РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

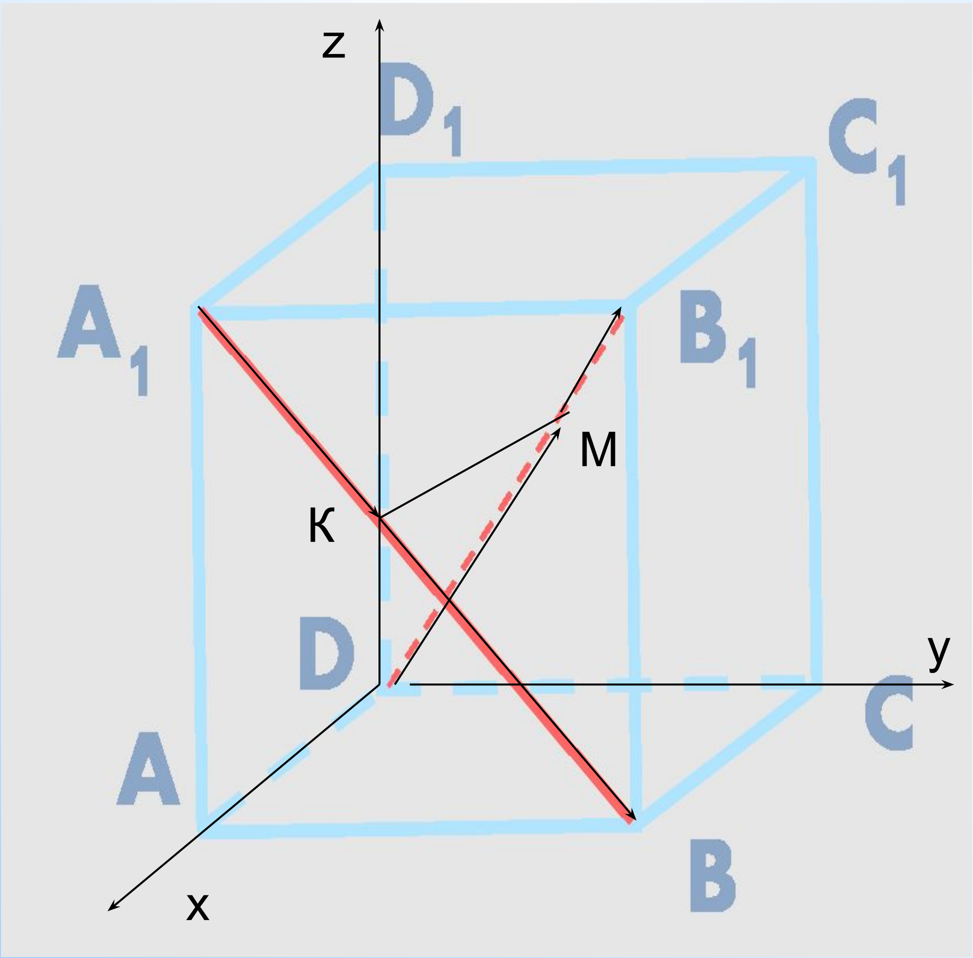
Координатным и векторным способом

Алферова Наталья Васильевна,
учитель математики
МКОУ «Горячеключевская СОШ»
Омского района Омской области

Основные понятия

- Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина общего перпендикуляра к данным прямым
- Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от точки одной прямой до плоскости параллельной данной прямой и содержащей вторую прямую.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DB_1.



Точки A_1 (1;0;1), B (1;1;0)

Вектор $\overrightarrow{A_1B}$ {0;1;-1}

Точки D (0;0;0), B_1 (1;1;1)

Вектор $\overrightarrow{DB_1}$ {1;1;1}

Пусть КМ $\perp A_1B$ и КМ$\perp DB_1$, значит КМ – искомое расстояние.

Пусть точка К лежит на прямой A_1B, а точка М на прямой DB_1. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{A_1K}$ и $\overrightarrow{DM}$, сонаправленные с направляющими векторами данных прямых . По лемме о коллинеарных векторах вектор $\overrightarrow{A_1K} = a \cdot \overrightarrow{A_1B}$, т.е. вектор $\overrightarrow{A_1K}$ {0;a;-a}, вектор $\overrightarrow{DM} = b \cdot \overrightarrow{DB_1}$, т.е. вектор $\overrightarrow{DM}$ {b;b;b}.

Тогда К(1;a;1-a), М(b;b;b) и вектор $\overrightarrow{KM}$ {b-1;b-a;b-1+a}.

Решим систему из условия перпендикулярности двух векторов

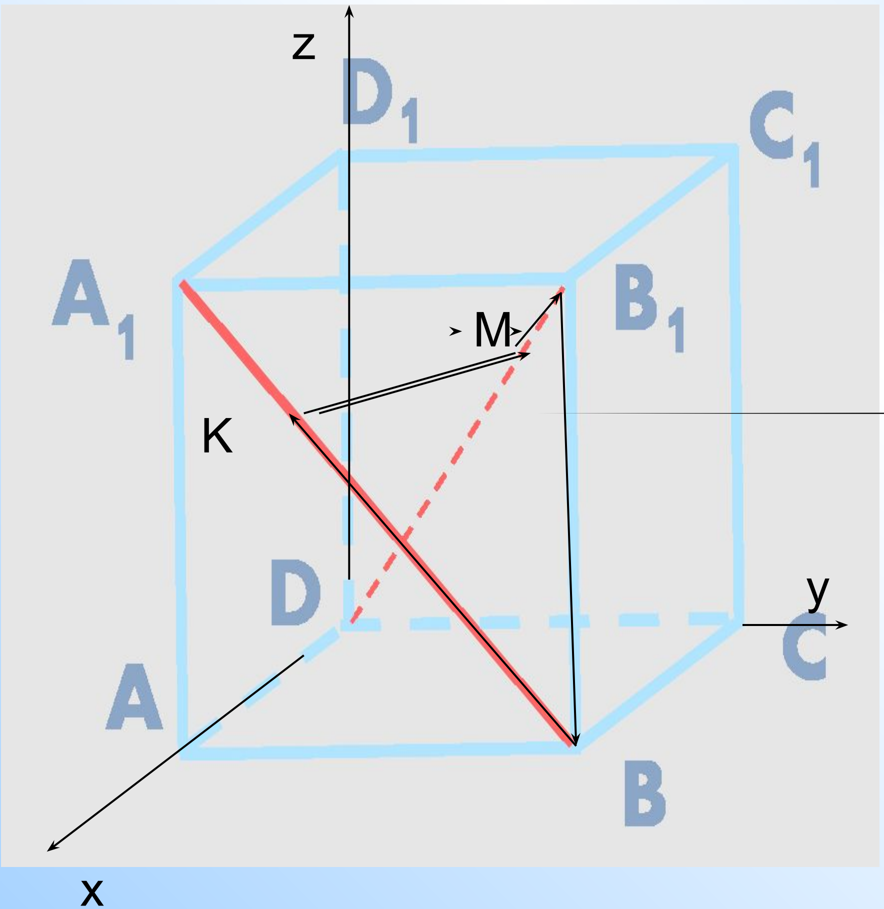
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0 & 0\cdot(b-1)+1\cdot(b-a)-1\cdot(b-1+a) = 0, \\ \overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{DB_1}=0 & 1\cdot(b-1)+1\cdot(b-a)+1\cdot(b-1+a) = 0 \end{cases}$$

Решив систему получаем $a=1/2$, $b=-2/3$, подставим эти значения в координаты вектора $\overrightarrow{KM}$: $\overrightarrow{KM}$ { -1/3; 5/6; -1/2}. Найдём длину вектора $|\overrightarrow{KM}| =\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $|\overrightarrow{KM}| =\sqrt{1/9+1/36+1/36}=\sqrt{6}/6$. Ответ: $\sqrt{6}/6$

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DB_1.

$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BK}=a\cdot\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{B_1B}+b\cdot\overrightarrow{BA_1}$



$\overrightarrow{DB_1}\{1;1;1\}$, $\overrightarrow{BA_1}\ \{0;-1;1\}$, $\overrightarrow{B_1B}\{0;0;1\}$

$\overrightarrow{KM}$ = {a; a ;a} + {0; 0; 1} + {0; -b ; b}=
= {a; a- b; a+1+b}

$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} 0\cdot a-1\cdot(a-b)+1\cdot(a+1+b)=0, \\ 1\cdot a+1\cdot(a-b)+1\cdot(a+1+b)=0 \end{array}\right.$

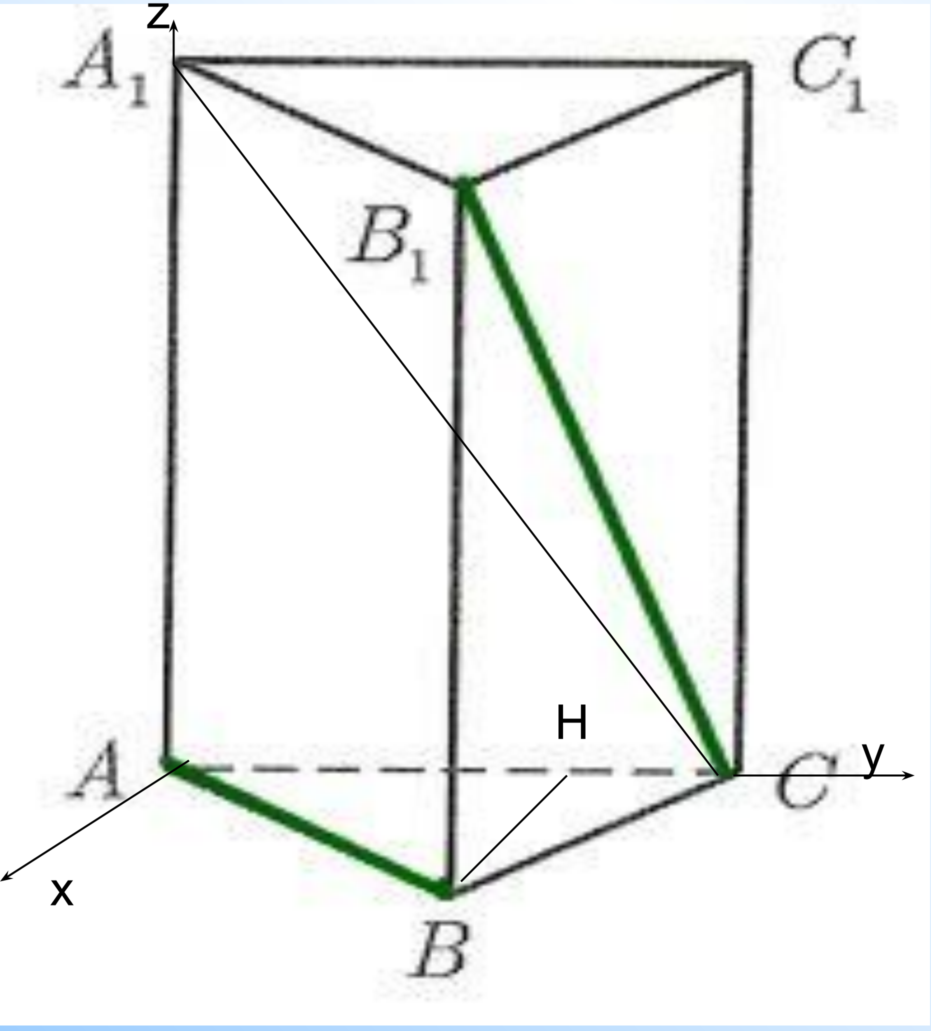
$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{DB_1}=0$

b= -½, a= -⅓

$\overrightarrow{KM}$ {-1/3; 1/6;1/6}

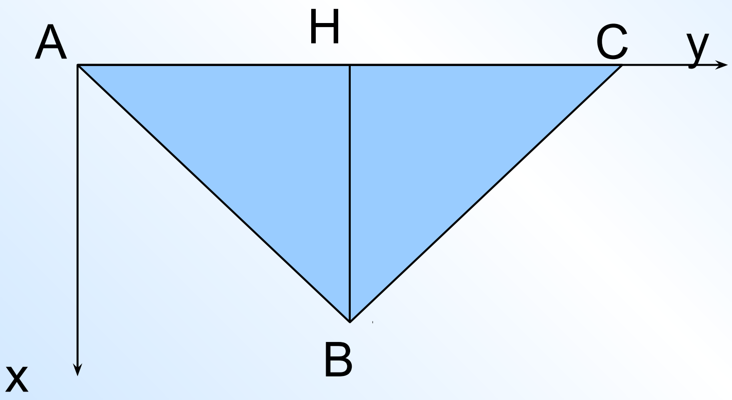
$|\overrightarrow{KM}|=\sqrt{1/9+1/36+1/36}=\sqrt{6}/6$

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CB_1



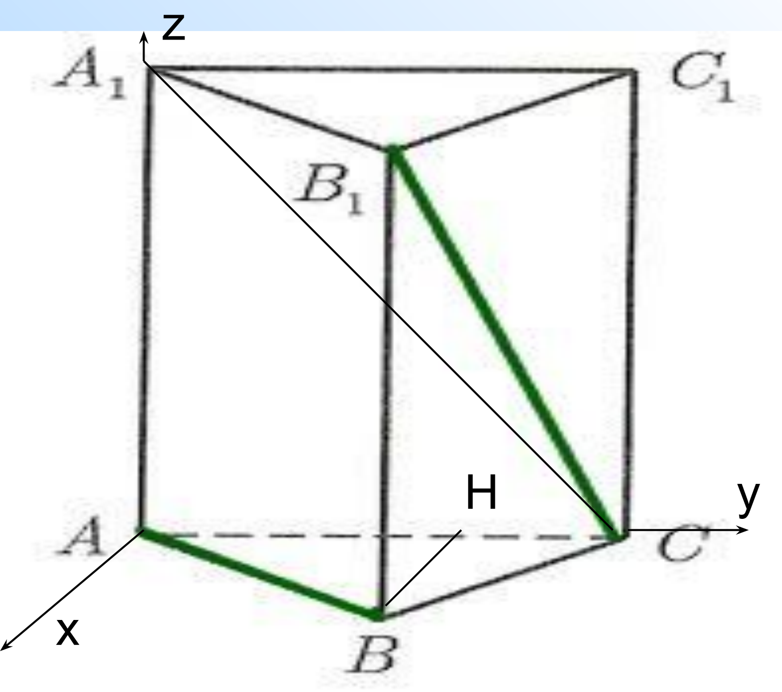
Рассмотрим плоскость (A_1B_1C), содержащую прямую B_1C и параллельную прямой AB. Расстоянием между скрещивающимися прямыми будет расстояние от точки прямой AB, например от A, до плоскости (A_1B_1C).
Введём прямоугольную систему координат OXYZ так, чтобы ось OX была параллельна высоте BH основания, ось OY совпадала с AC, ось OZ совпадала с AA_1.

Рассмотрим ΔABC
в плоскости ОХУ



Δ ABC – правильный, AB=BC=AC=1,
BH=$\sqrt{3}/2$.
Составим уравнение плоскости (A_1B_1C):
Ax+By+Cz+D=0.
$A_1(0;0;1)$,
$B_1(\sqrt{3}/2;\ 1/2\ ;1)$,
C(0;1;0) , подставляем координаты точек в уравнение плоскости, получим систему:

$$\begin{cases} 0A+0B+1C+D=0, \\ (\sqrt{3}/2)A+(1/2)B+1C+D=0, \\ 0A+1B+0C+D=0. \end{cases}$$

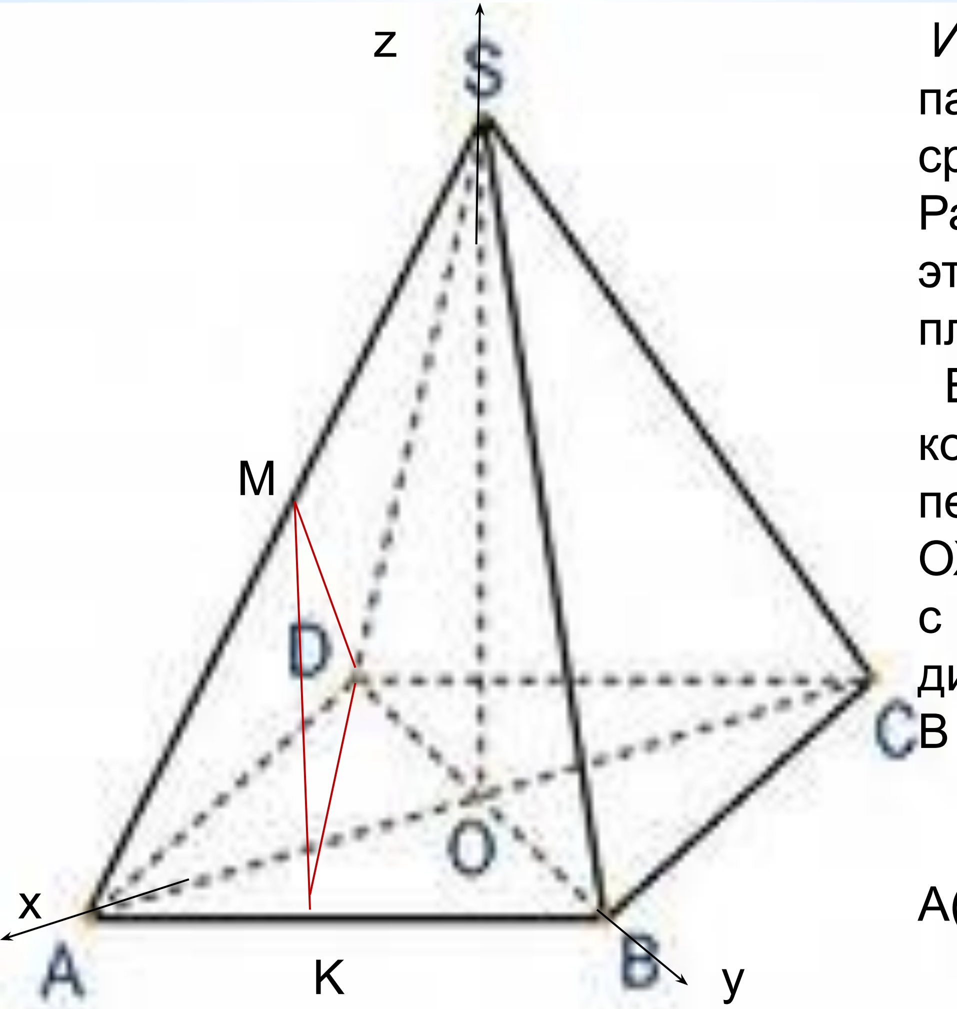


Получаем C=-D, B=-D, A= ($\sqrt{3}/3$)D.
Уравнение плоскости ($A_1B_1C_1$):
($\sqrt{3}/3$)Dx-Dy-Dz+D=0, ($\sqrt{3}/3$)x-1y-1z+1=0,
Формула расстояния от точки до плоскости: d= $\dfrac{|A*x_0+B*y_0+C*z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

где ($x_0;y_0;z_0$)- координаты точки A,

$$d = |\sqrt{3}/3\cdot 0-1\cdot 0-1\cdot 0 +1| \ /\ \sqrt{(\sqrt{3}/3)^2+1+1}$$
=$\sqrt{21}/7$. Ответ: $\sqrt{21}/7$.

В правильной четырехугольной пирамидеSABCD, сторона основания $3\sqrt{2}$, боковые ребра 5 ,точка М – середина ребра AS. Найдите расстояние между прямыми MD и SB.



Из точки М проведён прямую МК параллельную SB, очевидно, что МК-средняя линия Δ ASB, SB|| (KMD). Расстояние между прямыми MD и SB – это расстояние от точки прямой SB до плоскости (MDK).

Введём прямоугольную систему координат OXYZ с началом в точке пересечения диагоналей О, так чтобы ось ОХ совпадала с ОА, ось ОУ с ОВ, ось OZ с высотой OS. Сторона квадрата $3\sqrt{2}$, =>, диагональ AC=6.

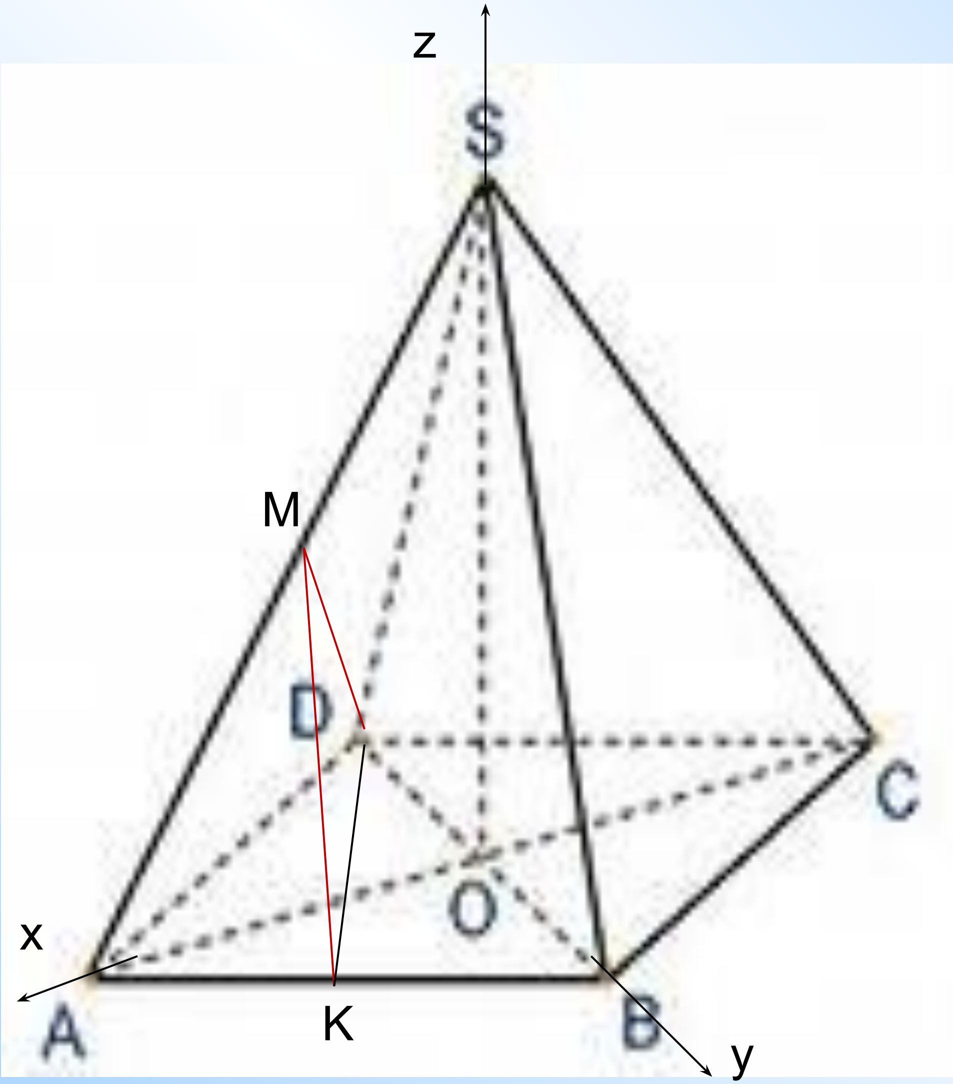
В прямоугольном Δ AOS: AO=3, SO=4.

Составим уравнение плоскости (MKD):

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

A(3;0;0),D(0;-3;0), S(0;0;4), M(3/2;0;2)

$$\begin{cases} 3A+D=0 \\ -3B+D=0 \\ (3/2)A+2C+D=0 \end{cases}$$



A= (- 1/3)D, B=(1/3)D, C=(-1/4)D.
Уравнение плоскости (МКD):
(-1/3)Dx+(1/3)Dy+(-1/4)Dz+D=0,
(-1/3)x+(1/3)y+(-1/4)z+1=0.
Определим расстояние от точки B(0;3;0) до плоскости (МКD) по формуле d= $\frac{|A*x_0+B*y_0+C*z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

d=|1+1|/$\sqrt{1/9+1/9+1/16}$=$\sqrt{41}$/12

Ответ: $\sqrt{41}$/12

Спасибо за внимание!!!