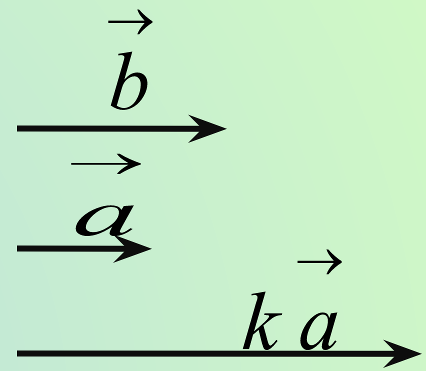
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Геометрия 9 класс

Лемма: Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq 0$, то существует такое число k, что

$$\vec{b} = k\vec{a}$$



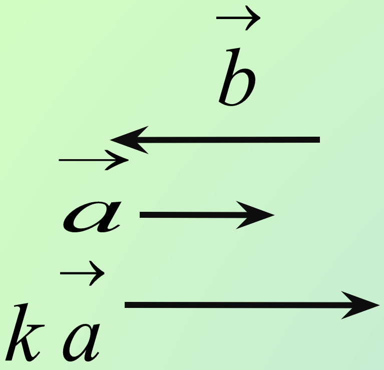
Доказательство:

$1)\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. *Возьмём число* $k = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$; *т.к.* $k \geq 0$,

то векторы $k\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *сонаправлены. Кроме*

того их длины равны $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Поэтому $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$

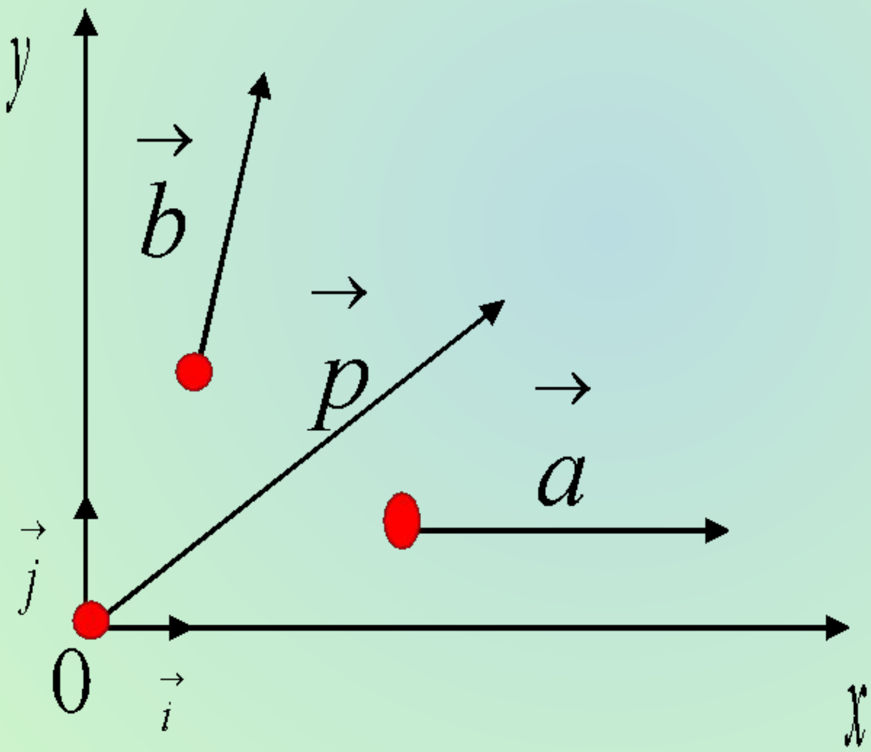


2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.Âîçüì¸ì ÷èñëî $k = -\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$, ò.ê. $k \langle 0$, òî âåêòîðû

$k\vec{a}$ è $\vec{b}$ ñíîâà ñîíàïðàâëå íû .Èõ äëèíû òàêæå ðàâíû

$\left|k\vec{a}\right| = |k| \cdot \left|\vec{a}\right| = \frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$ Ïîýòîìó $\vec{b} = k\vec{a}$

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – данные вектора. Вектор $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, x и y – некоторые числа, то говорят $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. x и y – коэффициенты разложения.



Теорема: Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

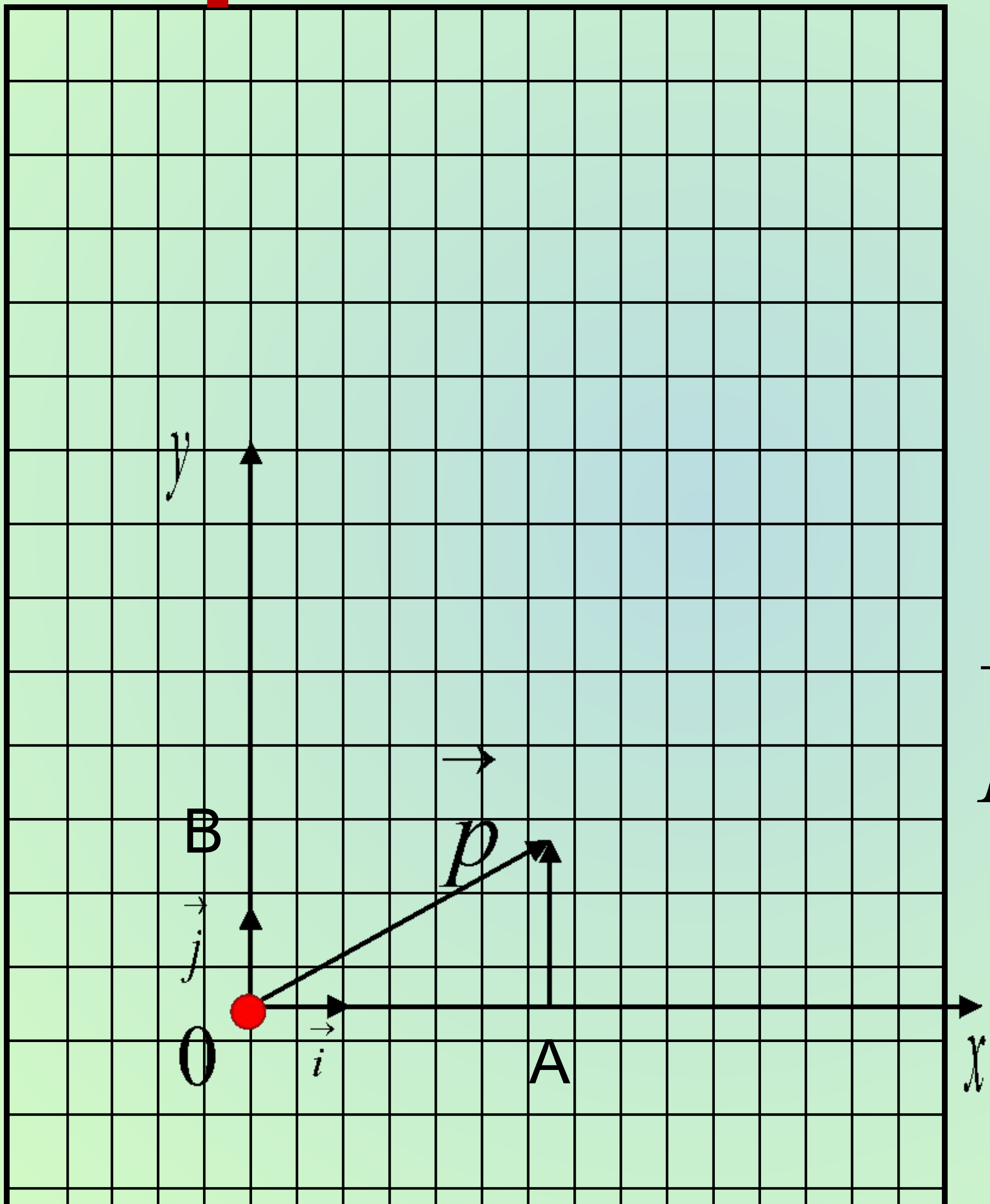
Доказательство: Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - неколлинеарные векторы. Докажем, что любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1. Пусть $\vec{p}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Тогда $\vec{p} = y\vec{b}$, где y – некоторое число

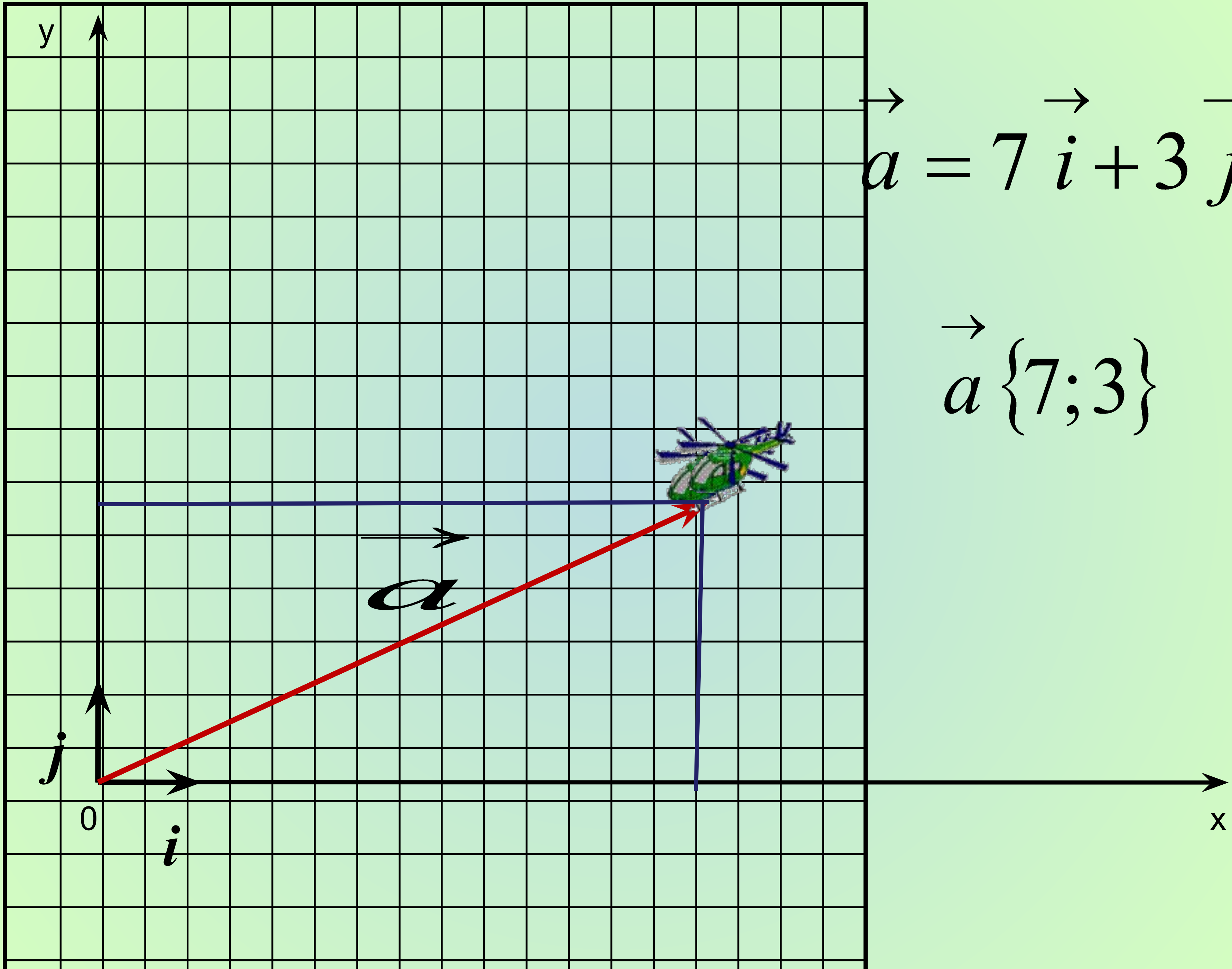
$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, т.е. $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Координаты вектора



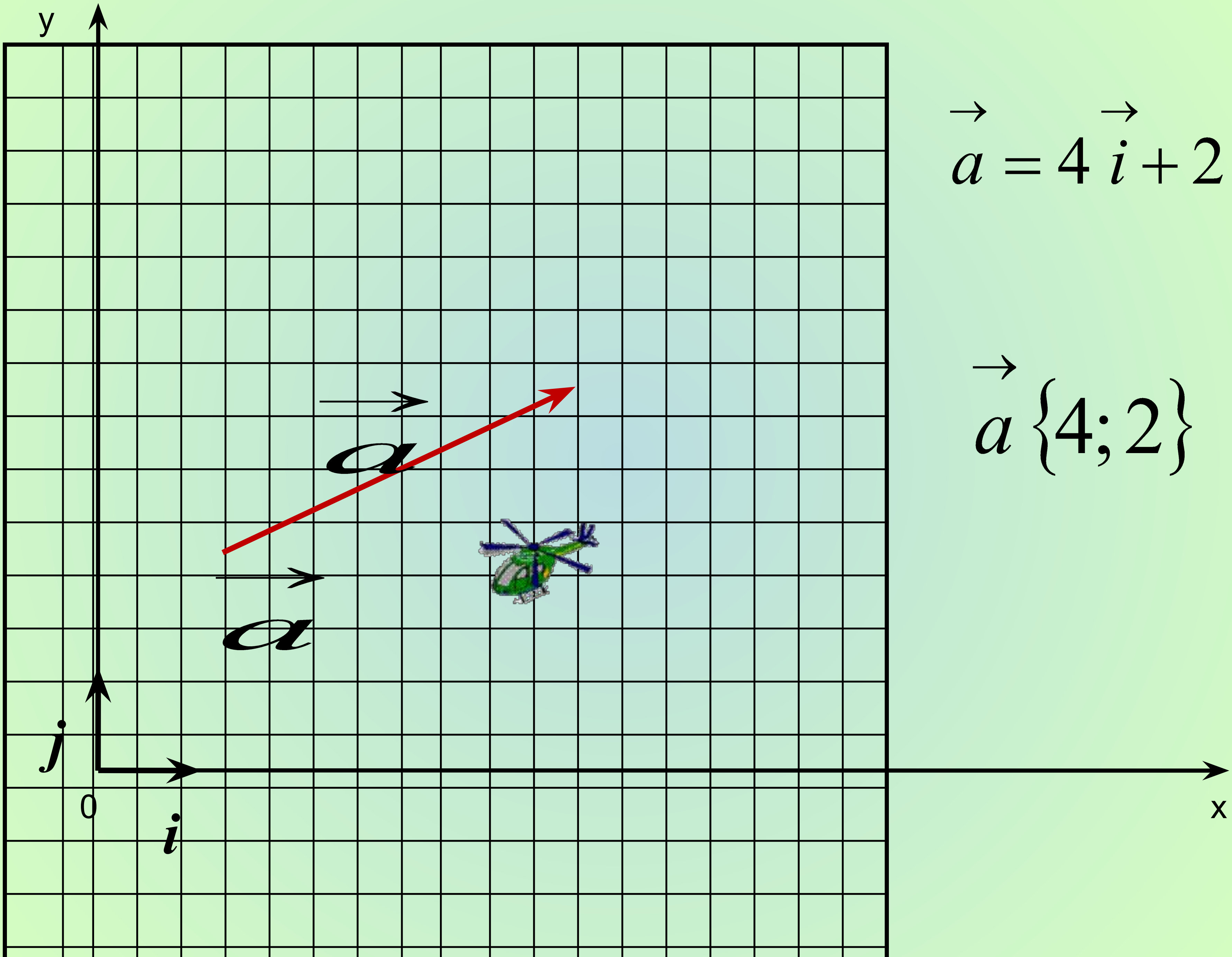
$$\vec{p}\{x; y\}$$

$$\vec{p} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$



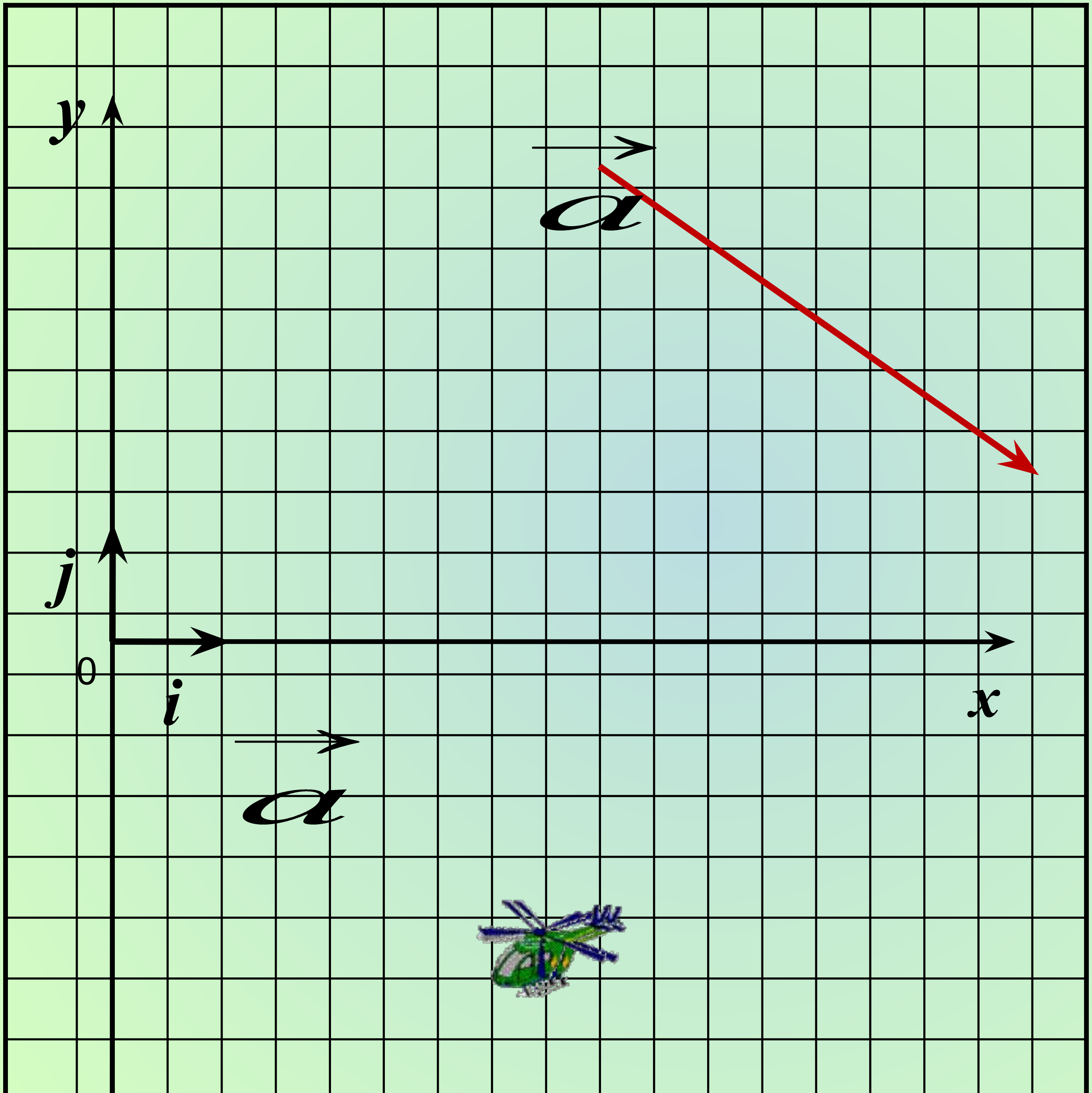
$$\vec{a} = 7\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$$

$$\vec{a}\,\{7;3\}$$



$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{a}\,\{4;2\}$$



$$\vec{a} = 4\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$$

$$\vec{a}\,\{4; -3\}$$

1^0. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. $\vec{a}+\vec{b}=(x1+x2)\vec{i} + (y1+y2)\vec{j}$

2^0. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. $\vec{a}-\vec{b}=(x1-x2)\vec{i} + (y1-y2)\vec{j}$

3^0. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. $k\vec{a} =kx\vec{i} +ky\vec{j}$