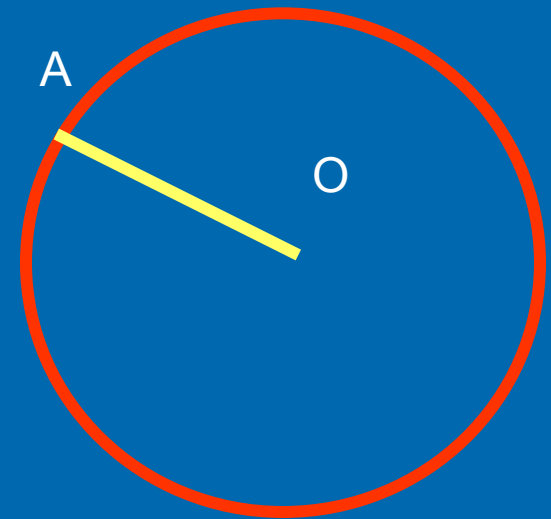


ОКРУЖНОСТЬ

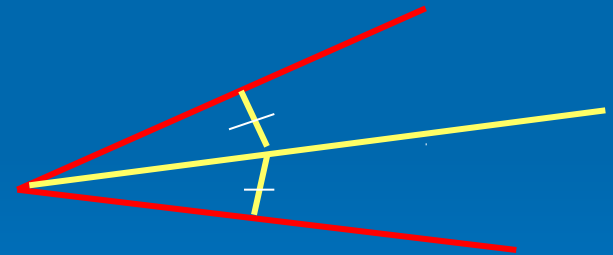
Окружностью называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся от данной точки на данном расстоянии.

Данная точка **O** называется **центром окружности**, а отрезок **OA**, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности — **радиусом окружности**.



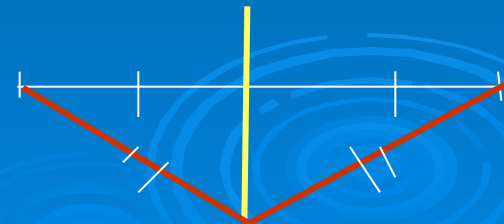
Свойство биссектрисы.

Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от сторон угла. Верно и обратно.



Свойство серединного перпендикуляра.

Каждая точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов его отрезка. Верно и обратно.

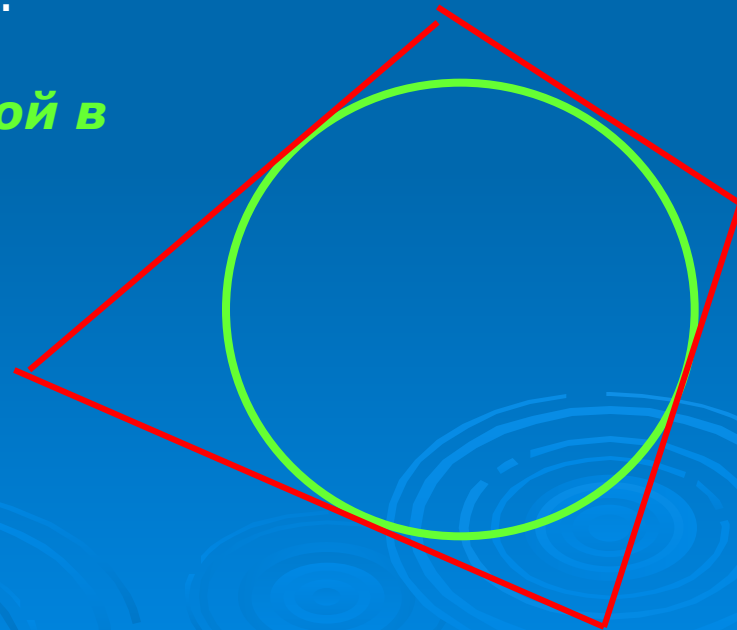
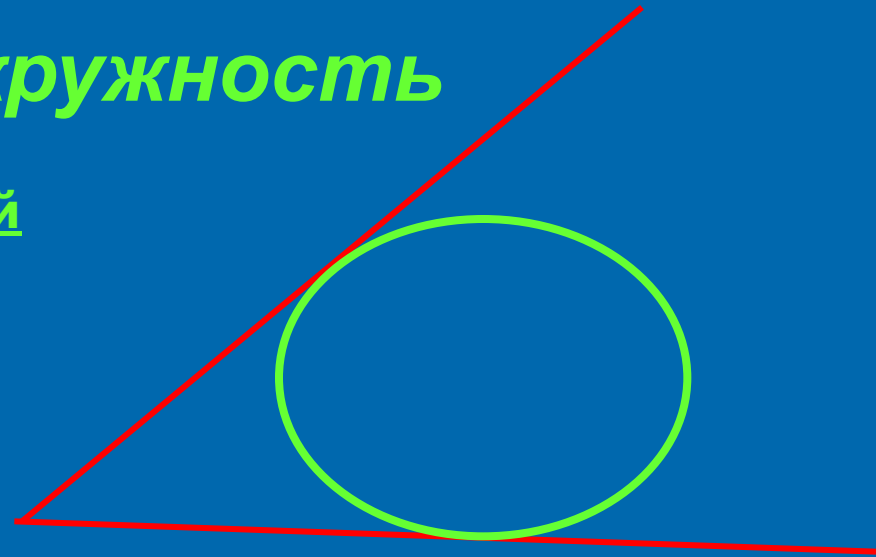


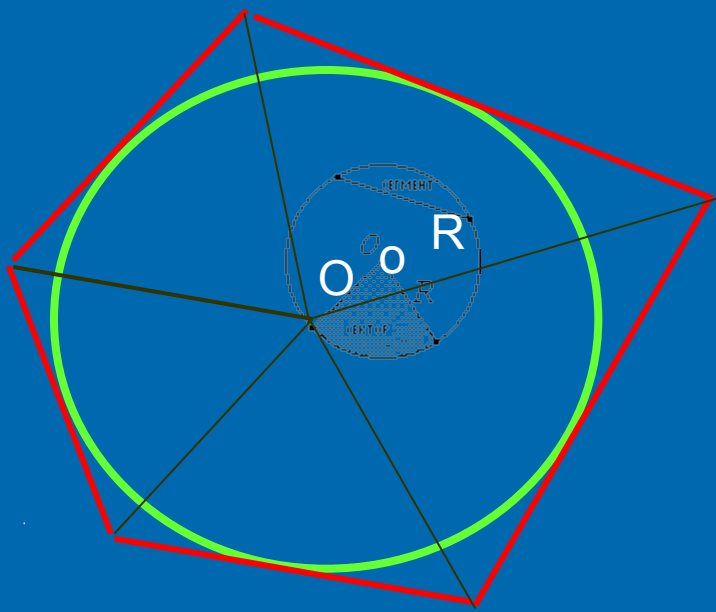
Вписанная окружность

Окружность называется **вписанной**
в угол,
если она лежит внутри угла и
касается его сторон.

Центр окружности, вписанной в
угол,
лежит на биссектрисе этого угла.

Окружность называется ***вписанной в***
выпуклый многоугольник,
если она лежит внутри данного
многоугольника и касается всех
прямых,
проходящих через его стороны.





Если в данный выпуклый многоугольник можно вписать окружность, то биссектрисы всех углов данного многоугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной окружности.

Сам многоугольник в таком случае называется описанным около данной окружности. Таким образом, в выпуклый многоугольник можно вписать не более одной окружности.

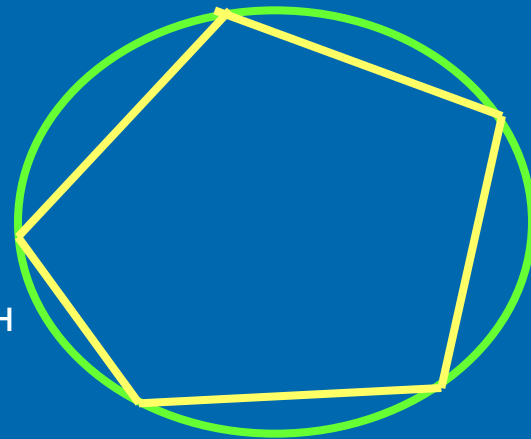
Для произвольного многоугольника невозможно вписать в него и описать около него окружность.

Для треугольника это всегда возможно.

Описанная окружность

Окружность называется описанной около многоугольника, если она проходит через все его вершины.

Центр описанной окружности равноудалён от вершин многоугольника и лежит на серединных перпендикулярах к его сторонам

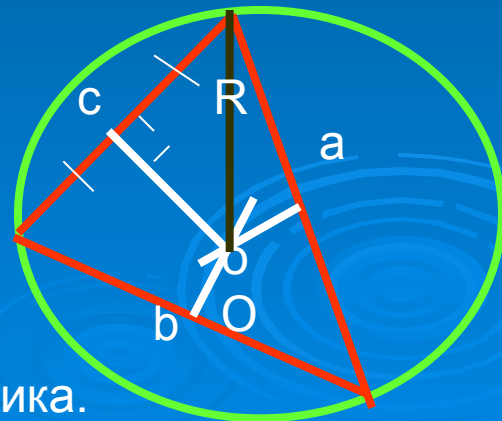


Вокруг любого треугольника можно описать окружность, и только одну.

Центр описанной окружности около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров, проведённых к серединам сторон треугольника

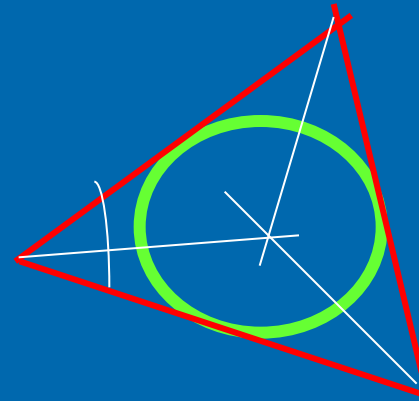
$$R = \frac{abc}{4S}$$

S - площадь треугольника.



Окружность и треугольники

Окружность называется **вписанной в треугольник**, если она касается всех трех его сторон, а её центр находится внутри окружности



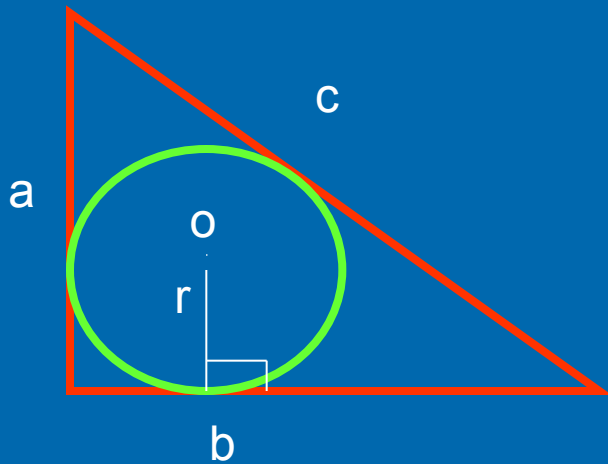
Центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника.

В любой треугольник можно вписать окружность, и только одну.

Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади треугольника и его полупериметра

$$r = \frac{S}{p}$$

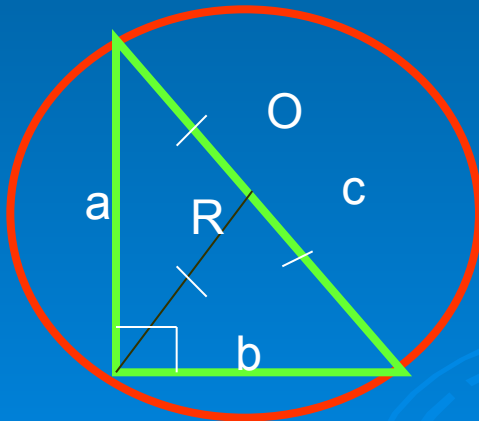
Окружность и прямоугольный треугольник



Радиус вписанной окружности

$$r = \frac{ab}{a+b+c} \quad r = \frac{a+b-c}{2}$$

Центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы,

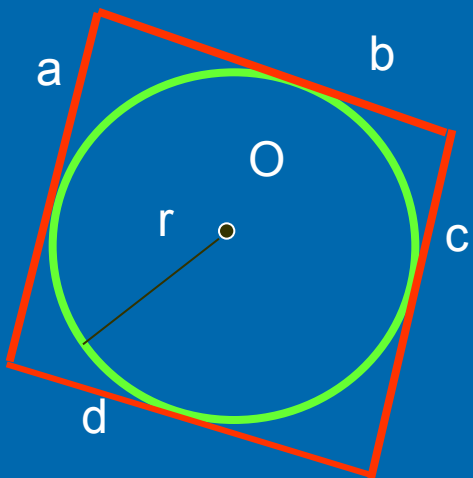


а радиус равен

– половине гипотенузы

- медиане, проведённой к гипотенузе

Вписанная окружность в четырёхугольник



В четырёхугольник можно вписать окружность, если суммы противоположных сторон равны т. е. $a + c = b + d$

Верно и обратно

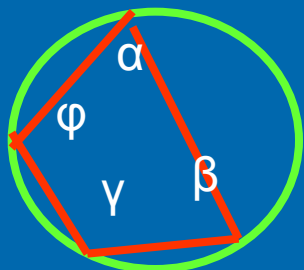
Если окружность вписана в четырёхугольник, то суммы противоположных сторон равны $a + c = b + d$

Площадь:

$$S = pr, \text{ где } p = \frac{a + b + c + d}{2}$$

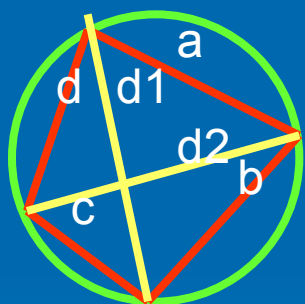
r – радиус вписанной окружности

Описанная окружность около четырёхугольника



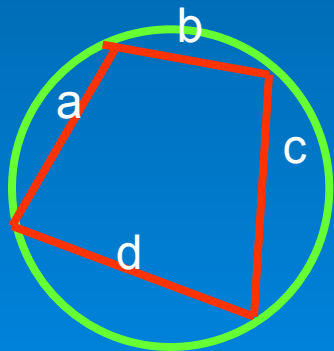
Около четырёхугольника можно описать окружность, если сумма противоположных углов равна 180° : $\alpha + \gamma = \beta + \varphi$

Если четырёхугольник вписан в окружность, то суммы противоположных углов равна 180° .



ТЕОРЕМА ПТОЛОМЕЯ

Сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей: $ac + bd = d1 d2$

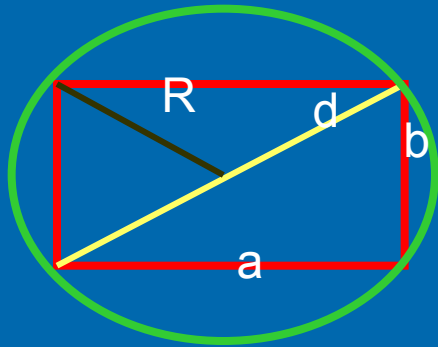


ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где p – полупериметр четырёхугольника

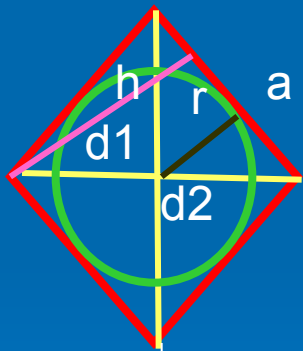
Параллелограмм, ромб, трапеция



Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником;

Радиус описанной окружности $R = \frac{d}{2}$

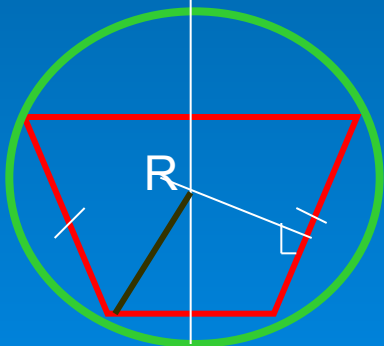
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

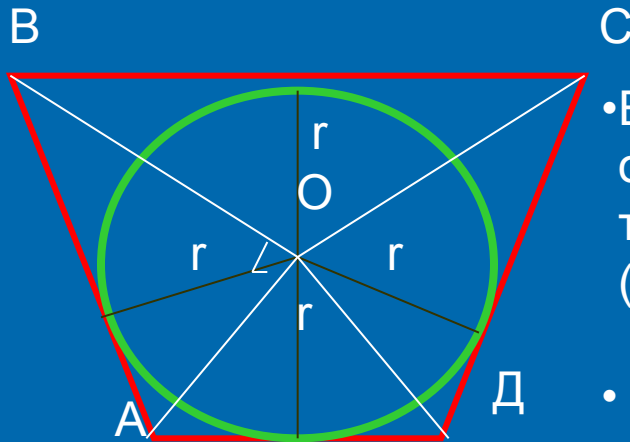
Радиус r вписанной окружности удовлетворяет соотношениям

$$S = 2ar \quad r = \frac{h}{2} \quad r = \frac{d_1 d_2}{4a}$$



Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция — равнобедренная; Центр окружности лежит на пересечении оси симметрии трапеции с серединным перпендикуляром к боковой стороне

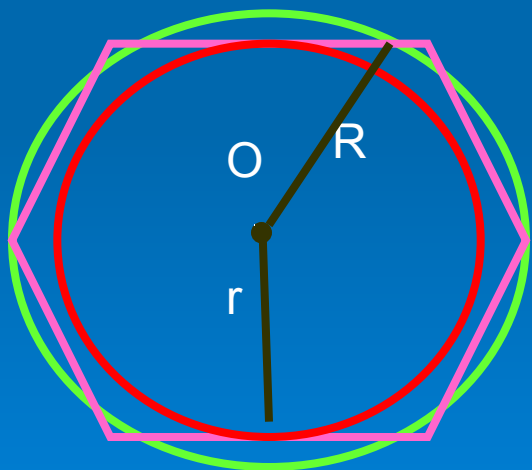
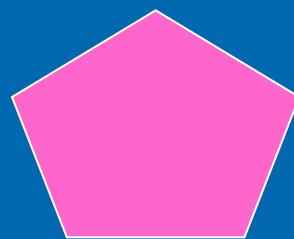
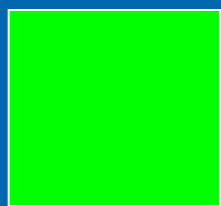
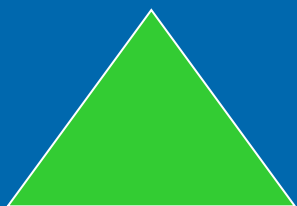
трапеция



- Если трапеция ABCD описана около окружности, то треугольники AOB и DOC прямоугольные (угол O – прямой); точка O – центр вписанной окружности.
- Высоты этих треугольников опущены на гипотенузы, равны радиусу вписанной окружности,
- а высота трапеции равна диаметру вписанной окружности.

Окружность и правильные многоугольники

Виды правильных многоугольников

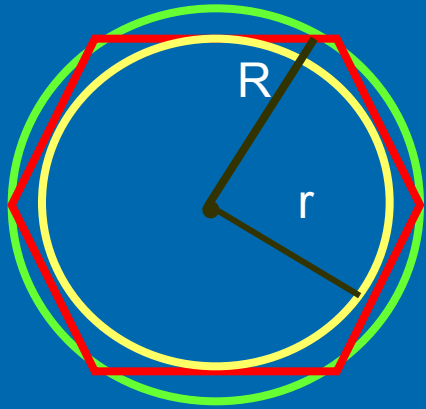


Свойства правильного многоугольника.

Правильный многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности, при этом **центры** этих окружностей **совпадают**

Центр правильного многоугольника совпадает с центрами вписанной и описанной окружностей.

Основные формулы для правильных многоугольников



a_n – сторона многоугольника;
 R – радиус описанной окружности;
 r – радиус вписанной окружности

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

