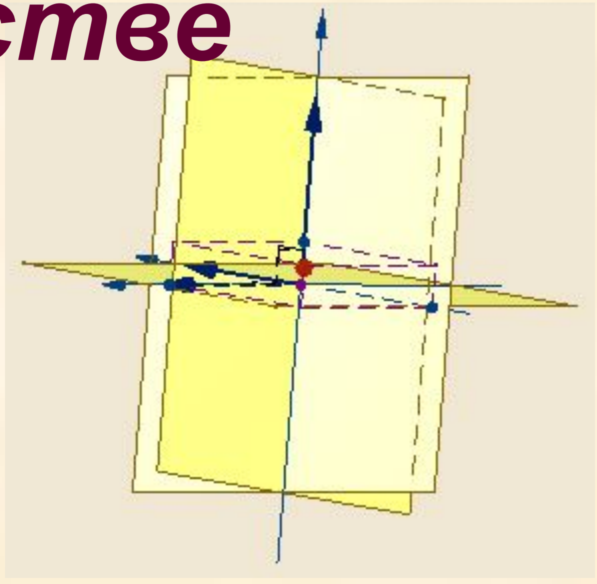

Точка лежит
на оси
в координатной плоскости
Ox (x,0,0)
Oy (0,y,0)
Oz (0,0,z)
Oxy (x,y,0)
Oyz (0,y,z)
Oxz (x,0,z)





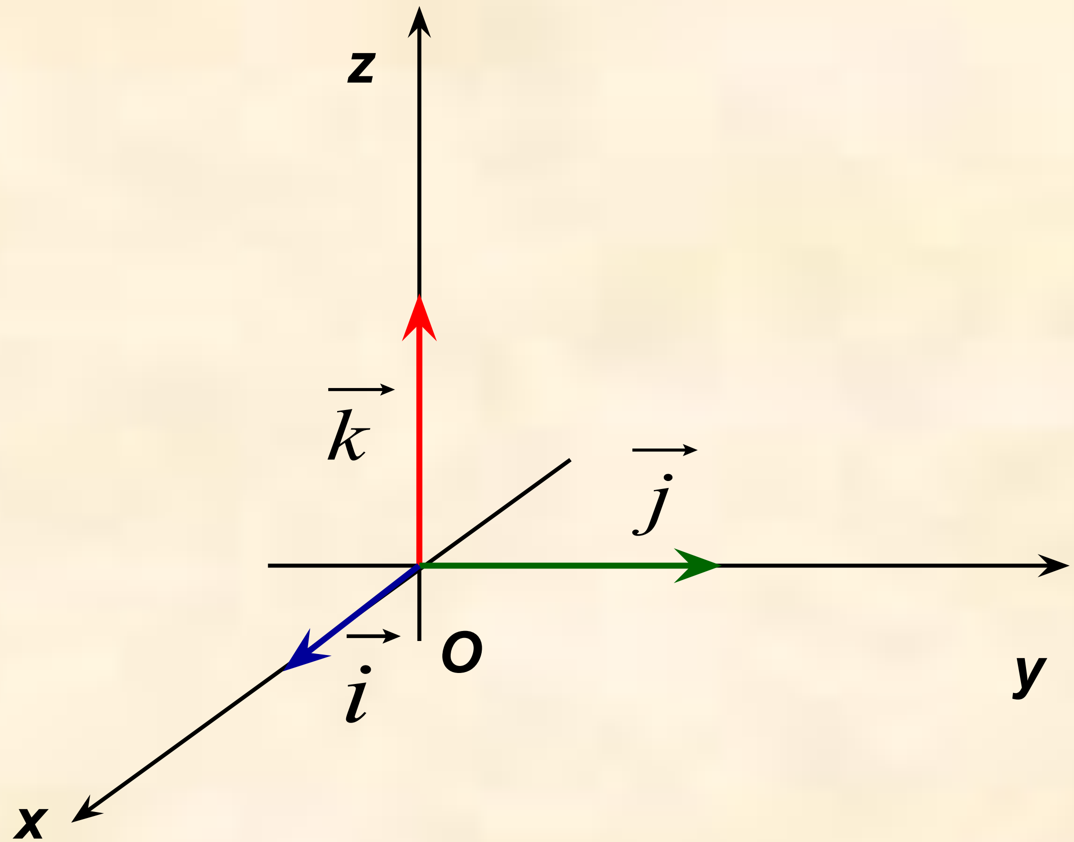
Координаты вектора в пространстве





Единичный вектор – вектор, длина которого равна 1.

i – единичный вектор оси абсцисс, *j* – единичный вектор оси ординат, *k* – единичный вектор оси аппликат.



Любой вектор ā можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде:

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

Нулевой вектор можно представить в виде:

$$\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$$

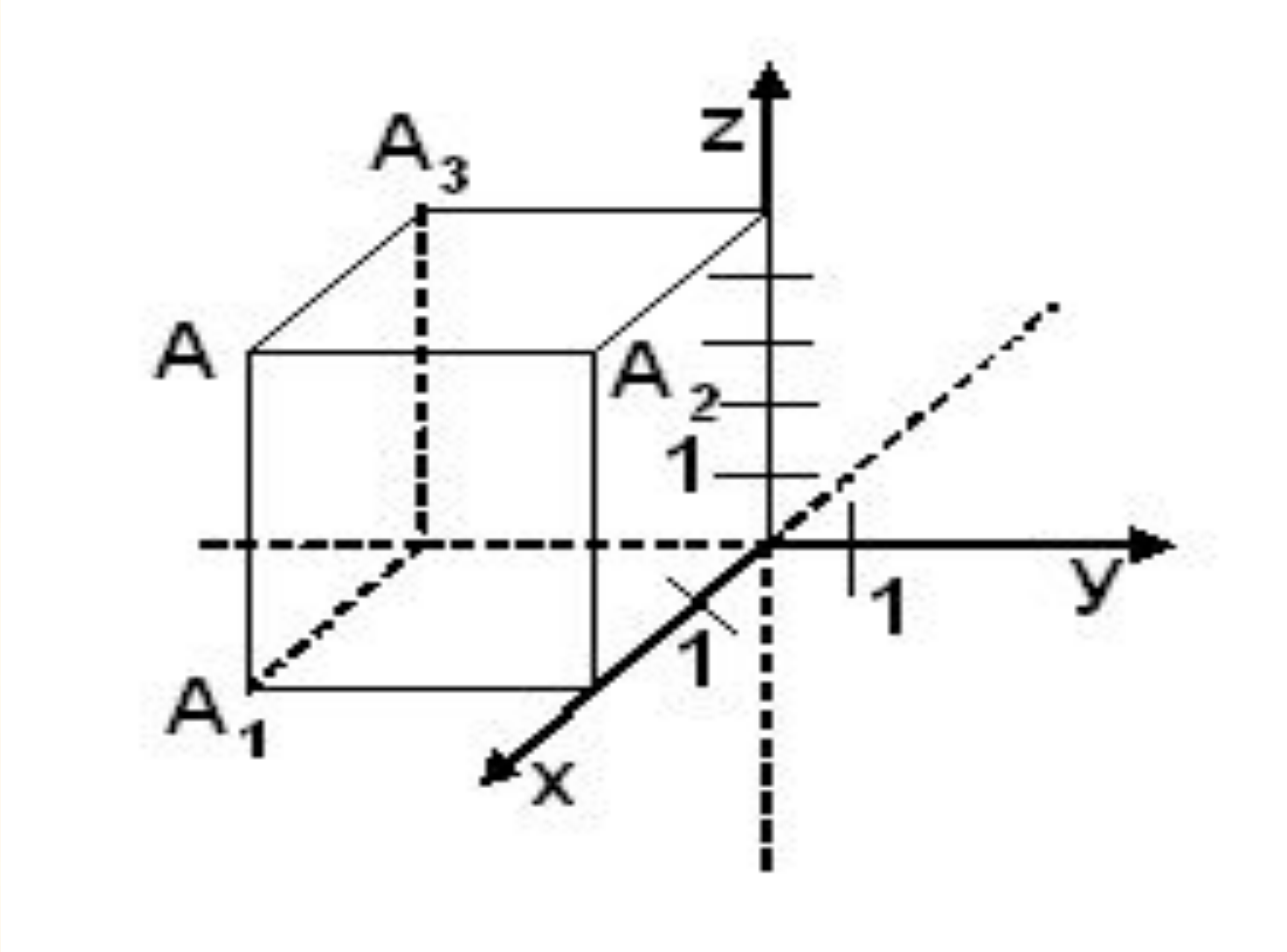
Координаты равных векторов соответственно равны, т.е., если

$\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\} = \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, то

$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2.$

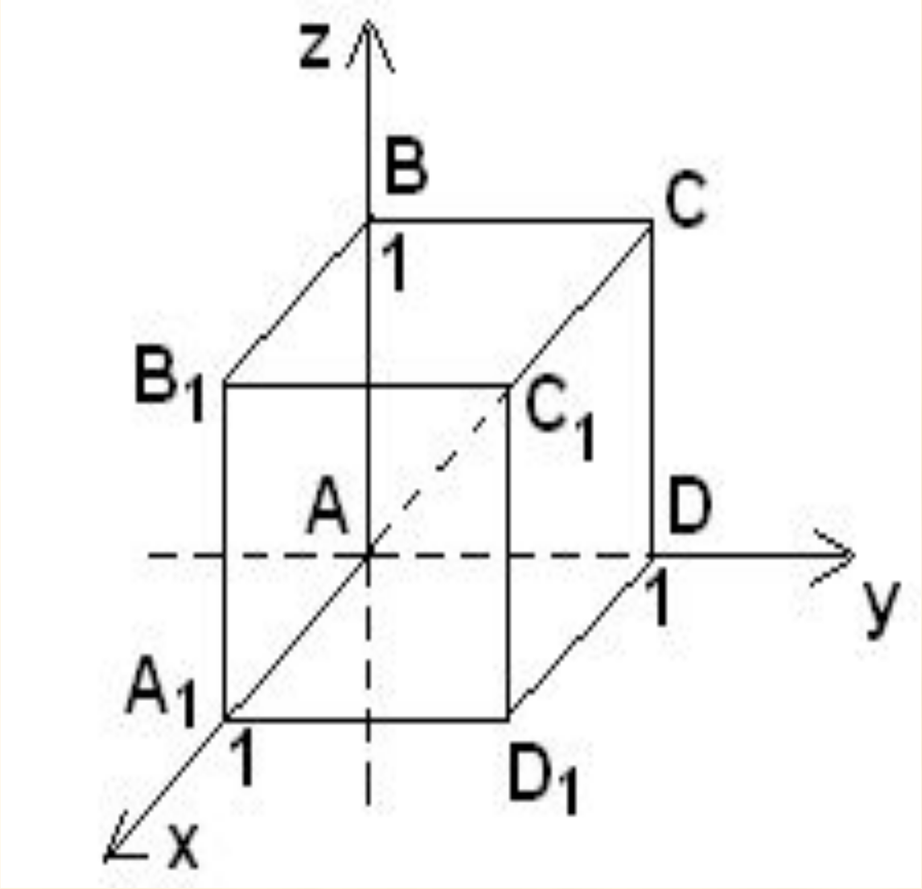
1. Сумма векторов:
   $\vec{a} + \vec{b} = \{ x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2 \}$.
2. Разность векторов:
   $\vec{a} - \vec{b} = \{ x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2 \}$.
3. Произведение вектора на число:
   $\alpha\bar{a} = \{ \alpha x; \alpha y; \alpha z \}$.

Задача №401.



Ответ: A_1 (2;-3;0); A_2 (2;0;5); A_3 (0;-3;5)

Задача №402.



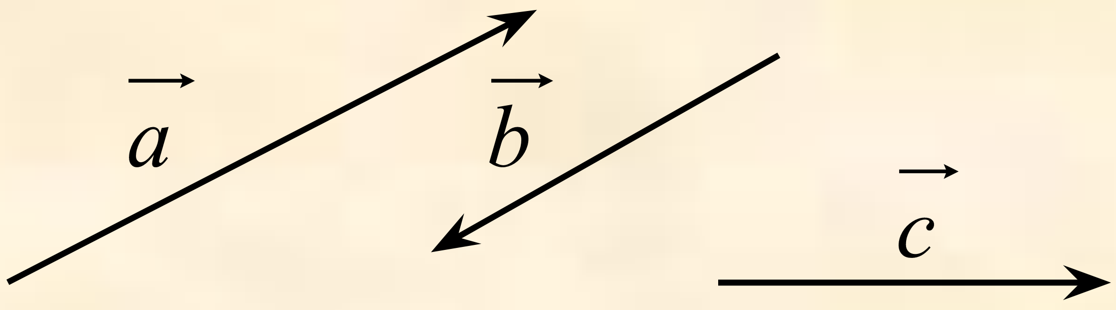
Ответ: C (0;1;1); B_1 (1;0;1); C_1 (1;11); Д $_1$(1;1;0)

Итог урока

На уроке познакомились с прямоугольной системой координат, научились строить точку по заданным ее координатам и находить координаты точки, изображенной в заданной системе координат. Декартова система координат не единственная. К следующему уроку найти в Интернете другие системы координат.

Разложение вектора по координатным векторам

Векторы называются коллинеарными, если они параллельны.



Если векторы $\vec{a}\{ x_1; y_1; z_1 \}$ и $\vec{b}\{ x_2; y_2; z_2 \}$, то:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$$

Самостоятельная работа

1 вариант

№1. Даны векторы $\vec{a}\{2; -4; 3\}$ и $\vec{b}\{-3; 1/2; 1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

№2. Даны векторы $\vec{a}\{1; -2; 0\}$, $\vec{b}\{3; -6; 0\}$, $\vec{c}\{0; -3; 4\}$. Найдите координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - 1/3\vec{b} - \vec{c}$.

№3. Найдите значения m и n, при которых векторы $\vec{a}\{6; n; 1\}$ и $\vec{b}\{m; 16; 2\}$ коллинеарны.

2 вариант

№1. Даны векторы $a\{1; -3; -1\}$ и $b\{-1; 2; 0\}$. Найдите координаты вектора $c = a - b$.

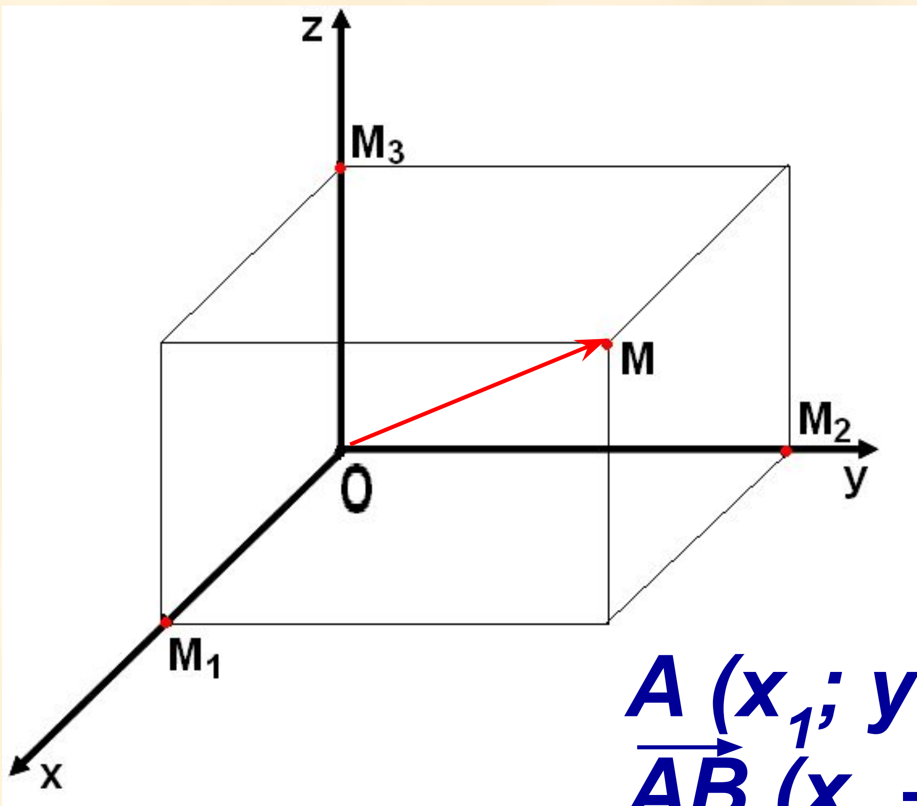
№2. Даны векторы $a\{2; 4; -6\}$, $b\{-3; 1; 0\}$, $c\{3; 0; -1\}$. Найдите координаты вектора $p = -1/2a + 2b - c$.

№3. Найдите значения m и n, при которых векторы $a\{-4; m; 2\}$ и $b\{2; -6; n\}$ коллинеарны.

Связь между координатами векторов и координатами точек

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало – с началом координат, называется радиус-вектором данной точки.

Координаты любой точки равны соответствующим координатам её радус-вектора.



$M\ (x;\ y;\ z)$

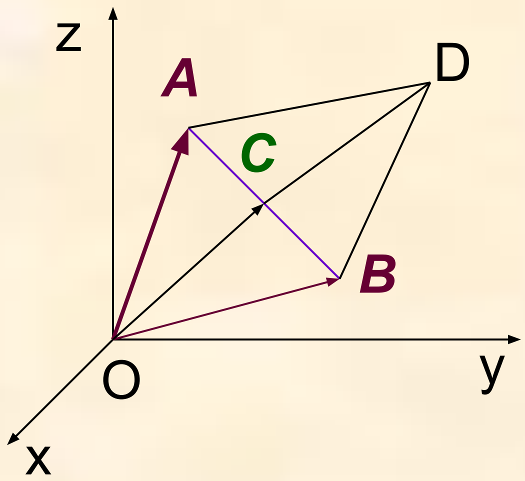
$\overrightarrow{OM}\ (x;\ y;\ z)$

$A\ (x_1;\ y_1;\ z_1),\ B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$

$\overrightarrow{AB}\ (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$

Простейшие задачи в координатах

1. Координаты середины отрезка.



$A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$,
$C\ (x;\ y;\ z)$ – середина AB.

$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$, тогда

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),\ z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

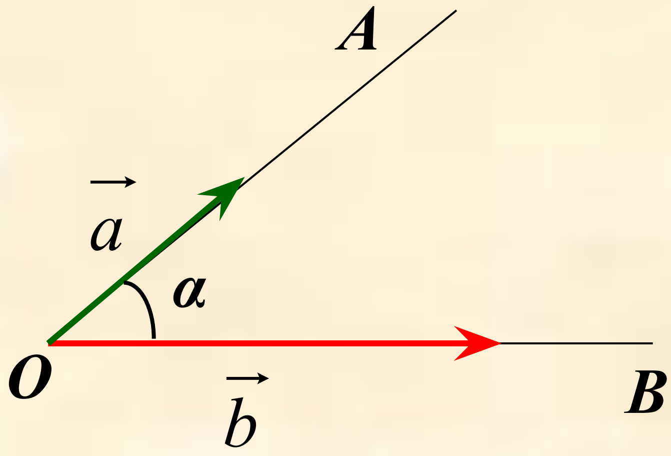
2. Вычисление длины вектора по его координатам:

если $\vec{a}\ \{ x;\ y;\ z \}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3. Расстояние между двумя точками:

$$|\overrightarrow{AB}| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Угол между векторами



$$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = \alpha$$

- ***Если a || b и a и b сонаправлены, то α = 0°.***
- ***Если a || b и a и b противоположно направлены, то α = 180°.***
- ***Если a ⊥ b, то α = 90°.***

Скалярное произведение векторов

$$1)\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

$$2)\ \vec{a}\{x_1;\,y_1;\,z_1\}\ \text{и}\ \vec{b}\{x_2;\,y_2;\,z_2\}$$

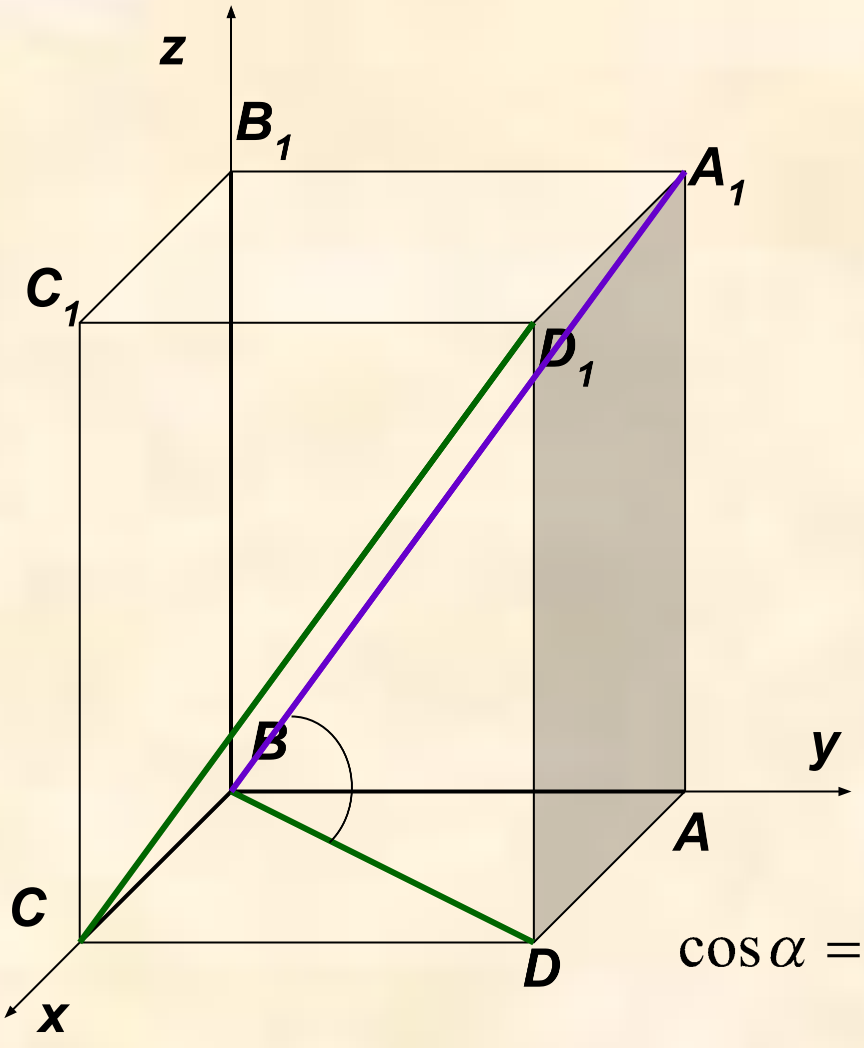
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$$3)\ \vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$$

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

№ 467



Решение:

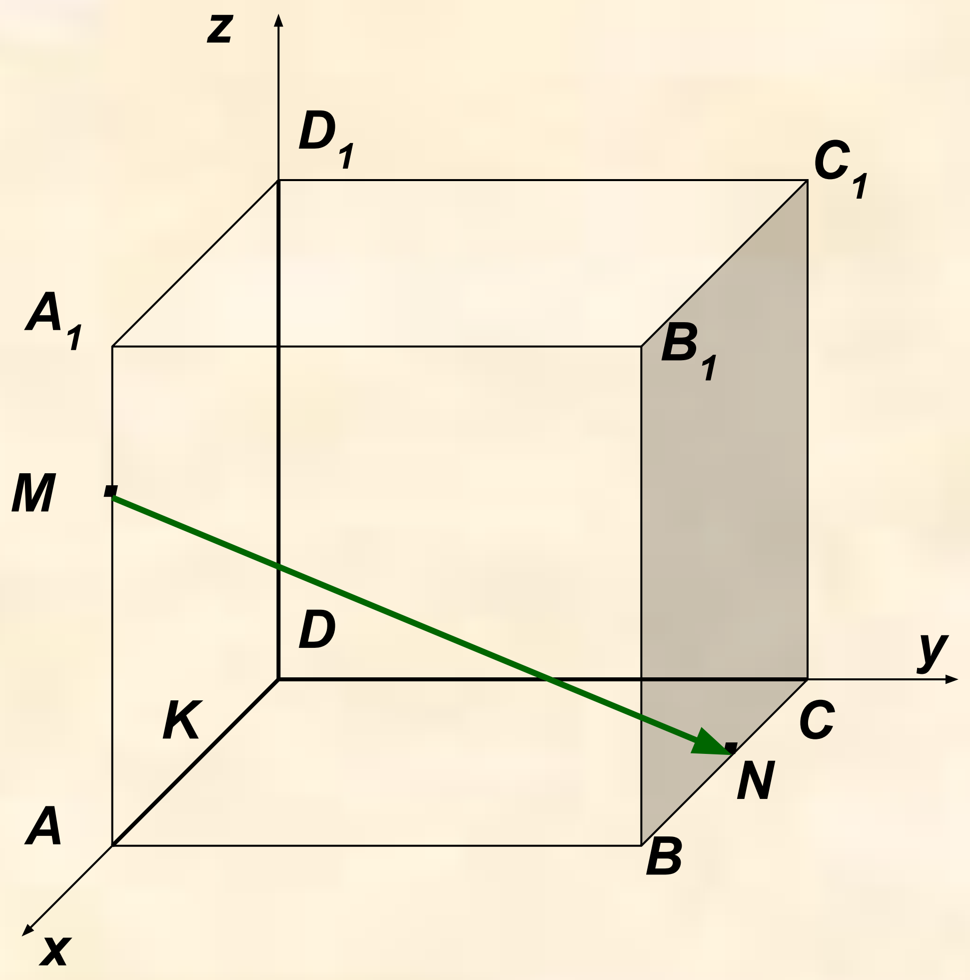
Введём систему координат: $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(1;\ 0;\ 0)$, $A(0;\ 1;\ 0)$, $D(1;\ 1;0)$, $B_1(0;\ 0;\ 2)$, $C_1(1;\ 0;\ 2)$, $D_1(1;\ 1;\ 2)$, $A_1(0;\ 1;\ 2)$. Тогда,

$\overrightarrow{BD}\{1;\ 1;\ 0\}$,

$\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{BA_1}\{0;\ 1;\ 2\}$.

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

№ 466



№ 469 (а)