

# Расстояние между скрещивающимися прямыми

Автор Сизова Н. В.

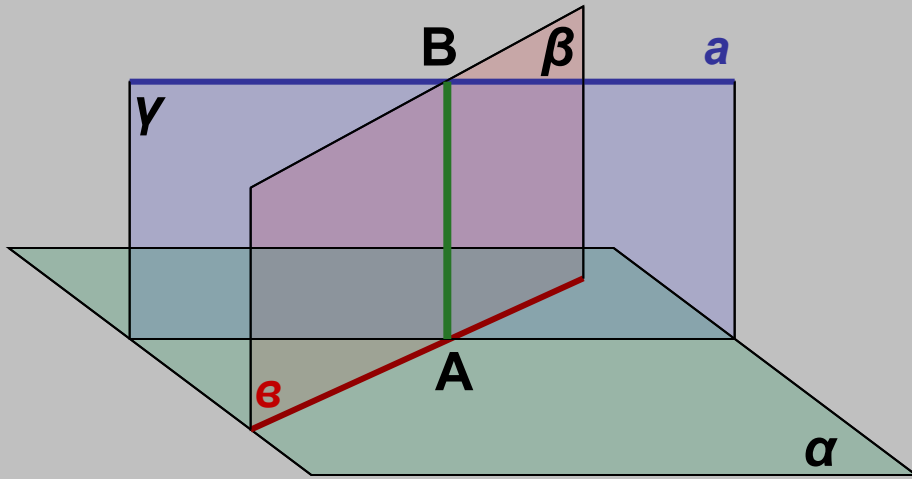
# Определение

*Отрезок, концы которого лежат на скрещивающихся прямых, и перпендикулярный обеим прямым, называется общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым.*

# Теорема

*К любым двум скрещивающимся прямым можно провести общий перпендикуляр и притом только один.*

# Доказательство:



$$\begin{aligned} 1) \quad & \alpha \parallel a, b \subset \alpha \\ & b \subset \beta, \beta \perp \alpha \\ & a \subset \gamma, \gamma \perp \alpha \end{aligned}$$

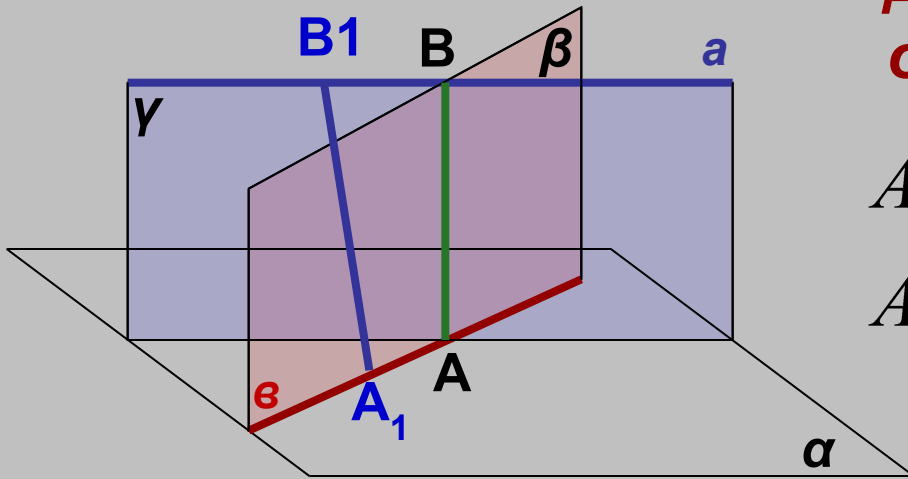
$$2) \quad \left. \begin{aligned} b \cap \gamma = A \\ a \cap \beta = B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta \cap \gamma = AB$$

$$3) \quad \left. \begin{aligned} \beta \cap \gamma = AB, \\ \gamma \perp \alpha, \\ \beta \perp \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} AB \perp \alpha \\ b \subset \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB \perp b$$

$$4) \quad \left. \begin{aligned} a \parallel \alpha \\ AB \perp \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB \perp a$$

**Значит  $AB$  – общий перпендикуляр**

# Доказательство единственности



*Допустим, что  $A_1B_1$  – другой общий перпендикуляр, тогда*

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ A_1B_1 \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel A_1B_1$$

*Значит прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  лежат в одной плоскости.*

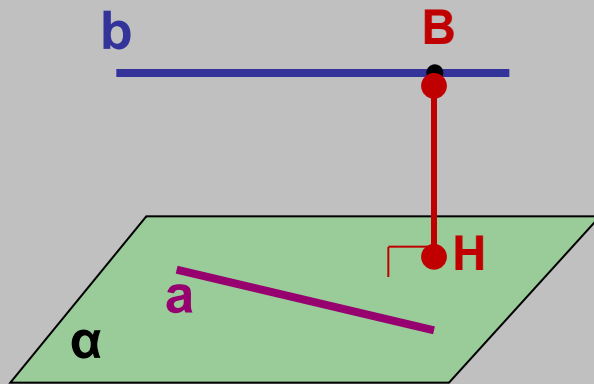
$$B \in a, B_1 \in a \Rightarrow BB_1 \equiv a$$

$$A \in b, A_1 \in b \Rightarrow AA_1 \equiv b$$

*Значит прямые  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости, что противоречит условию.*

# Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

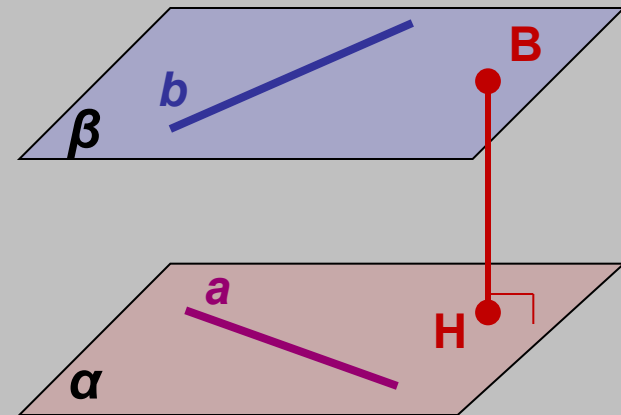
## 1 способ



$$a \subset \alpha, \alpha \parallel b$$
$$B \in b, BH \perp \alpha,$$

$$\rho(a, b) = \rho(b, \alpha) = BH$$

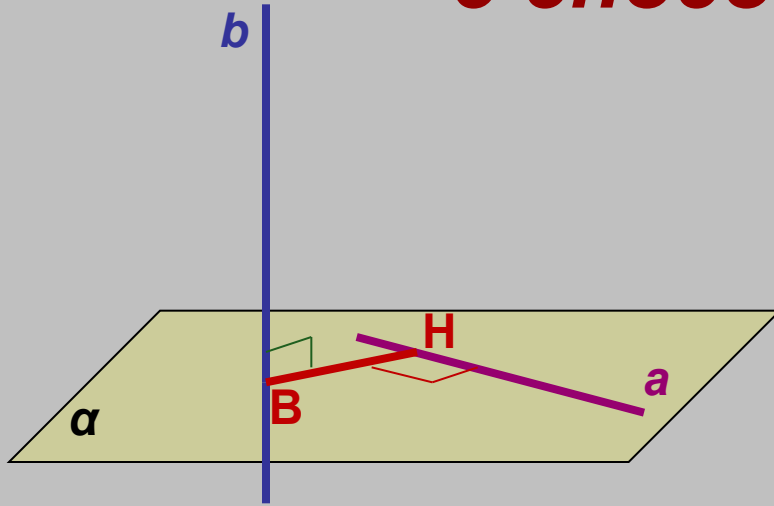
## 2 способ



$$a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \parallel \beta$$
$$B \in \beta, BH \perp \alpha,$$

$$\rho(a, b) = \rho(\alpha, \beta) = BH$$

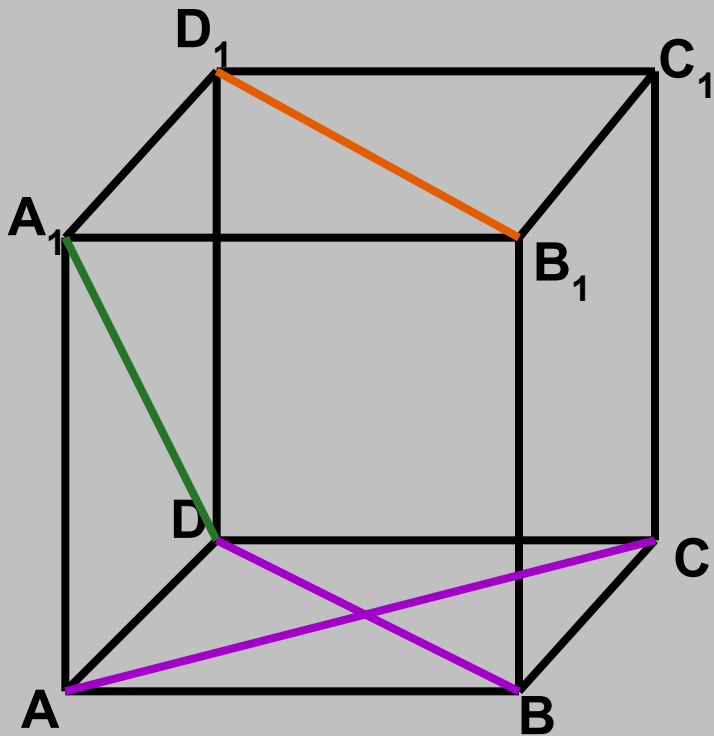
## 3 способ



$a \subset \alpha, b \perp \alpha,$   
 $b \cap \alpha = B, BH \perp a,$   
тогда  $\rho(a, b) = BH$

# Решение задач

Найдите расстояние между прямыми:



1)  $DD_1$  и  $AB$ ;

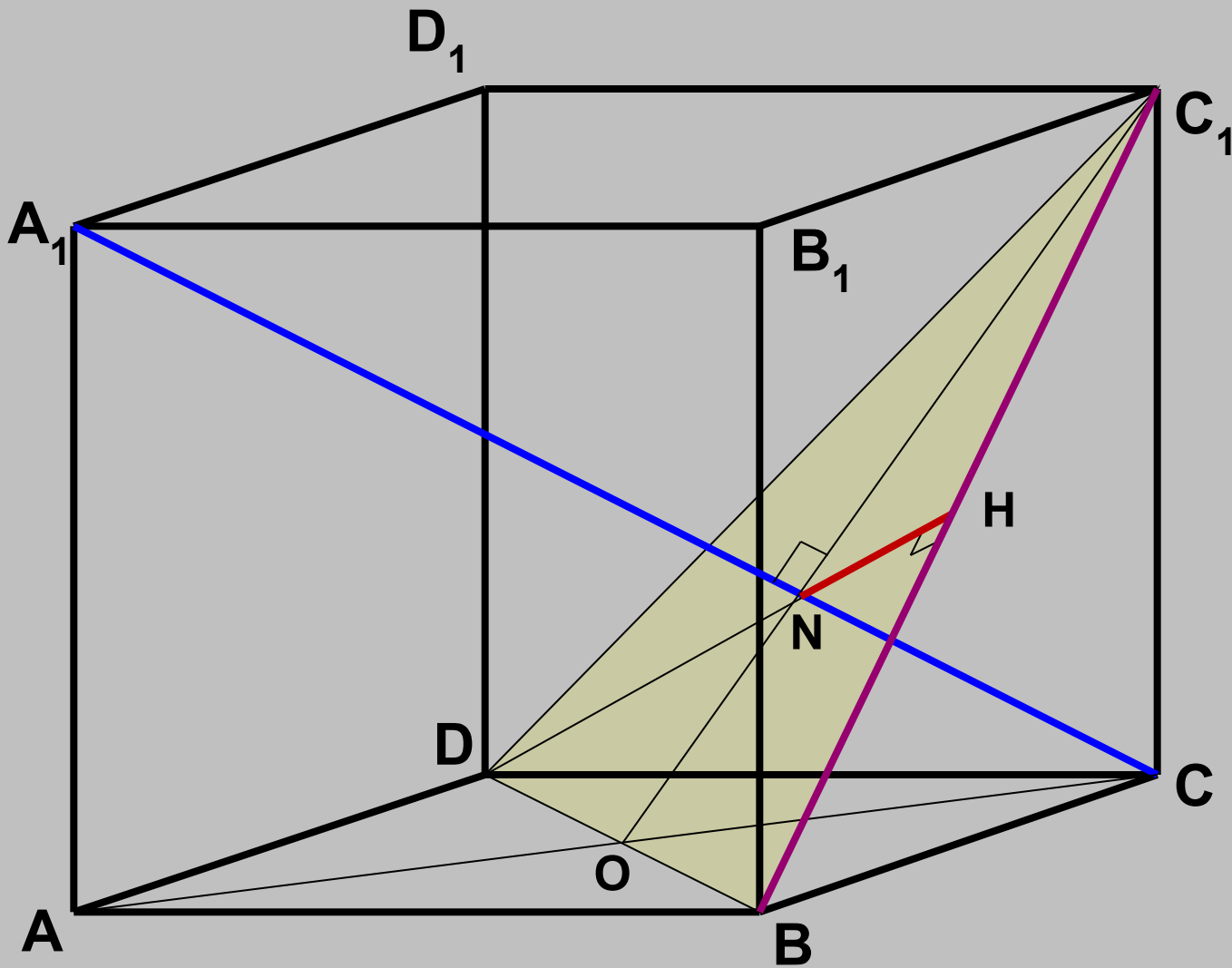
2)  $DA_1$  и  $BC$ ;

3)  $D_1B_1$  и  $AC$ ;

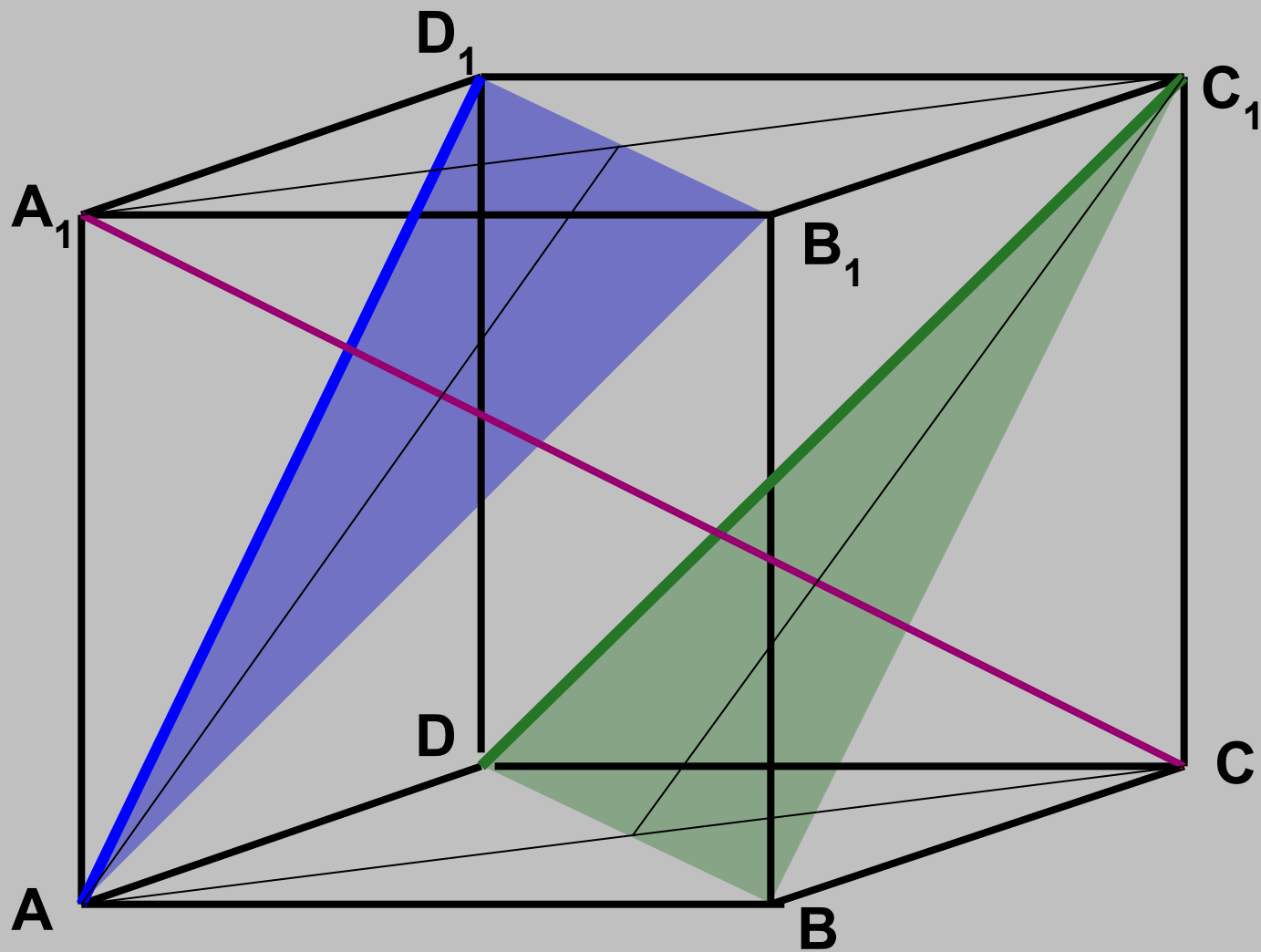
4)  $DB$  и  $C_1C$ ;



*Ребро куба равно  $a$ . Найдите расстояние между прямыми: 1)  $A_1C$  и  $BC_1$ .*

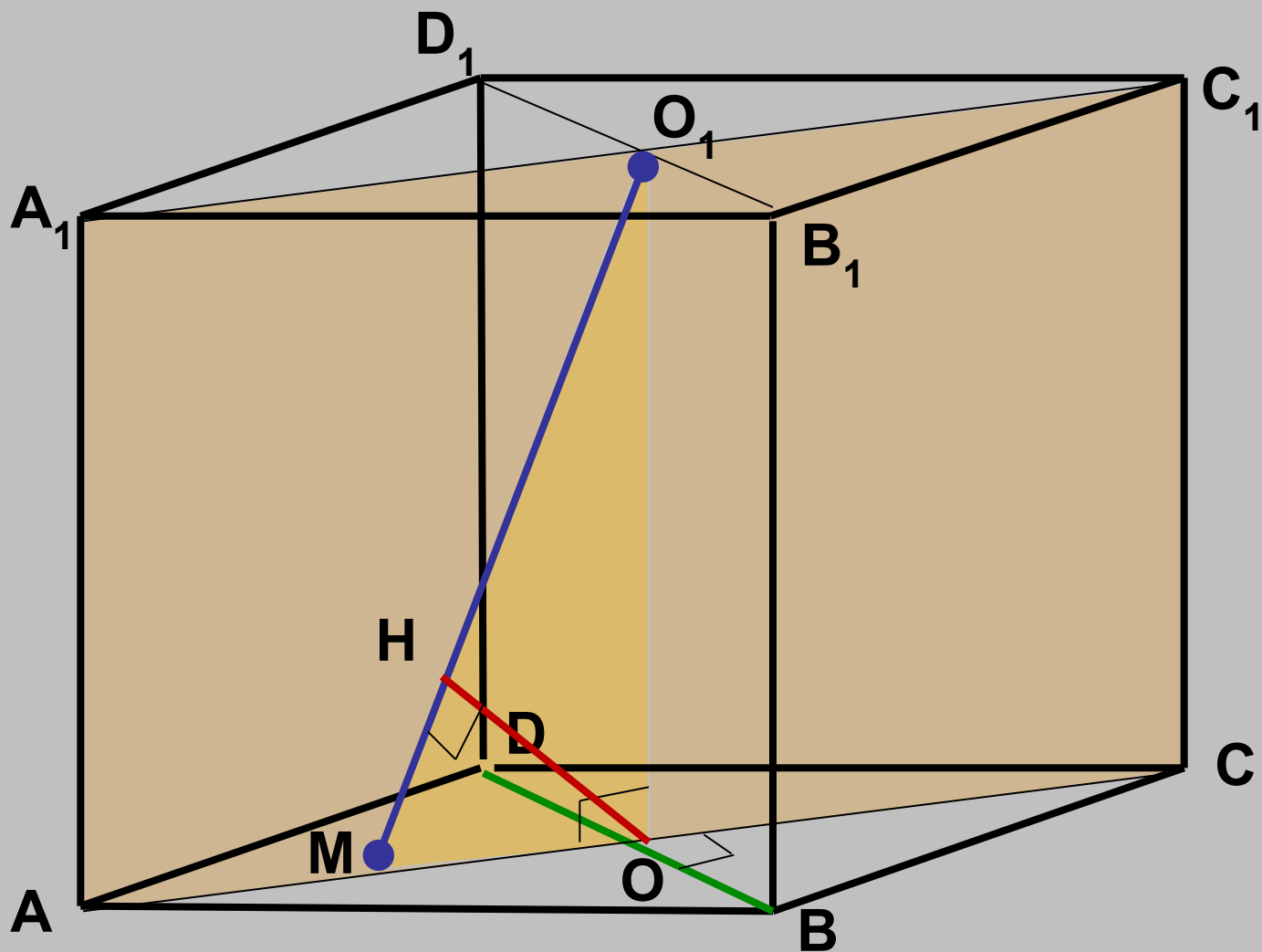


2) Найдите  $\rho(AD_1, DC_1)$



$$\rho(AD_1, DC_1) = \rho(AD_1B_1; DBC_1) = \frac{1}{3} A_1C$$

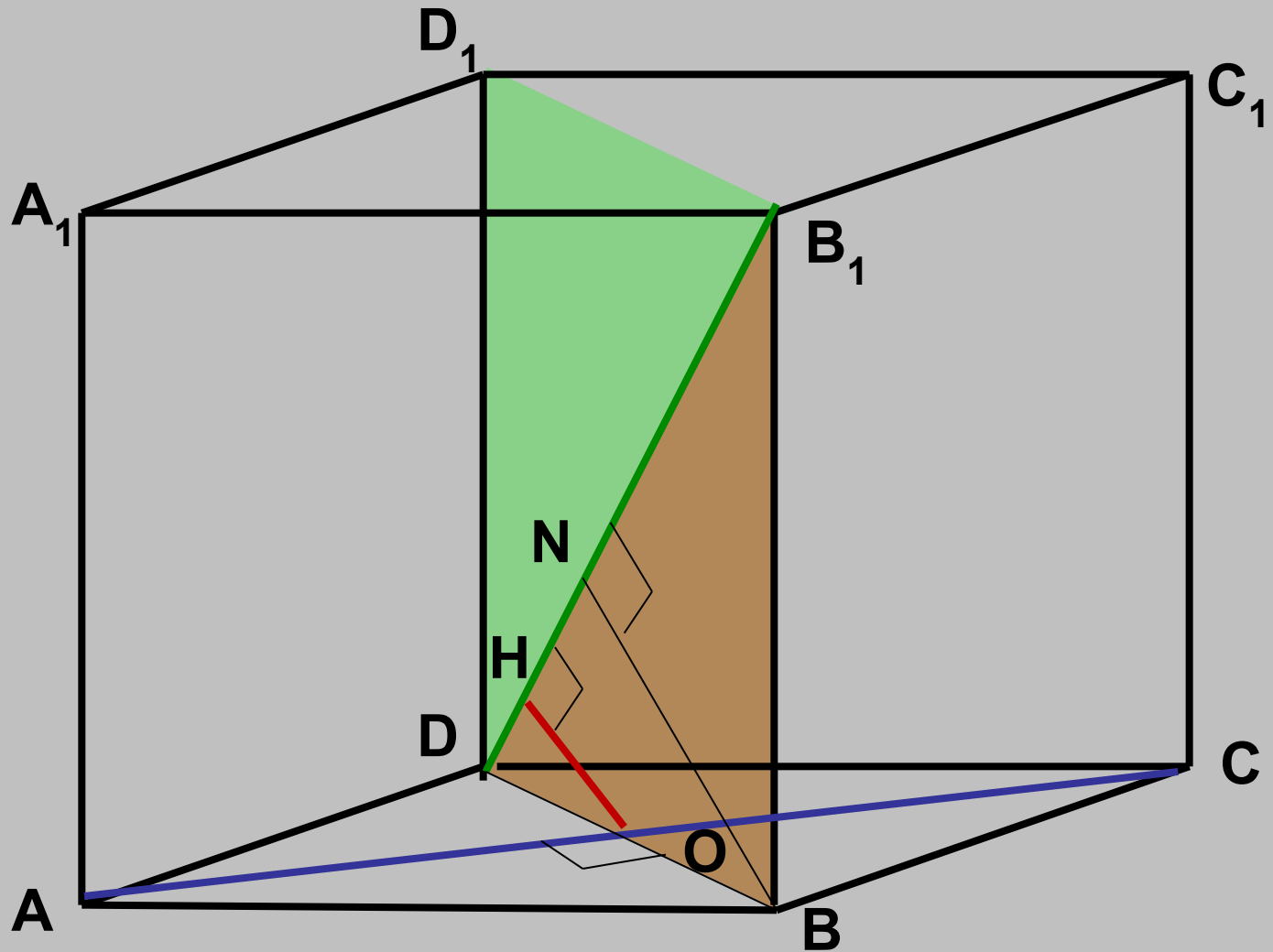
3)  $M$  – середина  $AO$ , найти  $\rho(BD, O_1M)$



$$\rho(BD, O_1M) = OH$$

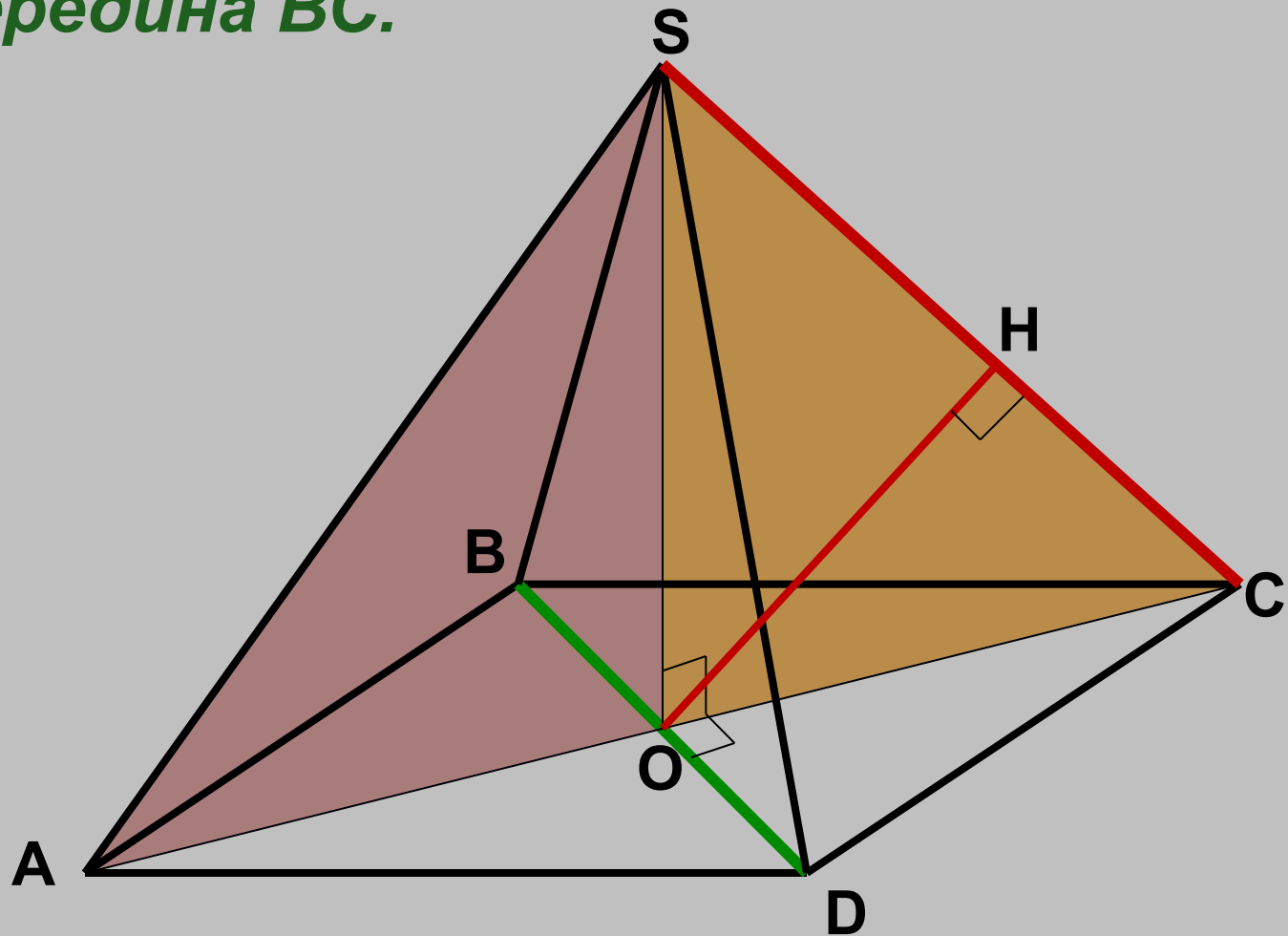
$$OH = \frac{a}{3}$$

4) Найдите  $\rho(B_1D, AC)$



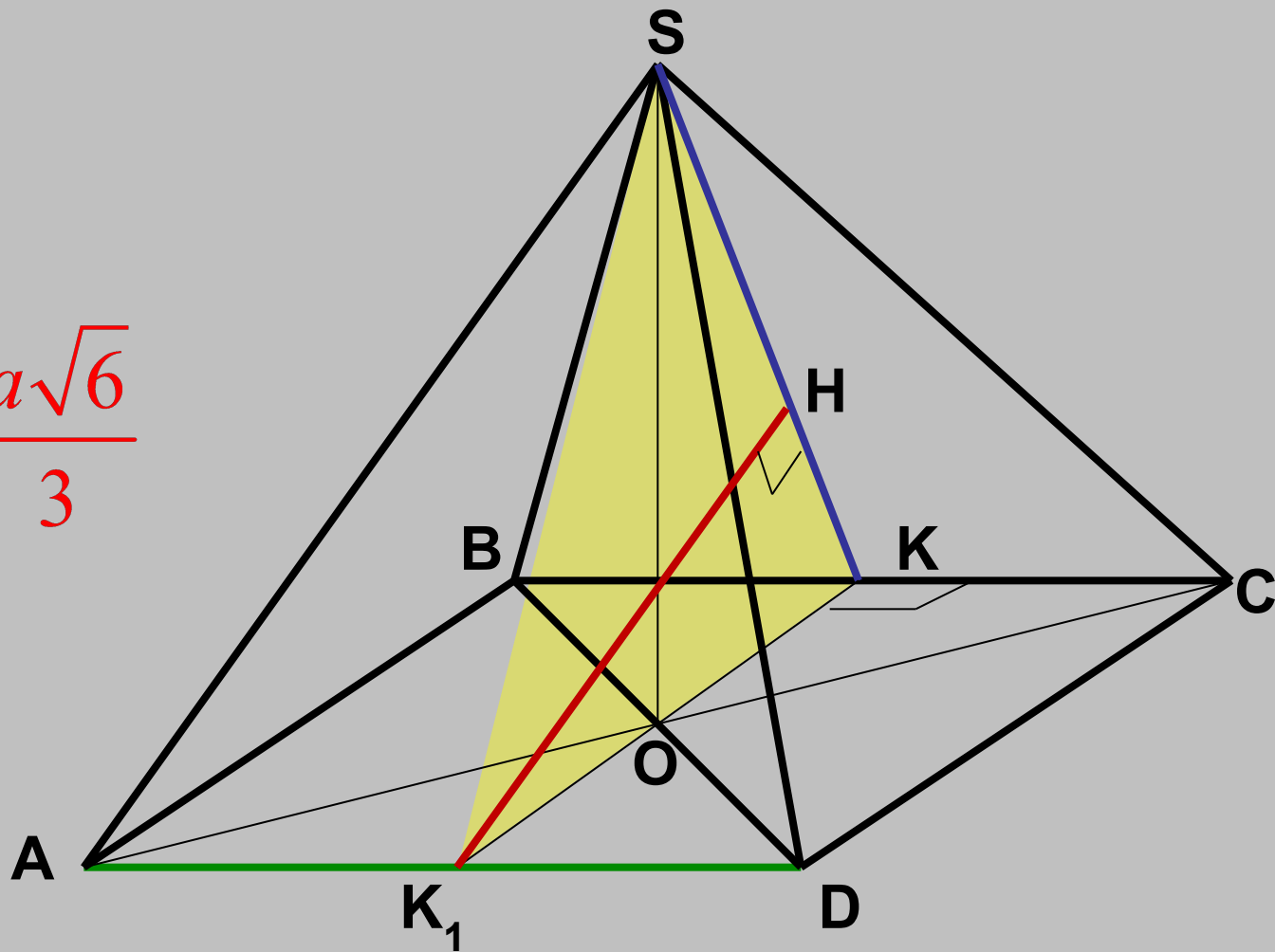
$$OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

4) Дана правильная пирамида, все рёбра которой равны  $a$ . Найти  $\rho(BD, SC)$ ,  $\rho(AD, SK)$ , если  $K$  – середина  $BC$ .



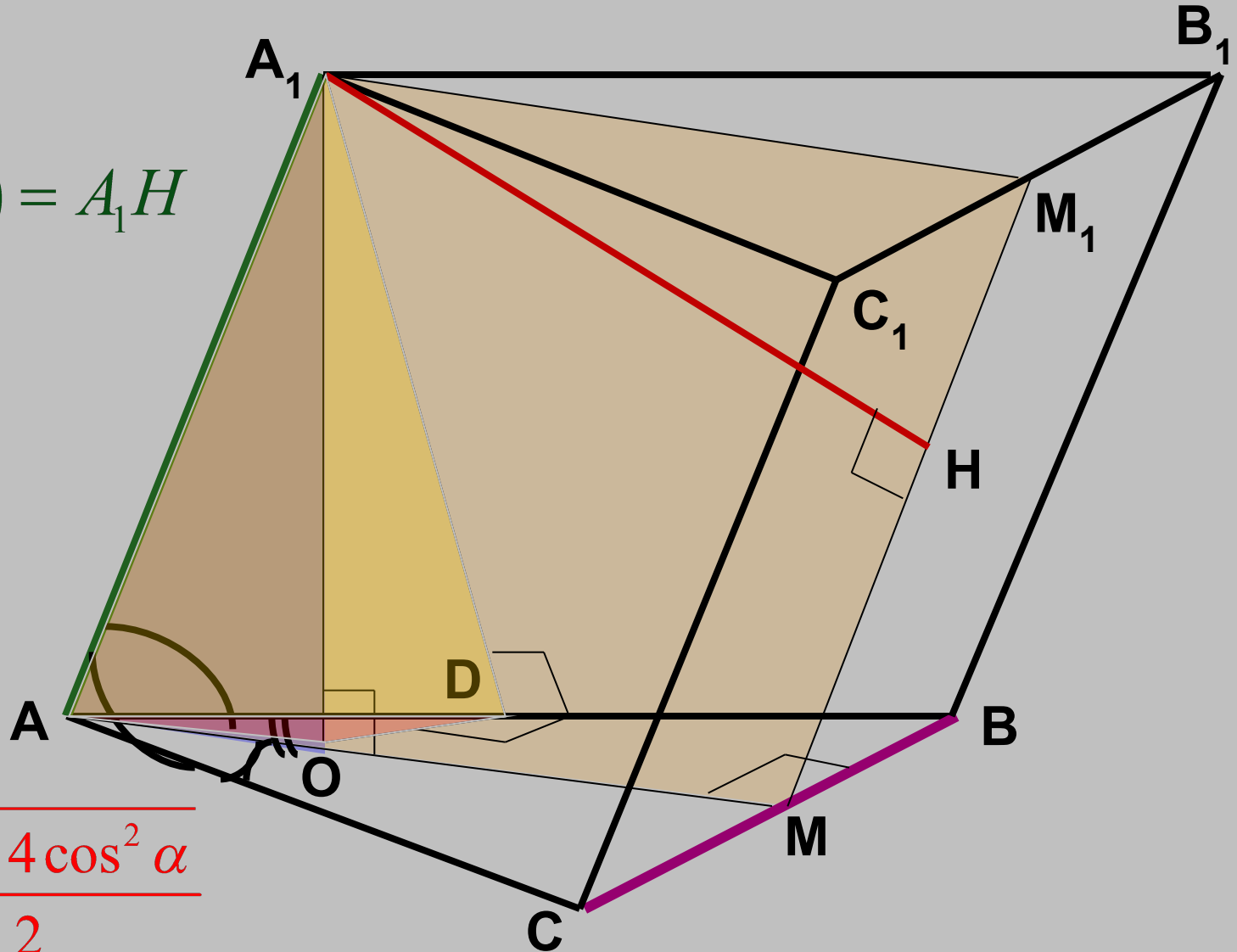
$$OH = \frac{a}{2}$$

$$K_1H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



В наклонной призме все рёбра равны  $a$ ,  $\square A_1AC = \square A_1AB$ . Найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC$ .

$$\rho(AA_1, BC) = A_1H$$



$$A_1H = \frac{a\sqrt{3 - 4\cos^2 \alpha}}{2}$$