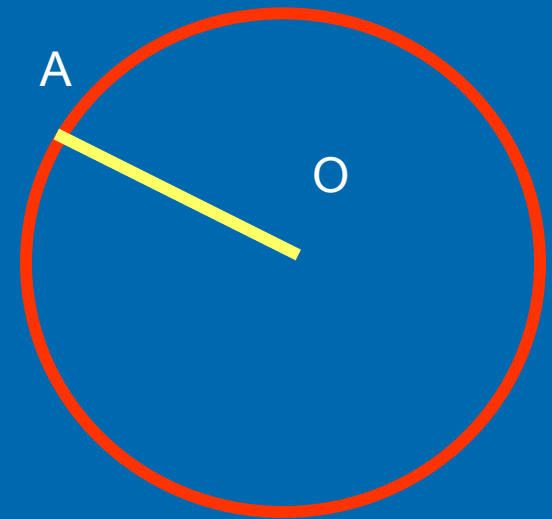




# ОКРУЖНОСТЬ

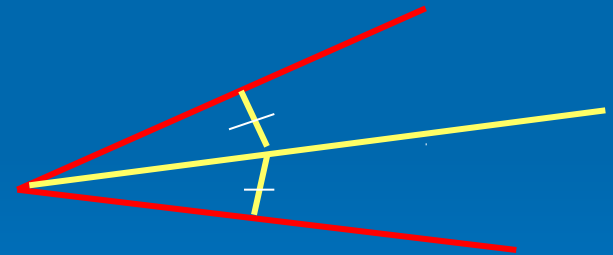
**Окружностью** называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся от данной точки на данном расстоянии.

Данная точка **O** называется **центром окружности**, а отрезок **OA**, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности — **радиусом окружности**.



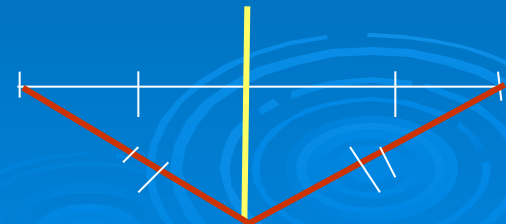
## Свойство биссектрисы.

Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от сторон угла. Верно и обратно.



## Свойство серединного перпендикуляра.

Каждая точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов его отрезка. Верно и обратно.

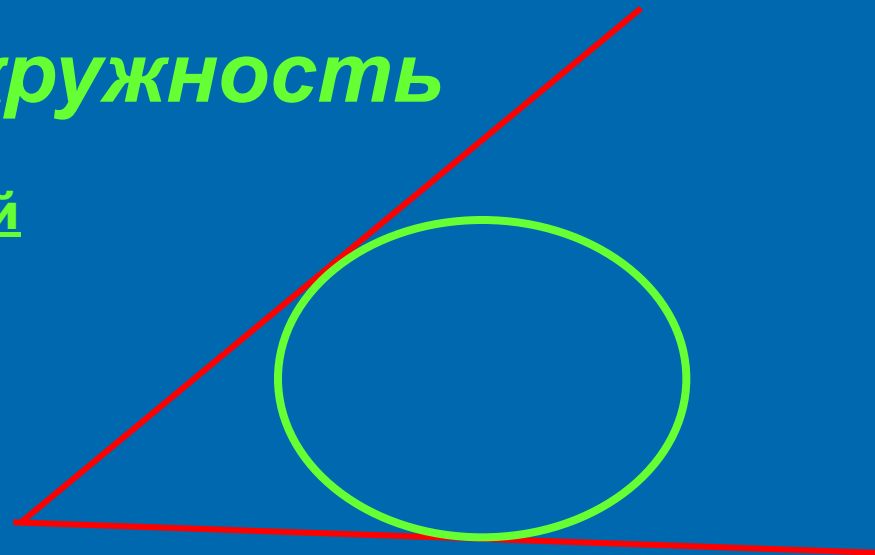


# Вписанная окружность

Окружность называется **вписанной**  
**в угол**,

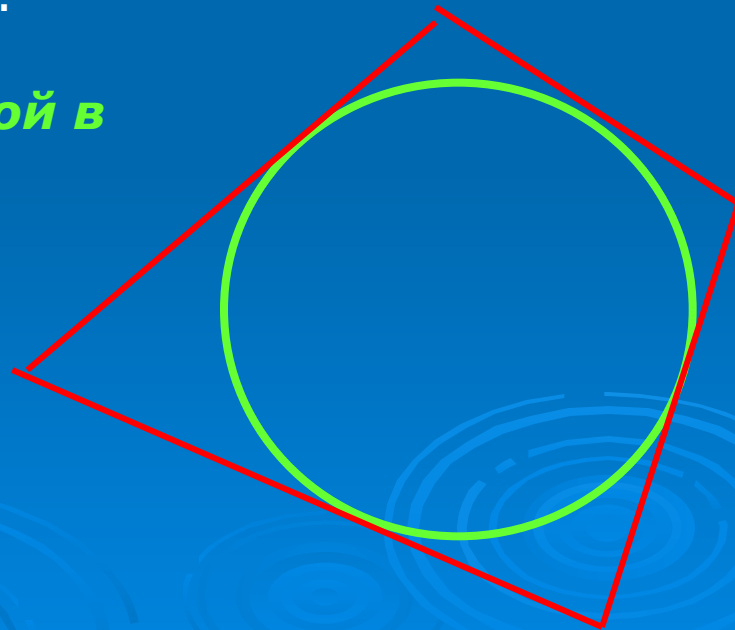
если она лежит внутри угла и  
касается его сторон.

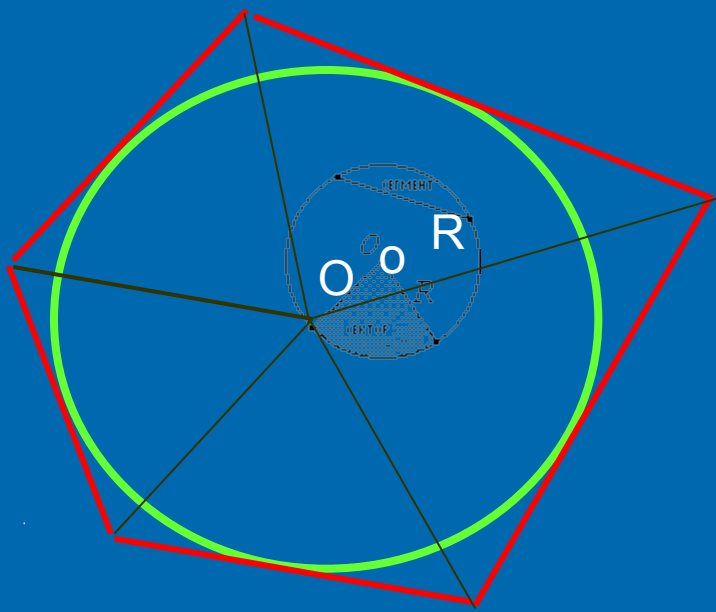
Центр окружности, вписанной в  
угол,  
лежит на биссектрисе этого угла.



Окружность называется ***вписанной в***  
***выпуклый многоугольник***,

если она лежит внутри данного  
многоугольника и касается всех  
прямых,  
проходящих через его стороны.





Если в данный выпуклый многоугольник можно вписать окружность, то биссектрисы всех углов данного многоугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной окружности.

Сам многоугольник в таком случае называется описанным около данной окружности. Таким образом, в выпуклый многоугольник можно вписать не более одной окружности.

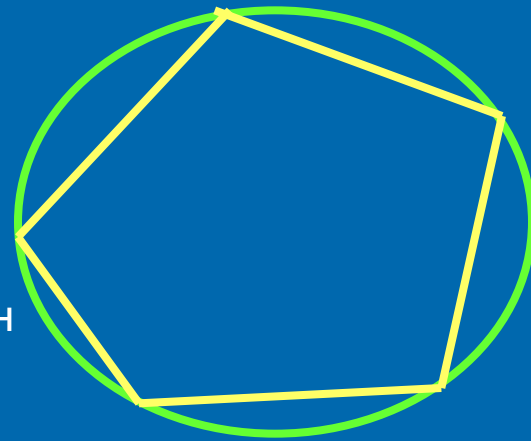
Для произвольного многоугольника невозможно вписать в него и описать около него окружность.

**Для треугольника это всегда возможно.**

# Описанная окружность

Окружность называется описанной около многоугольника, если она проходит через все его вершины.

Центр описанной окружности равноудалён от вершин многоугольника и лежит на серединных перпендикулярах к его сторонам

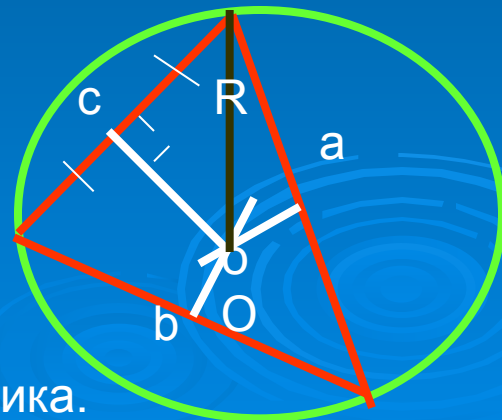


**Вокруг любого треугольника можно описать окружность, и только одну.**

Центр описанной окружности около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров, проведённых к серединам сторон треугольника

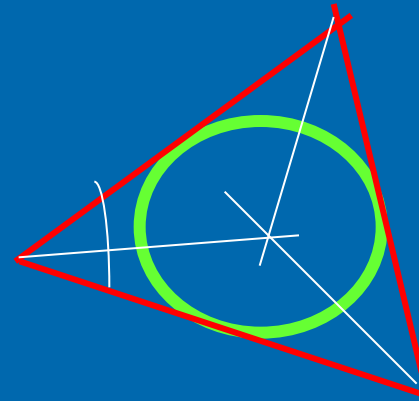
$$R = \frac{abc}{4S}$$

$S$  - площадь треугольника.



# Окружность и треугольники

Окружность называется **вписанной в треугольник**, если она касается всех трех его сторон, а её центр находится внутри окружности



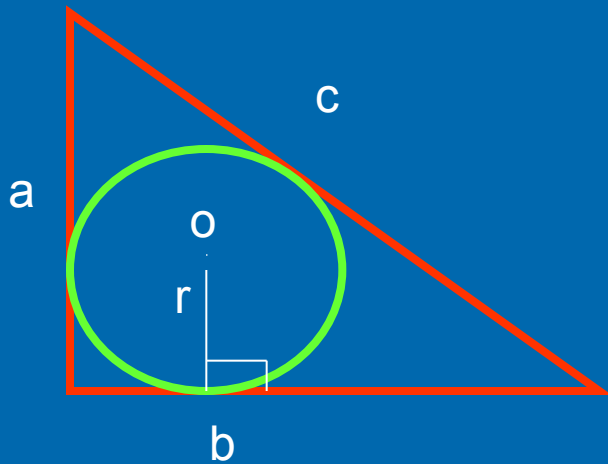
Центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника.

В любой треугольник можно вписать окружность, и только одну.

Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади треугольника и его полупериметра

$$r = \frac{S}{p}$$

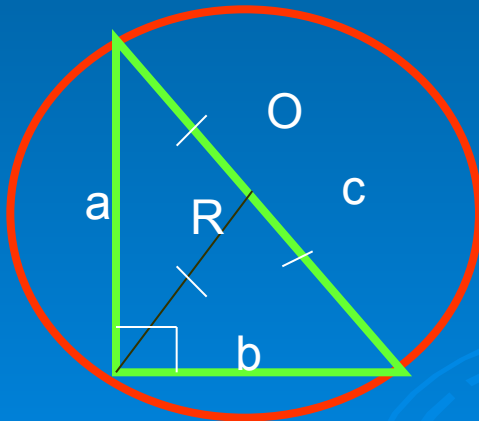
# Окружность и прямоугольный треугольник



Радиус вписанной окружности

$$r = \frac{ab}{a+b+c} \quad r = \frac{a+b-c}{2}$$

Центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы,

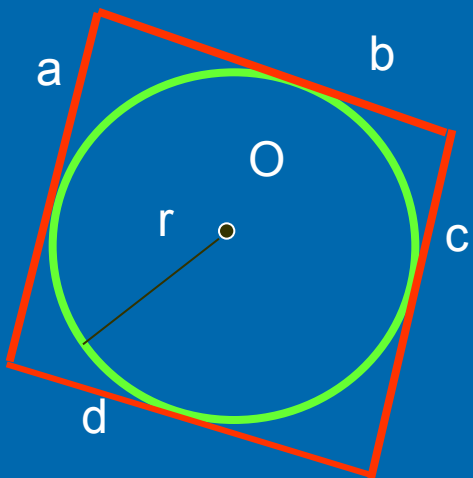


а радиус равен

– половине гипотенузы

- медиане, проведённой к гипотенузе

# Вписанная окружность в четырёхугольник



В четырёхугольник можно вписать окружность, если суммы противоположных сторон равны т. е.  $a + c = b + d$

Верно и обратно

Если окружность вписана в четырёхугольник, то суммы противоположных сторон равны  $a + c = b + d$

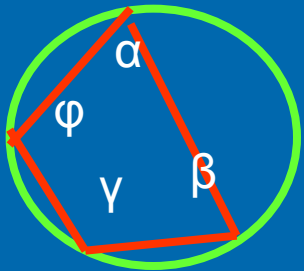
Площадь:

$$S = pr, \text{ где } p = \frac{a + b + c + d}{2}$$

$r$  – радиус вписанной окружности

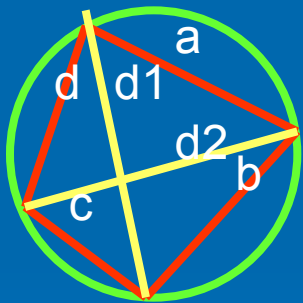


# Описанная окружность около четырёхугольника



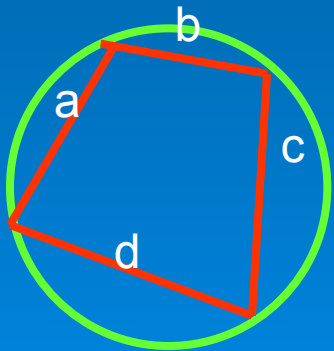
Около четырёхугольника можно описать окружность, если сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ :  $\alpha + \gamma = \beta + \phi$

Если четырёхугольник вписан в окружность, то суммы противоположных углов равна  $180^\circ$ .



## ТЕОРЕМА ПТОЛОМЕЯ

Сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей:  $ac + bd = d1 d2$

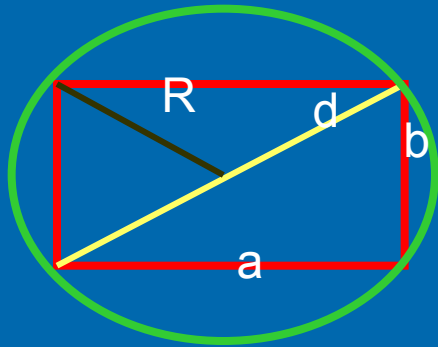


## ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где  $p$  – полупериметр четырёхугольника

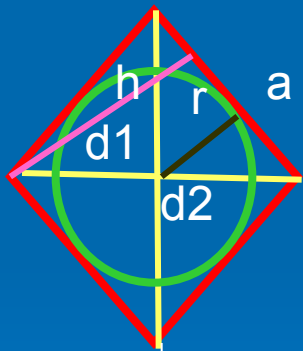
# Параллелограмм, ромб, трапеция



Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником;

**Радиус описанной окружности**  $R = \frac{d}{2}$

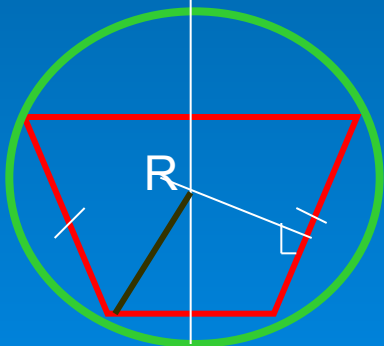
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

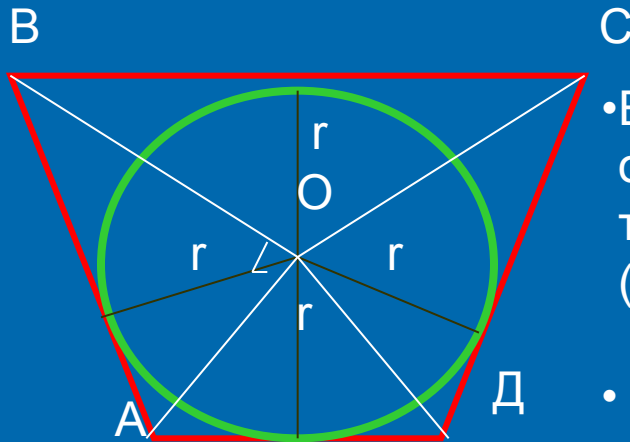
Радиус  $r$  вписанной окружности удовлетворяет соотношениям

$$S = 2ar \quad r = \frac{h}{2} \quad r = \frac{d_1 d_2}{4a}$$



Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция — равнобедренная; Центр окружности лежит на пересечении оси симметрии трапеции с серединным перпендикуляром к боковой стороне

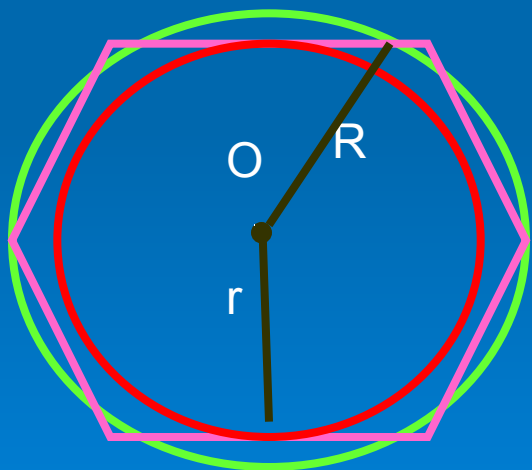
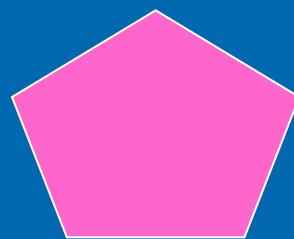
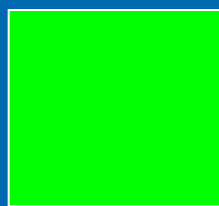
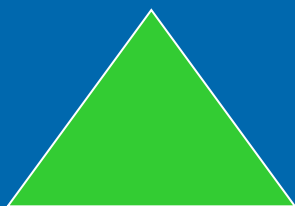
# трапеция



- Если трапеция ABCD описана около окружности, то треугольники AOB и DOC прямоугольные (угол O – прямой); точка O – центр вписанной окружности.
- Высоты этих треугольников опущены на гипотенузы, равны радиусу вписанной окружности,
- а высота трапеции равна диаметру вписанной окружности.

# Окружность и правильные многоугольники

## Виды правильных многоугольников

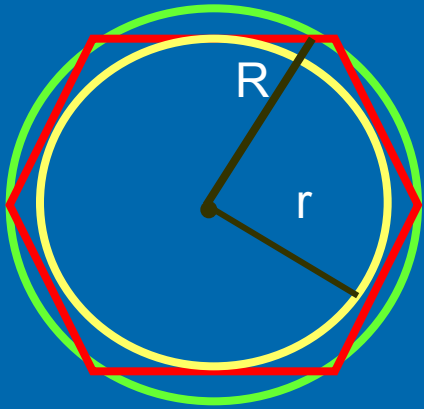


### Свойства правильного многоугольника.

Правильный многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности, при этом **центры** этих окружностей **совпадают**

Центр правильного многоугольника совпадает с центрами вписанной и описанной окружностей.

# Основные формулы для правильных многоугольников



$a_n$  – сторона многоугольника;  
 $R$  – радиус описанной окружности;  
 $r$  – радиус вписанной окружности

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

