

# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

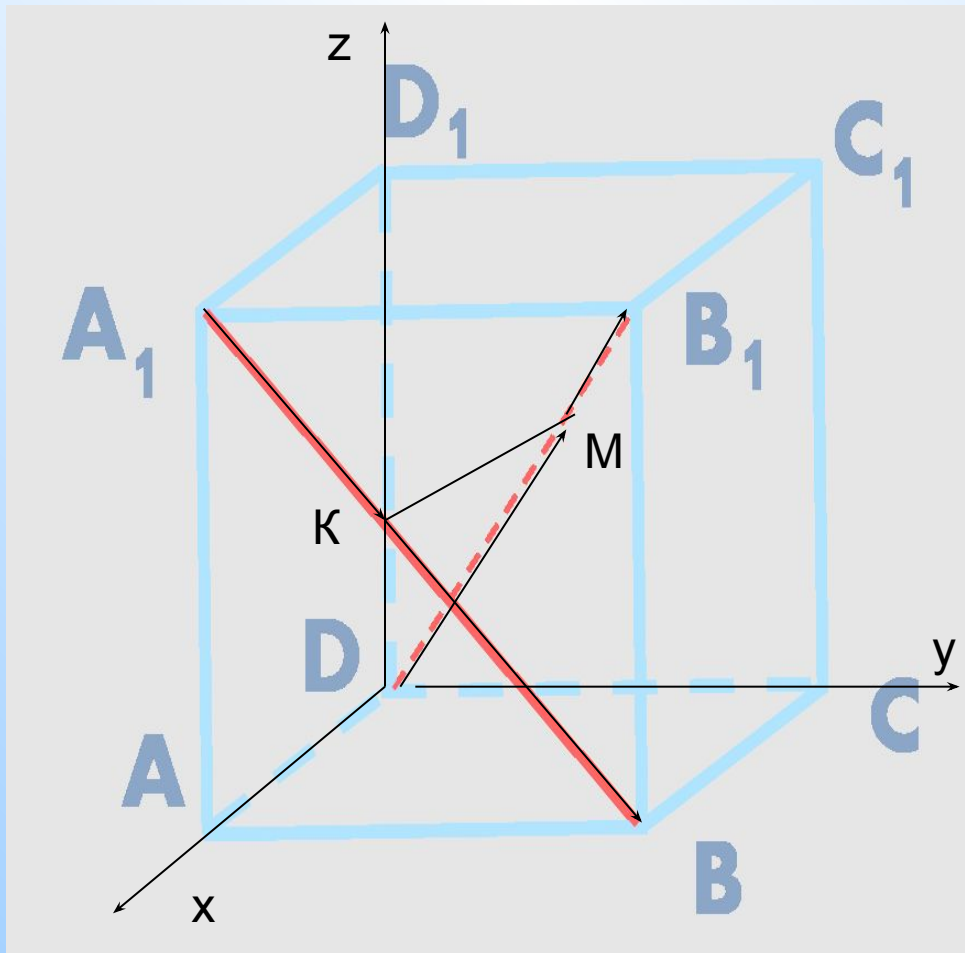
Координатным и векторным  
способом

Алферова Наталья Васильевна,  
учитель математики  
МКОУ «Горячключевская СОШ»  
Омского района Омской области

# Основные понятия

- Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина общего перпендикуляра к данным прямым
- Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от точки одной прямой до плоскости параллельной данной прямой и содержащей вторую прямую.

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние между прямыми  $BA_1$  и  $DB_1$ .



Точки  $A_1 (1;0;1)$ ,  $B_1 (1;1;0)$

Вектор  $\overrightarrow{A_1 B_1} \{0;1;-1\}$

Точки  $D (0;0;0)$ ,  $B_1 (1;1;1)$

Вектор  $\overrightarrow{DB_1} \{1;1;1\}$

Пусть  $KM \perp A_1 B_1$  и  $KM \perp DB_1$ , значит  $KM$  – искомое расстояние.

Пусть точка  $K$  лежит на прямой  $A_1 B_1$ , а точка  $M$  на прямой  $DB_1$ . Рассмотрим векторы  $\overrightarrow{A_1 K}$  и  $\overrightarrow{DM}$ , сонаправленные с направляющими векторами данных прямых. По лемме о коллинеарных векторах вектор  $\overrightarrow{A_1 K} = a \cdot \overrightarrow{A_1 B_1}$ , т.е. вектор  $\overrightarrow{A_1 K} \{0;a;-a\}$ , вектор  $\overrightarrow{DM} = b \cdot \overrightarrow{DB_1}$ , т.е. вектор  $\overrightarrow{DM} \{b;b;b\}$ .

Тогда  $K(1;a;1-a)$ ,  $M(b;b;b)$  и вектор  $\overrightarrow{KM} \{b-1;b-a;b-1+a\}$ .

# Решим систему из условия перпендикулярности двух векторов

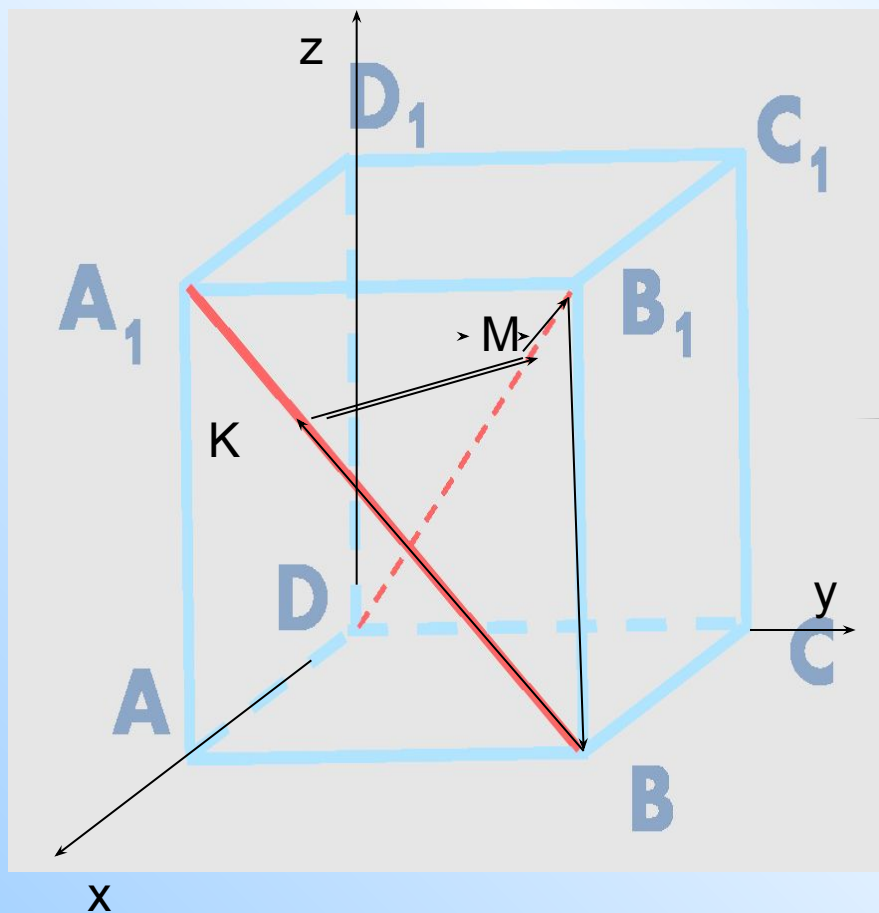
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

$$\begin{array}{l} \vec{KM} \cdot \vec{A_1B} = 0 \\ \vec{KM} \cdot \vec{DB_1} = 0 \end{array} \left[ \begin{array}{l} 0 \cdot (b-1) + 1 \cdot (b-a) - 1 \cdot (b-1+a) = 0, \\ 1 \cdot (b-1) + 1 \cdot (b-a) + 1 \cdot (b-1+a) = 0 \end{array} \right.$$

Решив систему получаем  $a=1/2$ ,  $b=-2/3$ ,  
подставим эти значения в координаты  
вектора  $\vec{KM}$ :  $\vec{KM} \{ -1/3; 5/6; -1/2 \}$ . Найдём  
длину вектора  $|\vec{KM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $|\vec{KM}|$   
 $= \sqrt{1/9 + 1/36 + 1/36} = \sqrt{6}/6$ . Ответ:  $\sqrt{6}/6$

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние между прямыми  $BA_1$  и  $DB_1$ .

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BK} = a \cdot \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{B_1B} + b \cdot \overrightarrow{BA_1}$$



$$\overrightarrow{DB_1} \{1; 1; 1\}, \overrightarrow{BA_1} \{0; -1; 1\}, \overrightarrow{B_1B} \{0; 0; 1\}$$

$$\overrightarrow{KM} = \{a; a; a\} + \{0; 0; 1\} + \{0; -b; b\} = \{a; a-b; a+1+b\}$$

$$\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0 \quad \left[ \begin{array}{l} 0 \cdot a - 1 \cdot (a-b) + 1 \cdot (a+1+b) = 0, \\ 1 \cdot a + 1 \cdot (a-b) + 1 \cdot (a+1+b) = 0 \end{array} \right.$$

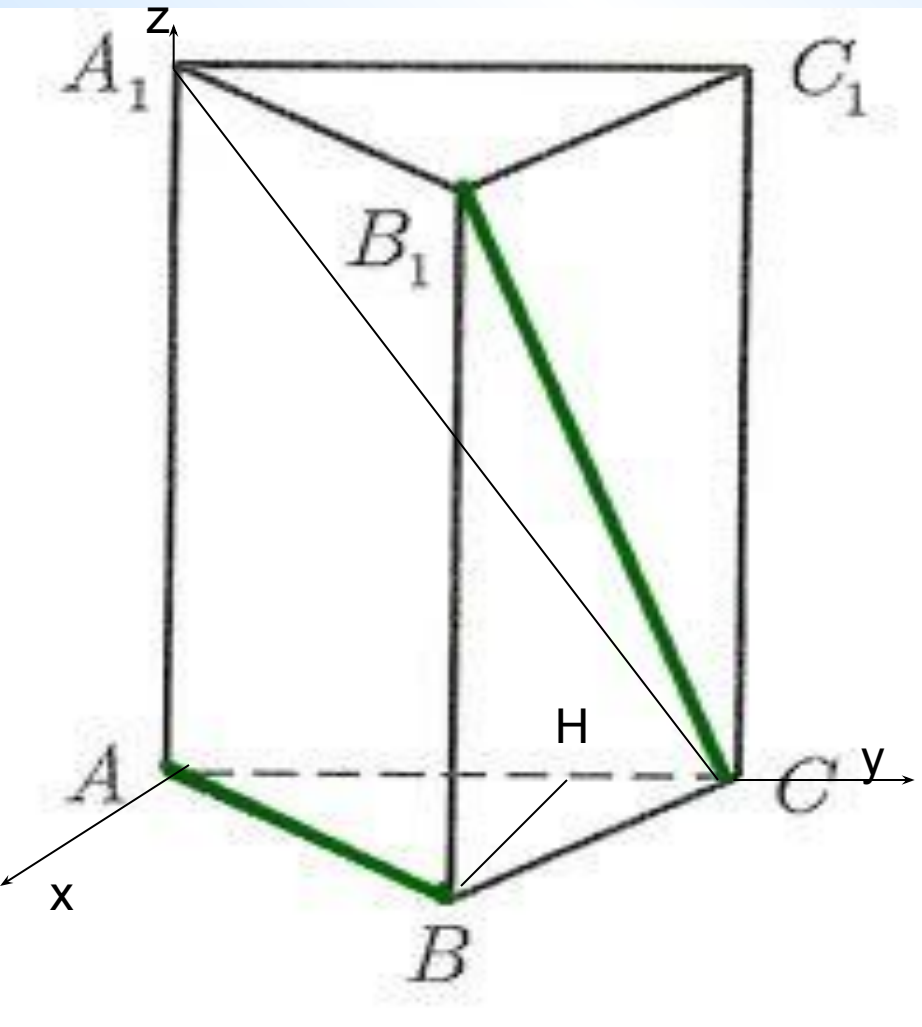
$$\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{DB_1} = 0 \quad \left[ \begin{array}{l} 0 \cdot a - 1 \cdot (a-b) + 1 \cdot (a+1+b) = 0, \\ 1 \cdot a + 1 \cdot (a-b) + 1 \cdot (a+1+b) = 0 \end{array} \right.$$

$$b = -\frac{1}{2}, a = -\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{KM} \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6} \right\}$$

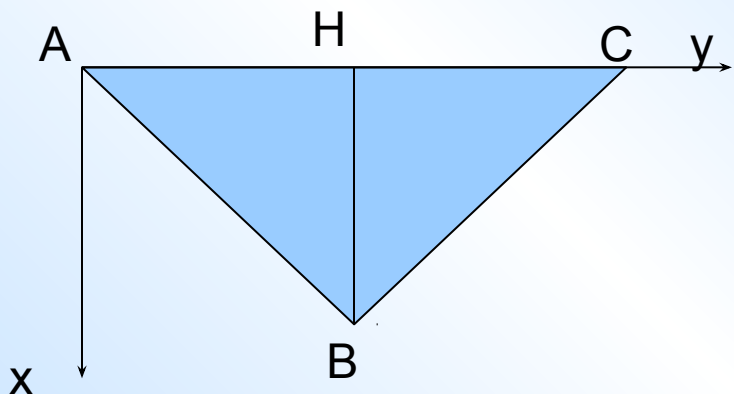
$$|\overrightarrow{KM}| = \sqrt{1/9 + 1/36 + 1/36} = \sqrt{6}/6$$

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $CB_1$



Рассмотрим плоскость  $(A_1B_1C)$ , содержащую прямую  $B_1C$  и параллельную прямой  $AB$ . Расстоянием между скрещивающимися прямыми будет расстояние от точки прямой  $AB$ , например от  $A$ , до плоскости  $(A_1B_1C)$ . Введём прямоугольную систему координат  $OXYZ$  так, чтобы ось  $OX$  была параллельна высоте  $BH$  основания, ось  $OY$  совпадала с  $AC$ , ось  $OZ$  совпадала с  $AA_1$ .

Рассмотрим  $\triangle ABC$   
в плоскости  $OXY$



$\triangle ABC$  – правильный,  $AB=BC=AC=1$ ,  
 $BH=\sqrt{3}/2$ .

Составим уравнение плоскости  $(A_1B_1C_1)$ :

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

$$A_1(0;0;1),$$

$$B_1(\sqrt{3}/2; 1/2 ;1),$$

$C(0;1;0)$ , подставляем координаты точек в уравнение плоскости, получим систему:

$$0A+0B+1C+D=0,$$

$$(\sqrt{3}/2)A+(1/2)B+1C+D=0,$$

$$0A+1B+0C+D=0.$$

Получаем  $C=-D$ ,  $B=-D$ ,  $A = (\sqrt{3}/3)D$ .

Уравнение плоскости  $(A_1B_1C_1)$ :

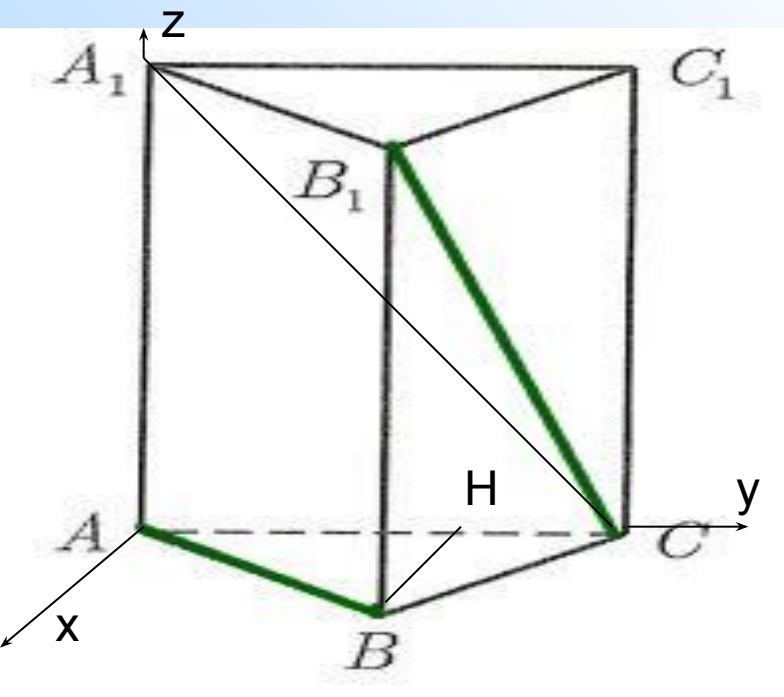
$$(\sqrt{3}/3)Dx-Dy-Dz+D=0, \quad (\sqrt{3}/3)x-1y-1z+1=0,$$

Формула расстояния от точки до плоскости:

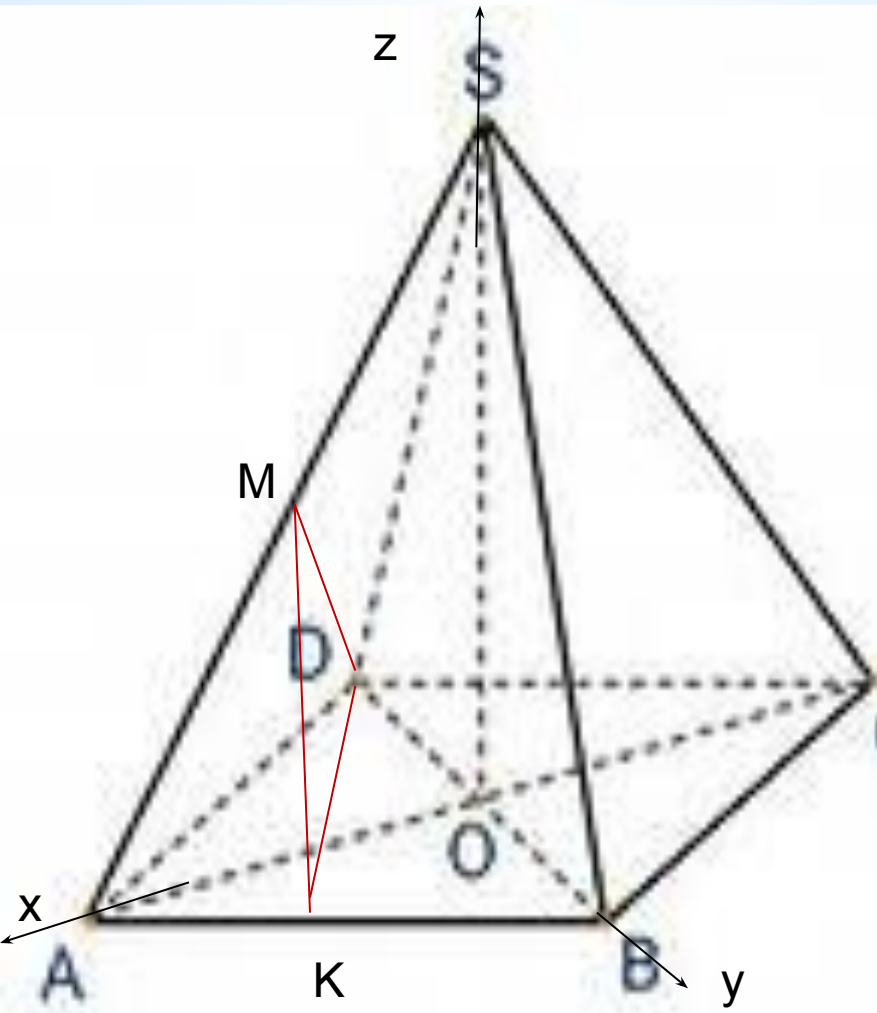
$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

где  $(x_0; y_0; z_0)$ - координаты точки  $A$ ,

$$d = |\sqrt{3}/3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1| / \sqrt{(\sqrt{3}/3)^2 + 1 + 1} = \sqrt{21}/7. \quad \text{Ответ: } \sqrt{21}/7.$$



В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , сторона основания  $3\sqrt{2}$ , боковые ребра 5, точка  $M$  – середина ребра  $AS$ . Найдите расстояние между прямыми  $MD$  и  $SB$ .



Из точки  $M$  проведён прямую  $MK$  параллельную  $SB$ , очевидно, что  $MK$  – средняя линия  $\triangle ASB$ ,  $SB \parallel (MKD)$ . Расстояние между прямыми  $MD$  и  $SB$  – это расстояние от точки прямой  $SB$  до плоскости  $(MDK)$ .

Введём прямоугольную систему координат  $OXYZ$  с началом в точке пересечения диагоналей  $O$ , так чтобы ось  $Ox$  совпадала с  $OA$ , ось  $Oy$  с  $OB$ , ось  $Oz$  с высотой  $OS$ . Сторона квадрата  $3\sqrt{2}$ ,  $\Rightarrow$ , диагональ  $AC=6$ .

В прямоугольном  $\triangle AOS$ :  $AO=3$ ,  $SO=4$ .

Составим уравнение плоскости  $(MKD)$ :

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

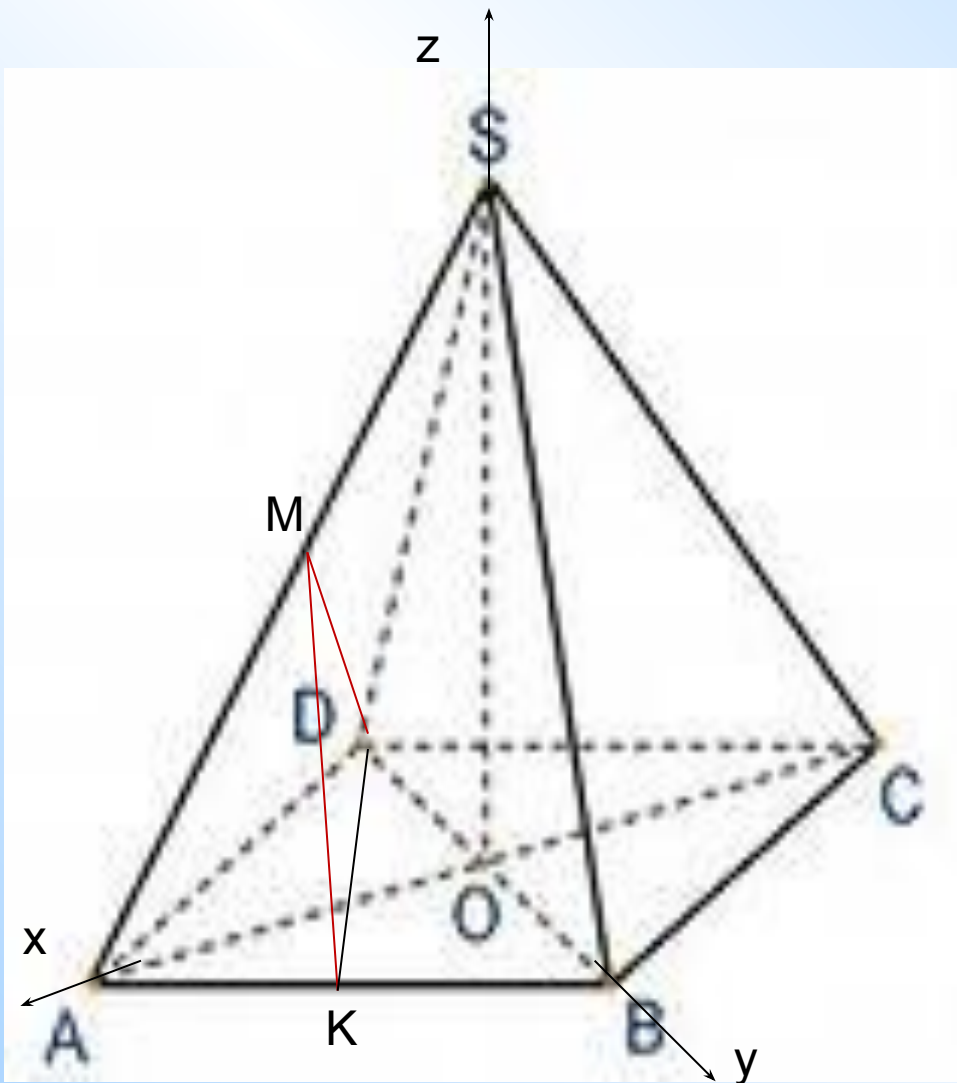
$$A(3; 0; 0), D(0; -3; 0), S(0; 0; 4), M(3/2; 0; 2)$$

$$3A + D = 0$$

$$-3B + D = 0$$

$$(3/2)A + 2C + D = 0$$





$$A = (-1/3)D, B = (1/3)D, C = (-1/4)D.$$

Уравнение плоскости (MKD):

$$(-1/3)Dx + (1/3)Dy + (-1/4)Dz + D = 0,$$

$$(-1/3)x + (1/3)y + (-1/4)z + 1 = 0.$$

Определим расстояние от точки  $B(0;3;0)$  до плоскости (MKD) по формуле  $d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$\frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = |1 + 1| / \sqrt{1/9 + 1/9 + 1/16} = \sqrt{41/12}$$

Ответ:  $\sqrt{41/12}$

Спасибо за внимание!!!