Задание В4

Решение прямоугольных треугольников

900igr.net

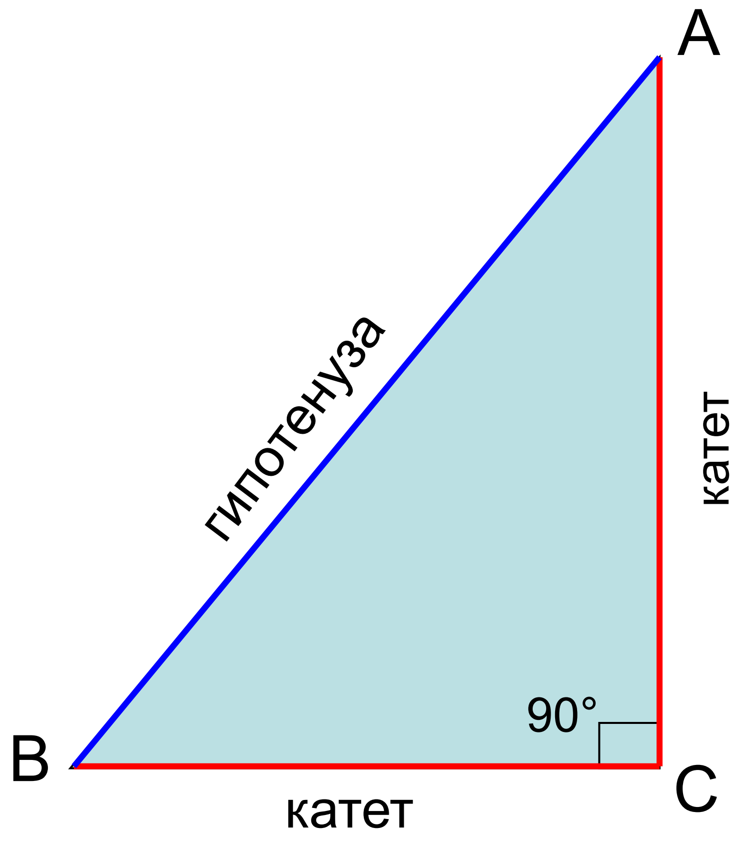
Часть 1

Теорема Пифагора

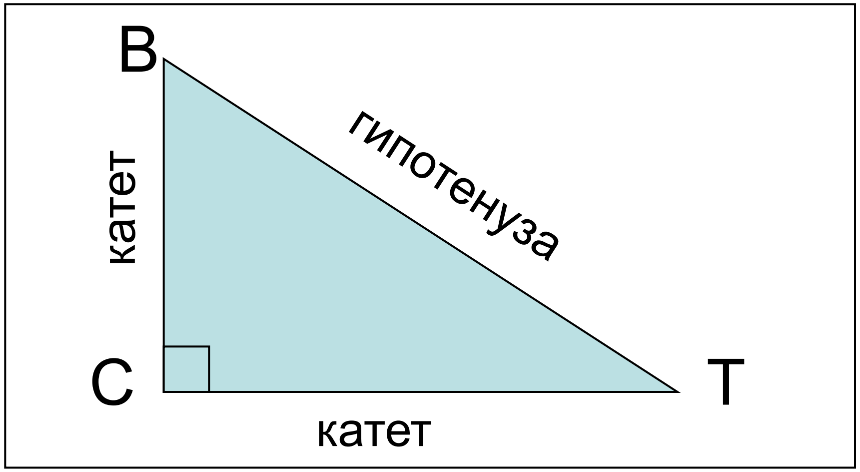
Прямоугольный треугольник

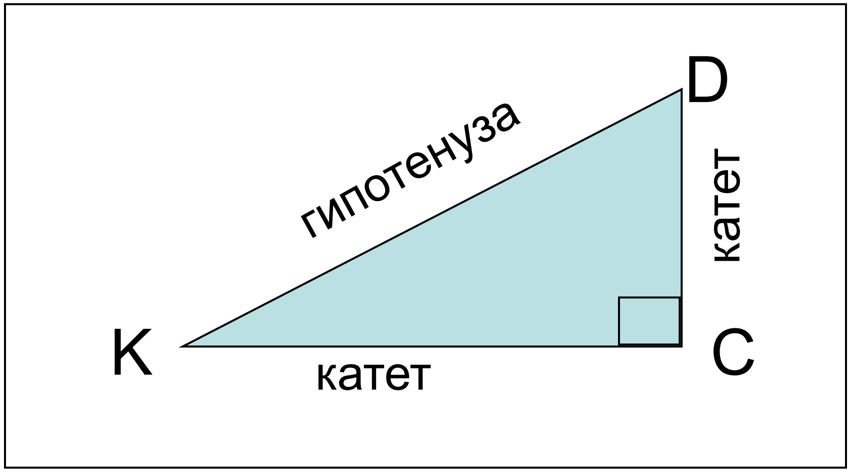
- Теорему Пифагора применяют для прямоугольных треугольников, то есть для треугольников у которых один угол равен 90 градусов.

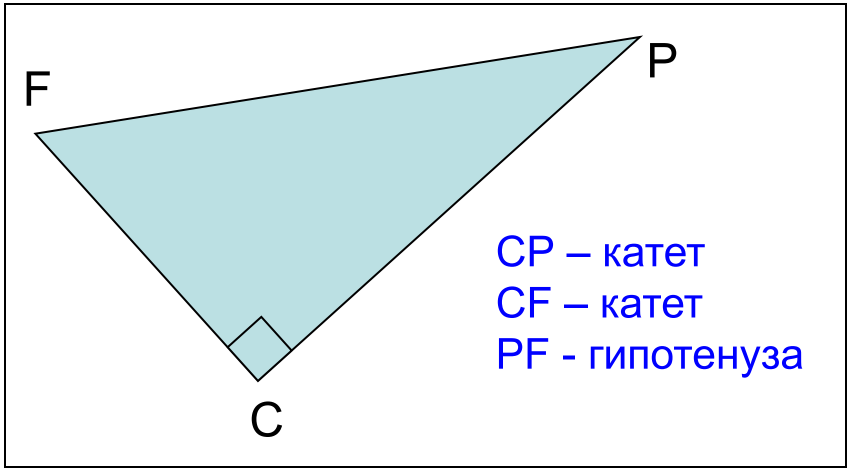
  Стороны прямоугольных треугольников имеют названия.
- Стороны, которые прилежат к прямому углу - **КАТЕТЫ.**
- Сторона, лежащая напротив прямого угла - **ГИПОТЕНУЗА**

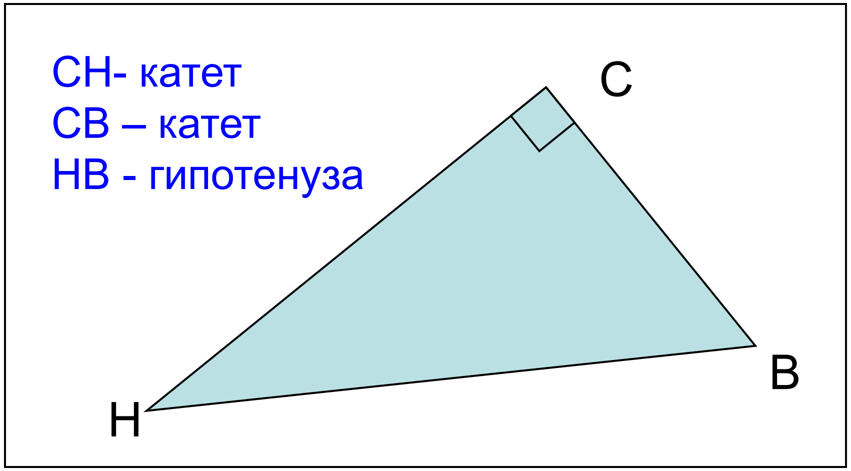


Найдите катеты и гипотенузу в данных треугольниках

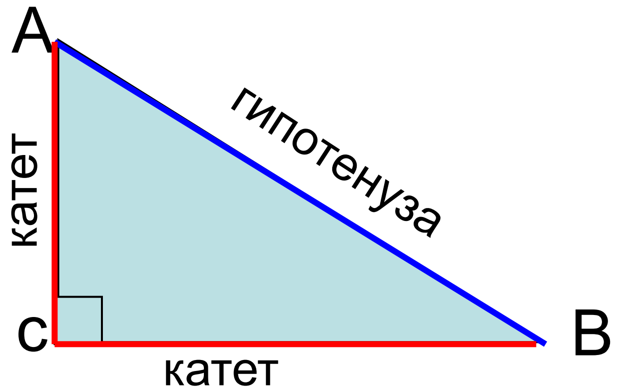








Теорема Пифагора



$AB^2 = AC^2 + CB^2$

AC - катет

BC - катет

AB -гипотенуза

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

Применение Теоремы Пифагора. Найти гипотенузу по двум катетам

$AC^2 + CB^2 = AB^2$

$К^2 + К^2 = Г^2$

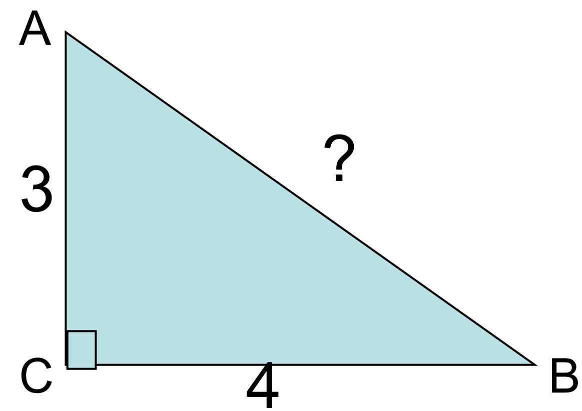
$3^2 + 4^2 = Г^2$

$9 + 16 = Г^2$

$25 = Г^2$

$Г = \sqrt{25}$

AB **=5**



Применение Теоремы Пифагора. Найти катет по гипотенузе и другому катету

$BC^2 = AB^2 - AC^2$

$Г^2 – К^2 = К^2$

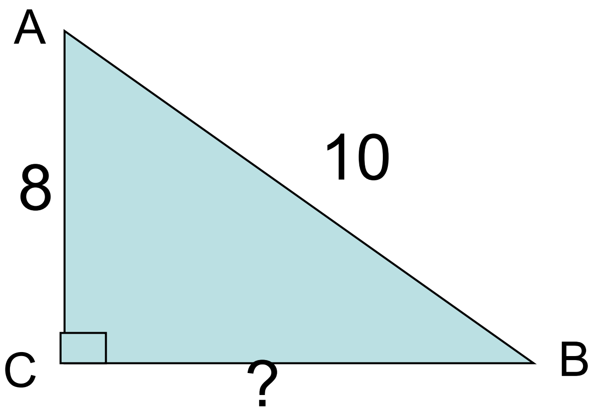
$10^2 – 8^2 = К^2$

$100 – 64 = К^2$

$36 = К^2$

$К = \sqrt{36}$

CB **= 6**



Применение Теоремы Пифагора

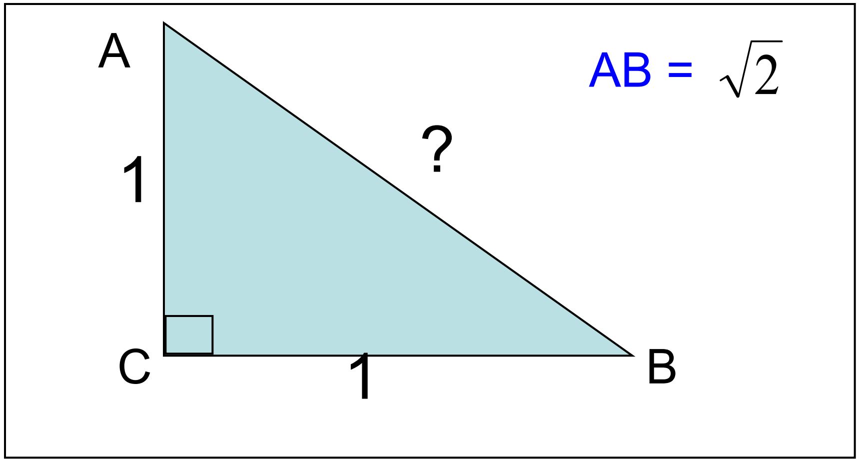
1. $К^2 + К^2 = Г^2$

$1^2 + 1^2 = Г^2$

$1 + 1 = Г^2$

$2 = Г^2$

$Г = \sqrt{2}$



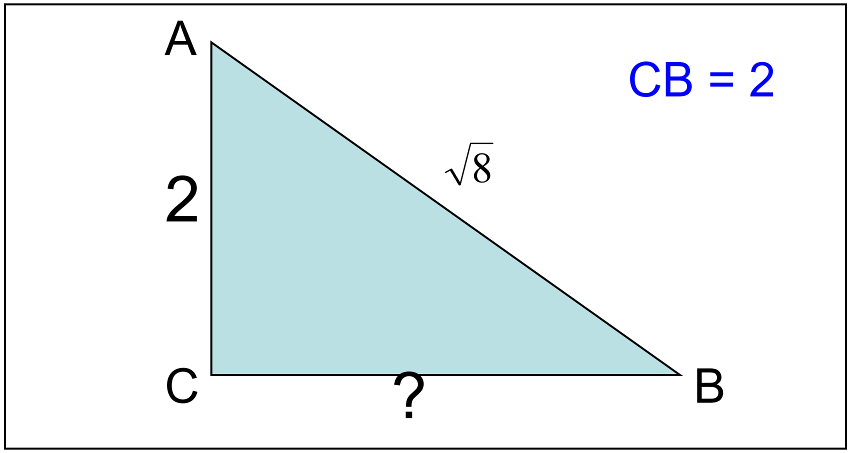
2. $Г^2 – К^2 = К^2$

$(\sqrt{8})^2 – 2^2 = К^2$

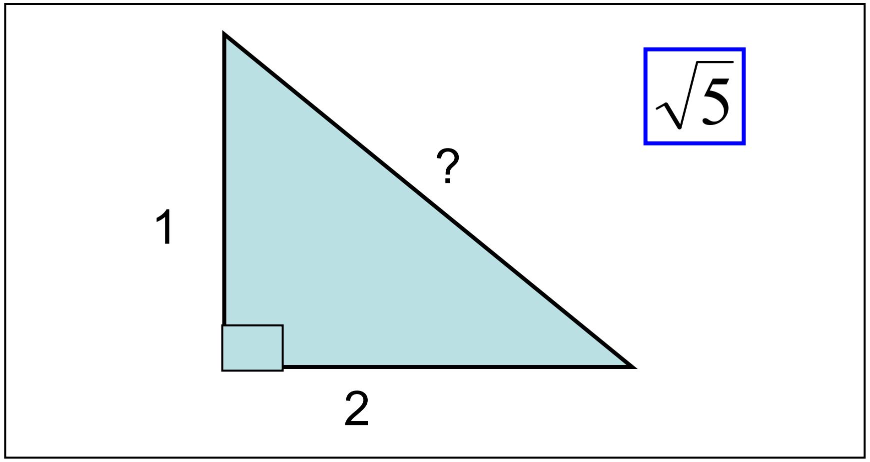
$8 – 4 = К^2$

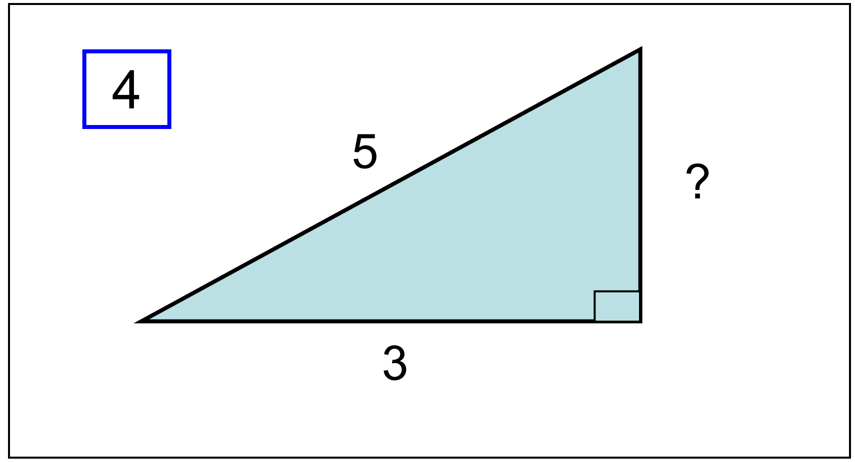
$4 = К^2$

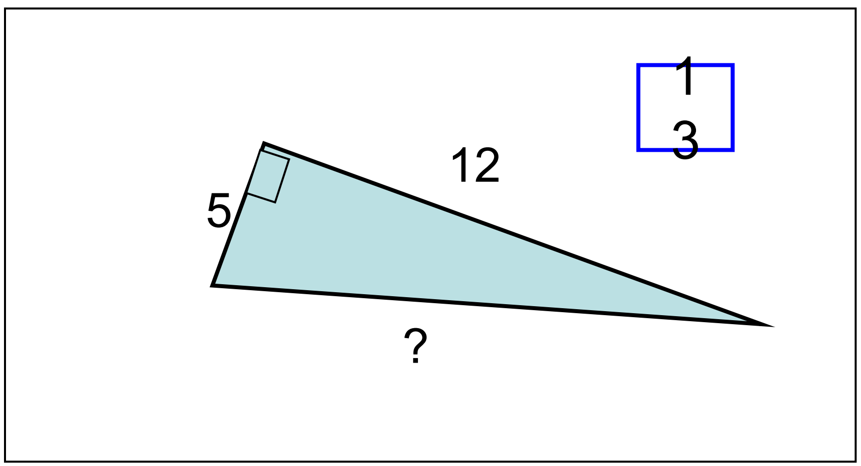
$К = 2$

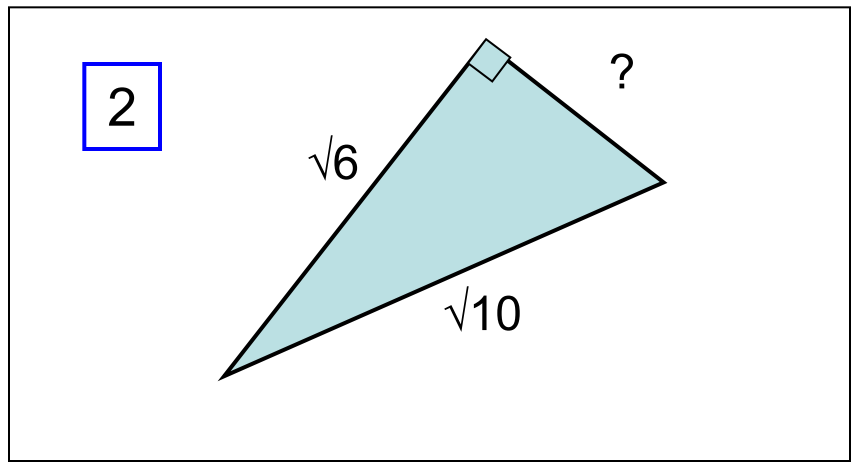


Упражнения









Часть 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА

ТАНГЕНСА ОСТРОГО УГЛА

В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

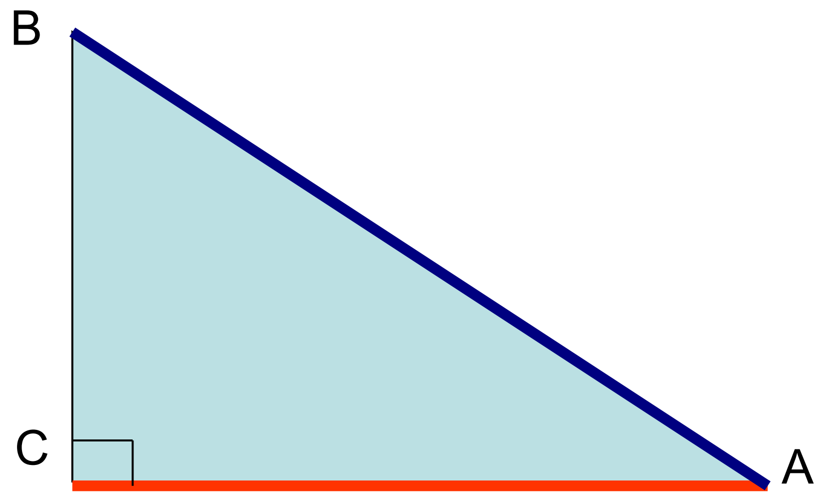
- Синус, косинус, тангенс – это дроби, которые описывают величину угла. В числителе и в знаменателе такой дроби стоит длина одной из сторон.

- Как разобраться длину, какой стороны надо поставить в числитель или в знаменатель?

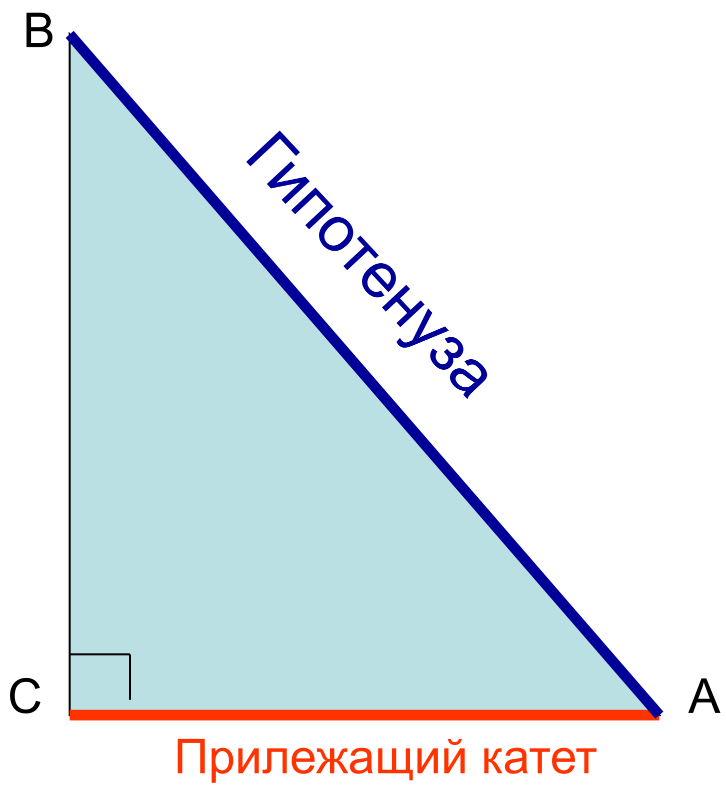
Определение косинуса

- Просто косинуса не бывает!!!! Косинус описывает величину какого-то угла. Итак, надо, например, найти cos A (т.е. косинус угла А).

- Найдем этот угол в треугольнике. Обведем «пожирнее» его стороны.



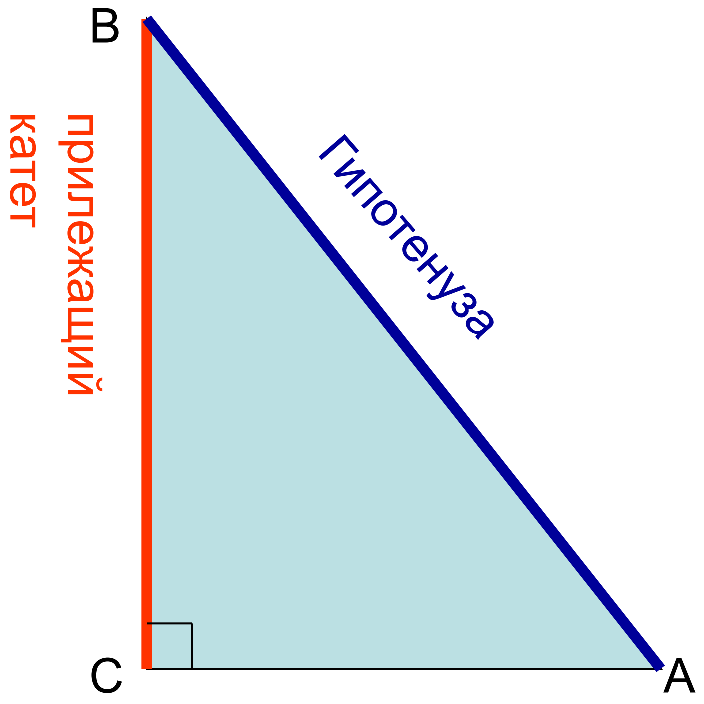
Определим cos A



- Косинус этого угла – это отношение тех сторон, которые обвели.
- Это дробь в числитель, которой записана меньшая (из обведенных сторон) , а в знаменатель большая.
- Большая сторона треугольни-ка - это гипотенуза(сторона, которая лежит напротив прямого угла)

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

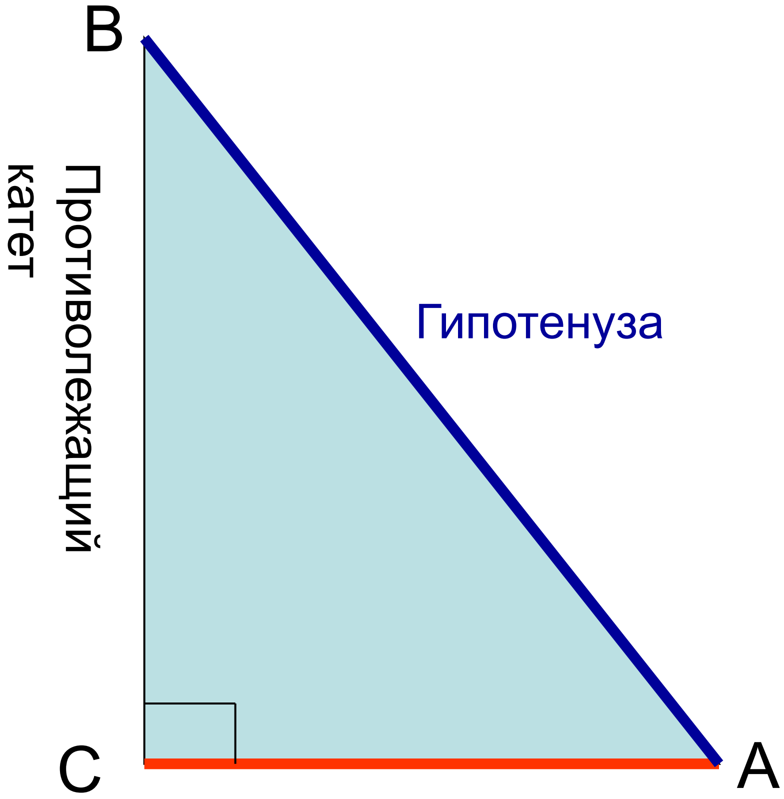
Определим cos B.



- Повторяем предыдущий алгоритм. Нашли угол B, обвели его стороны.
- Записали дробь в числителе, которая меньшая из обведенных сторон, а в знаменателе большая

$$\cos B = \frac{BC}{AB}$$

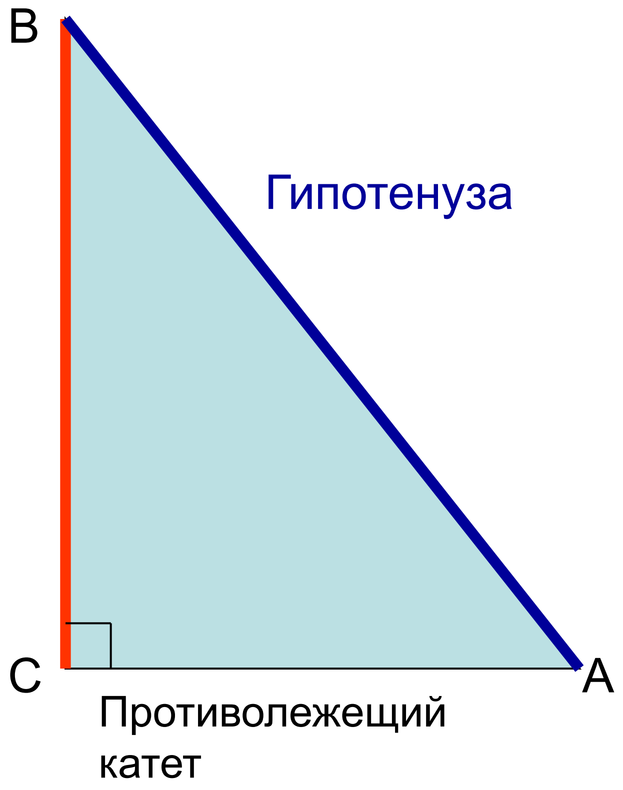
Определение синуса



- Определим sin A. Обведем стороны угла A.
- Синус этого угла - это дробь в числителе, которой та сторона, которую не обвели, а в знаменателе большая из обведенных.

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

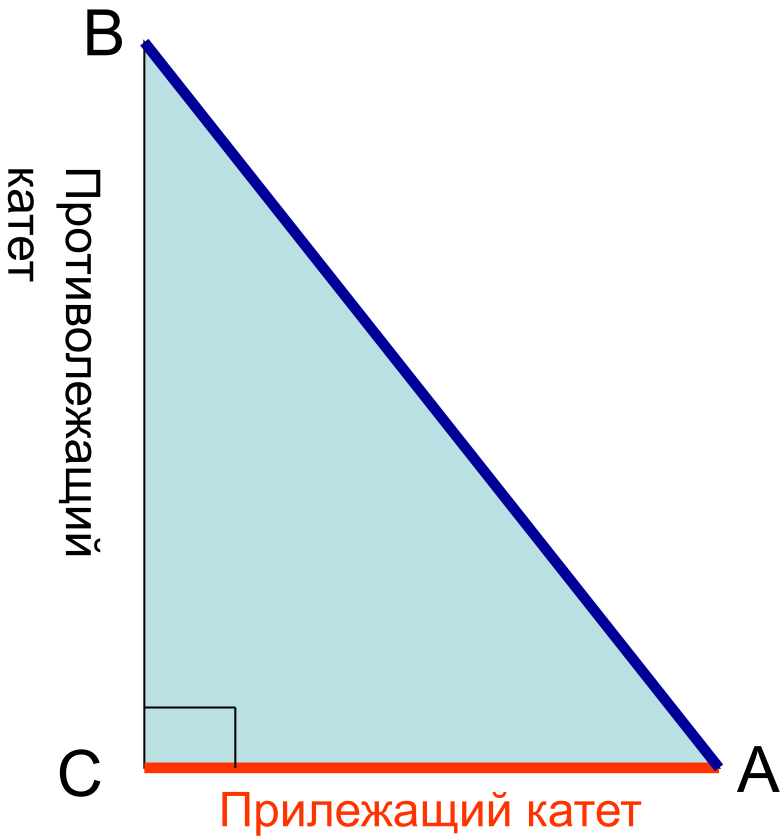
Определим sin B.



- Повторяем предыдущий алгоритм. Нашли угол B, обвели его стороны.
- Записали дробь в числителе, сторона, которую не обвели, а в знаменателе большая из обведенных.

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

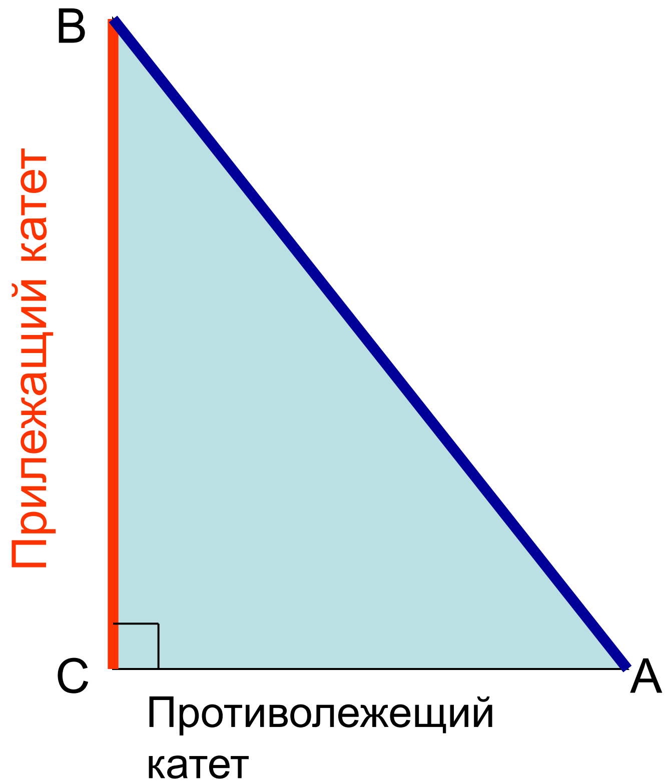
Определение тангенса



- Определим tg A. Обведем стороны угла A.
- Тангенс этого угла - это дробь в числителе, которой та сторона, которую не обвели, а в знаменателе меньшая из обведенных.

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$$

Определим tg B.



- Обведем стороны угла В.
- Тангенс этого угла - это дробь в числителе, которой та сторона, которую не обвели, а в знаменателе меньшая из обведенных

$$tg\ B = \frac{AC}{BC}$$

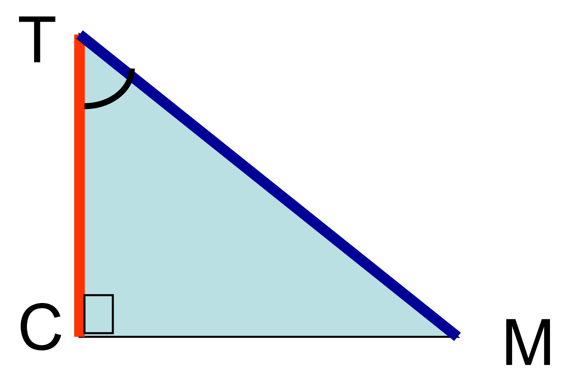
Найдите sin, cos, tg выделенного угла

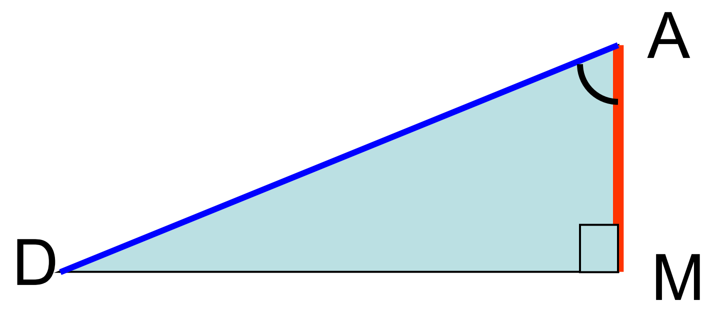
$$\cos\angle T = \frac{TC}{TM} \qquad \sin\angle T = \frac{CM}{TM}$$

$$tg\angle T = \frac{CM}{TC}$$

$$\cos\angle A = \frac{AM}{AD} \qquad \sin\angle A = \frac{DM}{AD}$$

$$tg\angle A = \frac{DM}{AM}$$

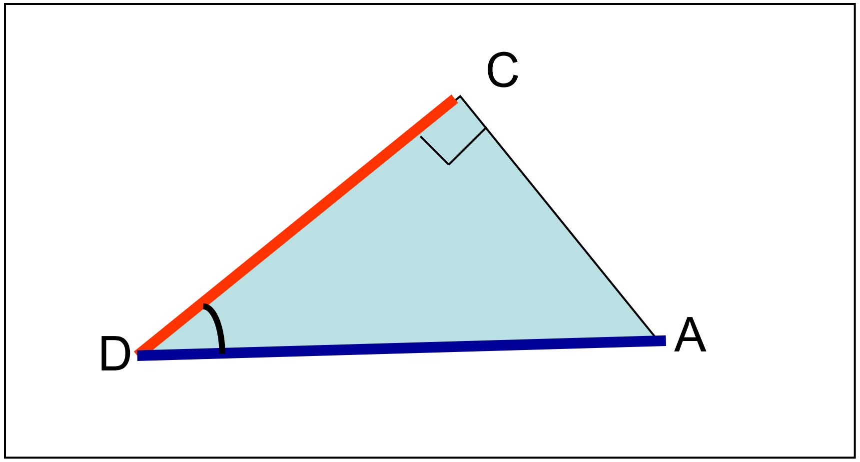




Найдите sin, cos, tg выделенного угла

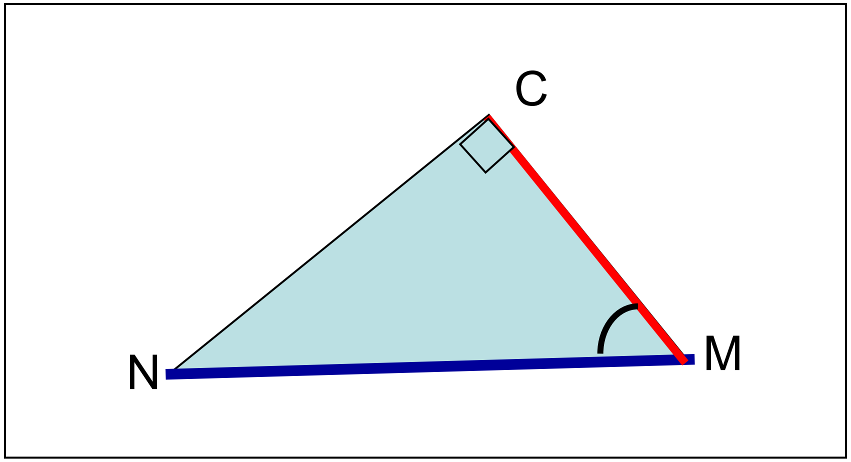
$$\cos\angle D = \frac{CD}{DA} \qquad \sin\angle D = \frac{CA}{DA}$$

$$tg\angle D = \frac{CA}{CD}$$

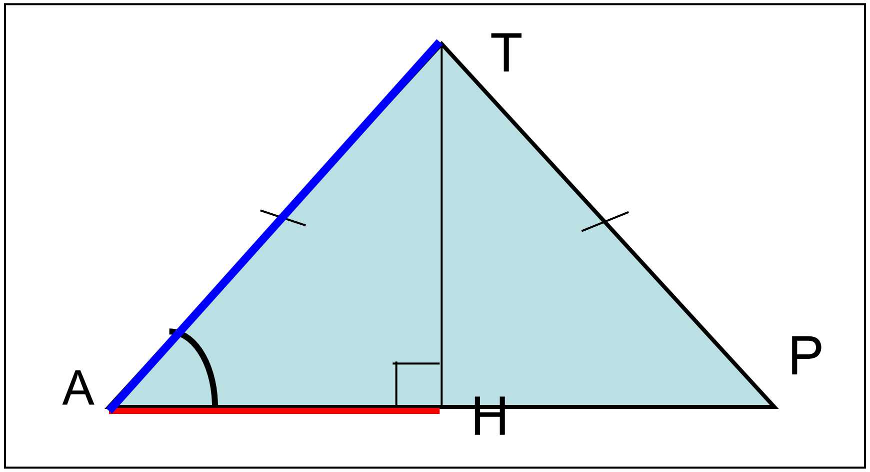


$$\cos\angle M = \frac{CM}{NM} \qquad \sin\angle M = \frac{CN}{NM}$$

$$tg\angle M = \frac{CN}{CM}$$

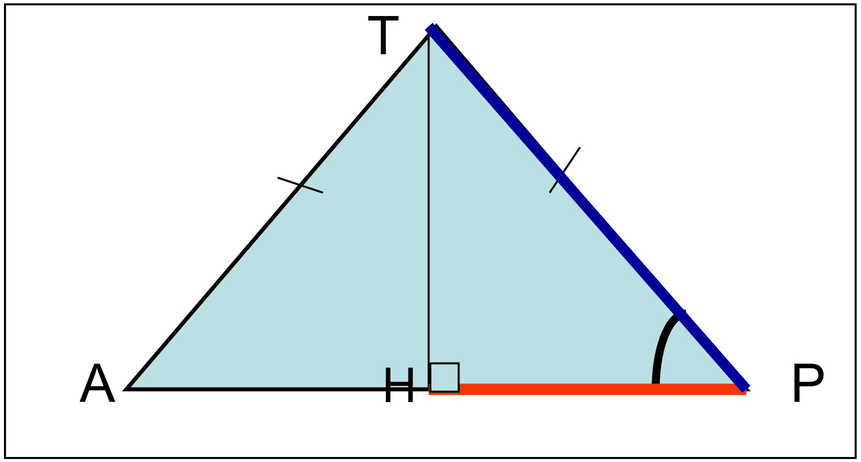


Найдите sin, cos, tg выделенного угла



$$\cos\angle A = \frac{AH}{AT} \qquad \sin\angle A = \frac{TH}{AT}$$

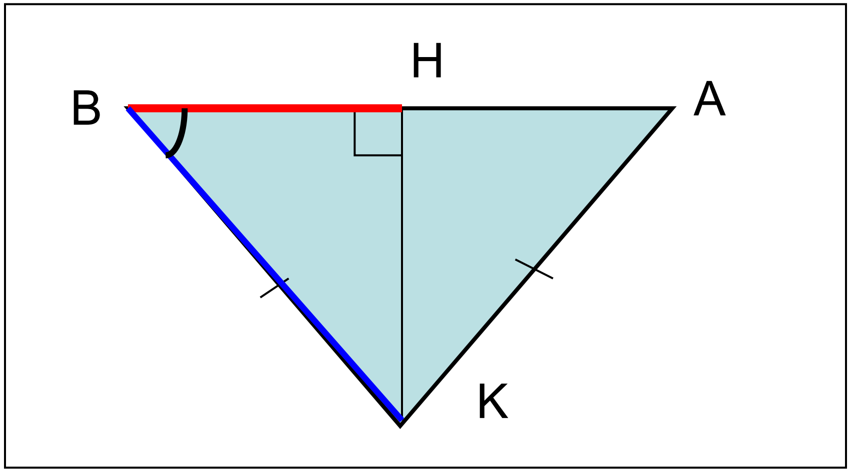
$$tg\angle A = \frac{TH}{AH}$$

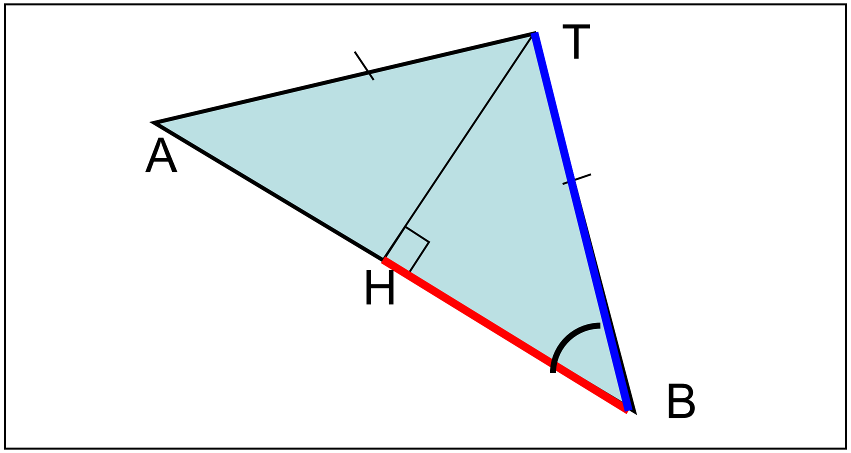


$$\cos\angle P = \frac{HP}{TP} \qquad \sin\angle P = \frac{TH}{TP}$$

$$tg\angle P = \frac{TH}{HP}$$

Найдите sin, cos, tg выделенного угла





cos B = BH/BK

sin B = HK/BK

tg B = HK/BH

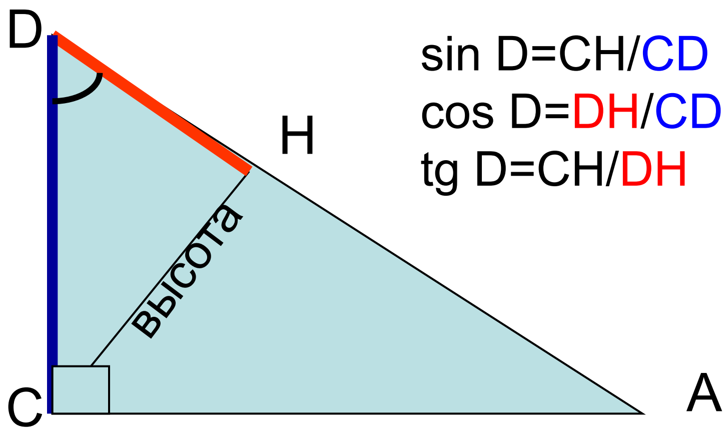
cos B = BH/BT

sin B = HT/BT

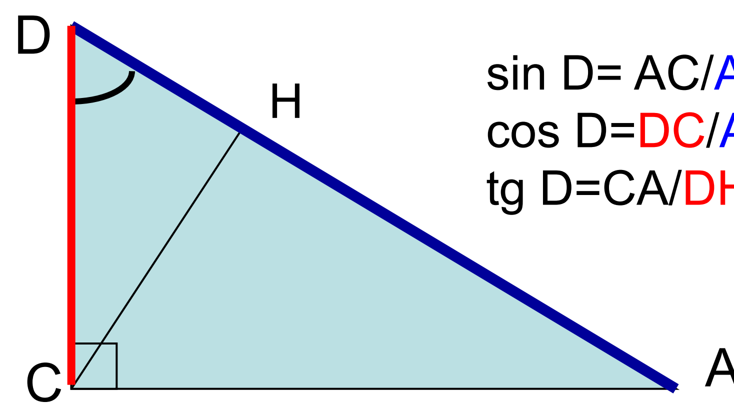
tg B = HT/BH

Два прямоугольных треугольника с общим острым углом

- Пусть дан прямоугольный треугольник, в котором проведена высота к гипотенузе.
- Угол D общий для ΔADC и ΔDCH
- Синус, косинус и тангенс угла А можно выразить через стороны одного и через стороны другого треугольника



sin D=CH/CD
cos D=DH/CD
tg D=CH/DH



sin D= AC/AD
cos D=DC/AD
tg D=CA/DH

Найдите sin, cos, tg выделенного угла

cos R = RC/BR

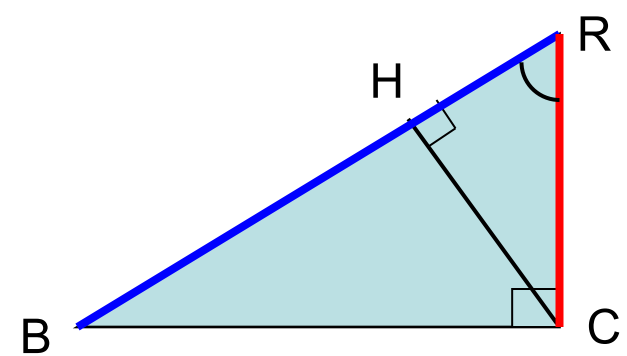
sin R = BC/BR

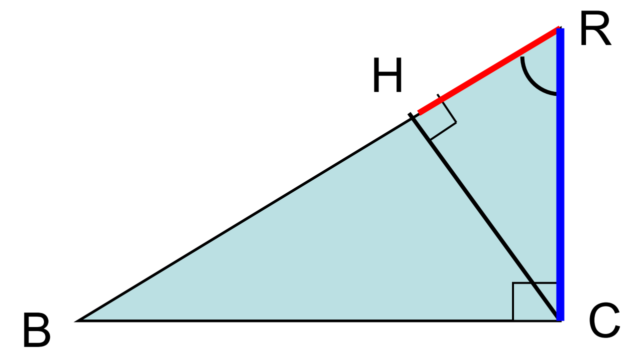
tg R = BC/RC

cos R = RH/CR

sin R = HC/CR

tg R = HC/RH





Часть 3

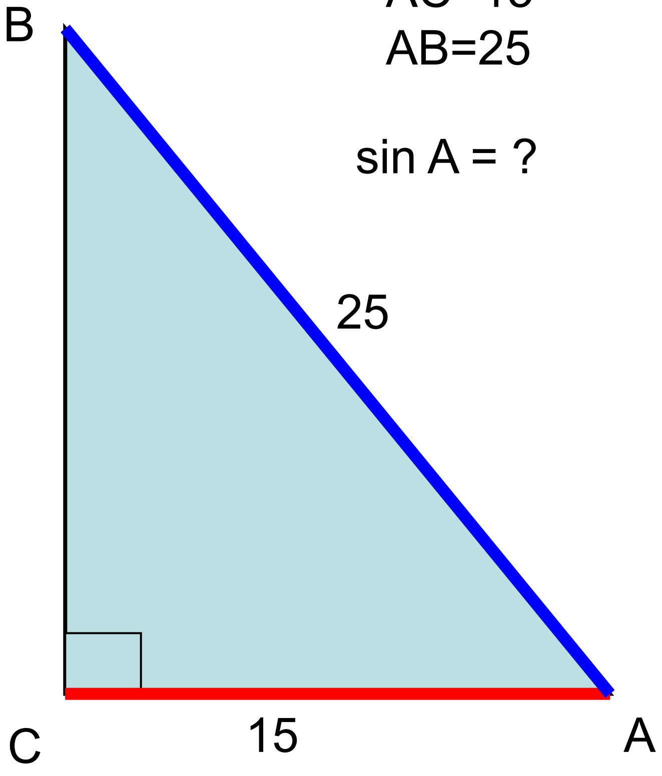
I и II тип задач

I тип: найти sin (cos, tg) по двум данным сторонам

Как решать:

- Выразить sin (cos, tg) через стороны треугольника по определению
- Подставить те стороны, которые даны в задаче
- При необходимости найти недостающую сторону по теореме Пифагора

Пример



AC=15
AB=25

sin A = ?

- Выразим sin A через стороны треугольника

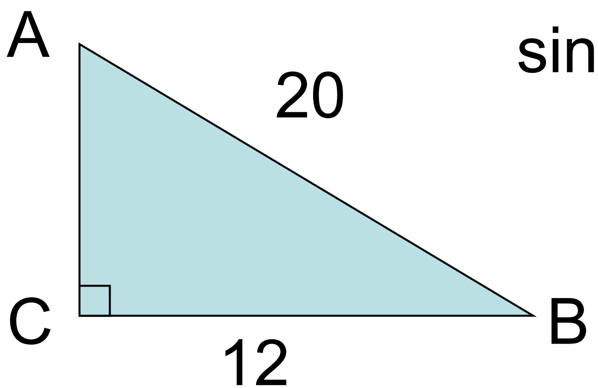
sin A = BC/AB

- AB=25, надо найти BC,
- По теореме Пифагора.

$$BC = \sqrt{625 - 225} = \sqrt{400} = 20$$

- sin A = 20/25=4/5=0,8

Упражнения

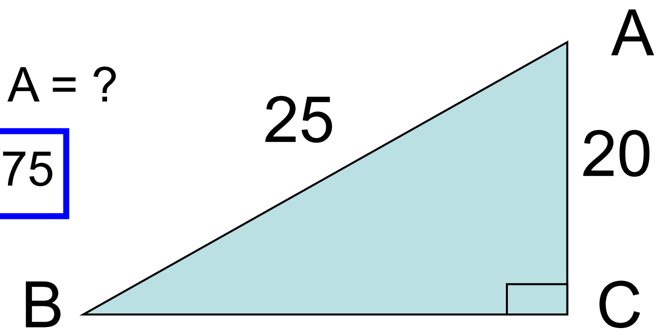


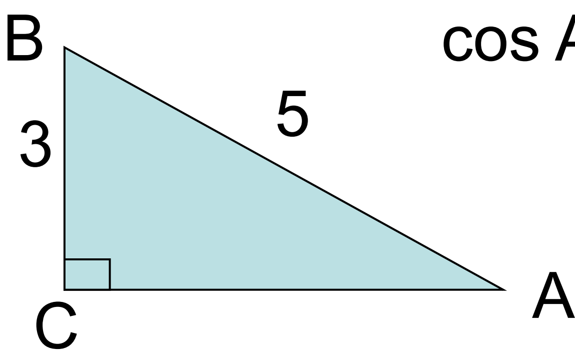
sin B = ?

0,8

t_g A = ?

0,75



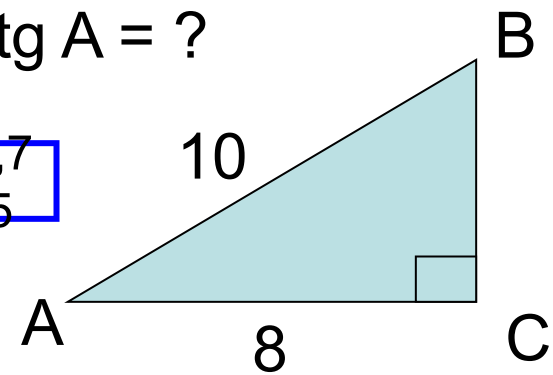


cos A = ?

0,8

tg A = ?

0,75

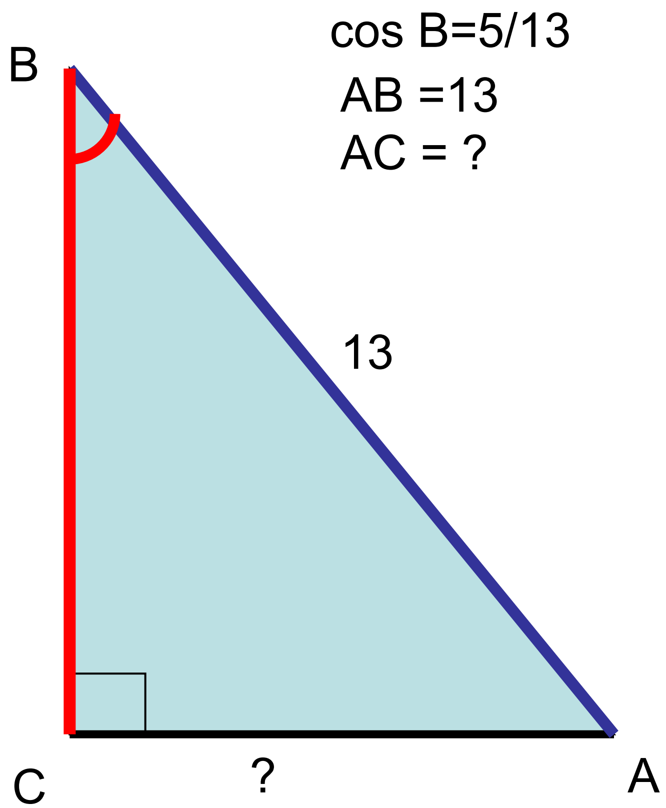


IIтип: найти сторону треугольника по данному sin (cos, tg) и стороне

Как решать:

- Выразить sin (cos, tg) через стороны треугольника по определению
- Подставить ту сторону, которая дана
- Приравнять к данному значению sin (cos,tg)
- Решить пропорцию.
- При необходимости найти недостающую сторону по теореме Пифагора

Пример



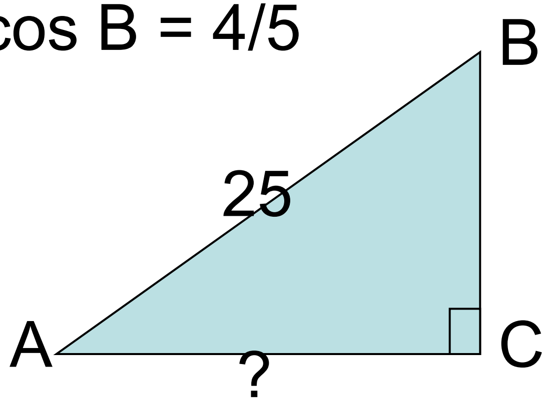
- Выразим cosB через стороны треугольника
  cosB = CB/AB
- BC/13=5/13,
  значит BC=5
- надо найти AC,
  по теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144}$$

BC=12

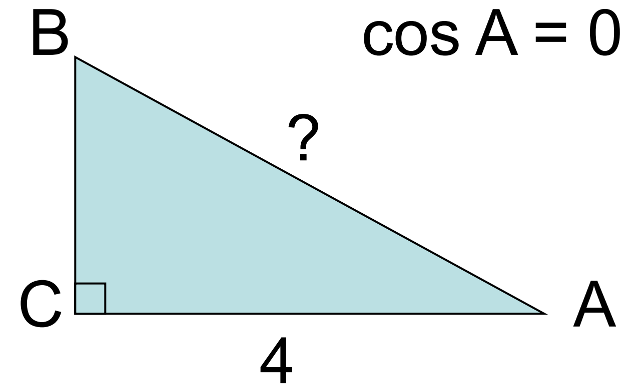
Упражнения

cos B = 4/5



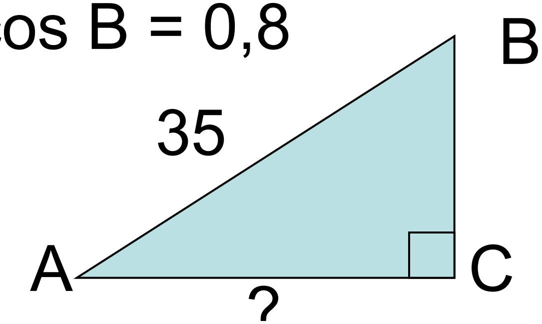
15

cos A = 0,5



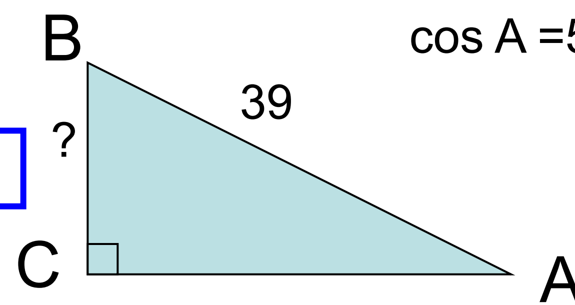
8

cos B = 0,8



21

cos A =5/13



36

Часть 4

Основное тригонометрическое тождество

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

- Эта формула позволяет по данному значению синуса острого угла прямоугольного треугольника найти значение косинуса и наоборот
- $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$

- $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$

Применение основного тригонометрического тождества

$\sin A = 3/5$

$\cos A = ?$

$\cos A = \sqrt{1 - (3/5)^2}$

$\cos A = \sqrt{1 - 9/25}$

$\cos A = \sqrt{25/25 - 9/25}$

$\cos A = \sqrt{16/25}$

$\cos A = 4/5$

$\cos A = \sqrt{13}/7$

$\sin A = ?$

$\sin A = \sqrt{1 - (\sqrt{13}/7)^2}$

$\sin A = \sqrt{1 - 13/49}$

$\sin A = \sqrt{49/49 - 13/49}$

$\sin A = \sqrt{36/49}$

$\sin A = 6/7$

Упражнения

$\sin A = 0{,}8$ $\cos A = ?$ $0{,}6$	$\cos A = 0{,}6$ $\sin A = ?$ $0{,}8$

$\cos A = \sqrt{7}/10$ $\sin A = ?$ $\sqrt{93}/10$	$\sin A = 12/13$ $\cos A = ?$ $5/13$

$\sin A = 3/\sqrt{34}$ $\cos A = ?$ $5/\sqrt{34}$	$\cos A=\sqrt{91}/10$ $\sin A = ?$ $0{,}3$

$\sin A = 5/\sqrt{41}$ $\cos A = ?$ $4/\sqrt{41}$	$\cos A =5/13$ $\sin A = ?$ $12/13$

Часть 5

III тип задач

IIIтип: найти сторону треугольника по данному sin (cos) и стороне

Как решать:

- Выразить sin (cos) через стороны треугольника
- Подставить ту сторону, которая дана, но **такой стороны нет** (в этом отличие от второго типа)
- По данному значению sin (cos) найти cos (sin)
- Выразить найденный cos (sin) через стороны
- Подставить ту сторону, которая дана в условии
- Приравнять к найденному значению
- Решить пропорцию.
- При необходимости найти недостающую сторону по теореме Пифагора

Пример

- Выразить sin через стороны треугольника

$\sin A = BC/AB$

- Подставить ту сторону, которая дана, но **такой стороны нет**
- По данному значению sinA найти cosA

$\cos A = \sqrt{1 - (3/5)^2} = 4/5$

- Выразить найденный cos через стороны

$\cos A = AC/AB$

- Подставить ту сторону, которая дана в условии

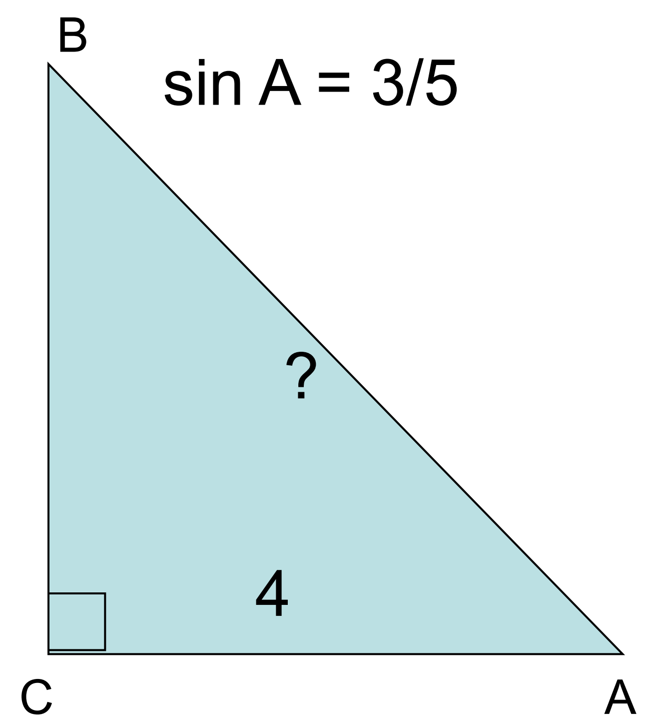
$\cos A = 4/AB$

- Приравнять к найденному значению cos

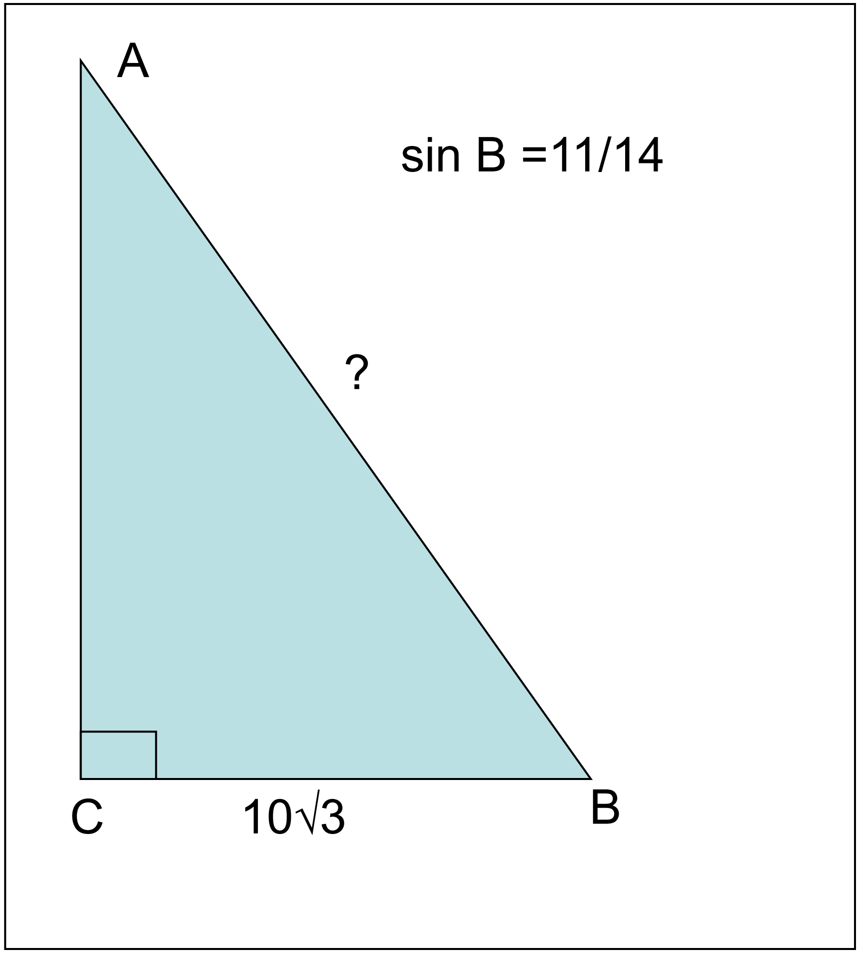
$4/5 = 4/AB$

- Решить пропорцию:

$AB = 5$



Упражнение



- $\sin B = AC/AB$
- $\cos B = \sqrt{1 - (11/14)^2}$

  $\cos B = \sqrt{1 - 121/196}$

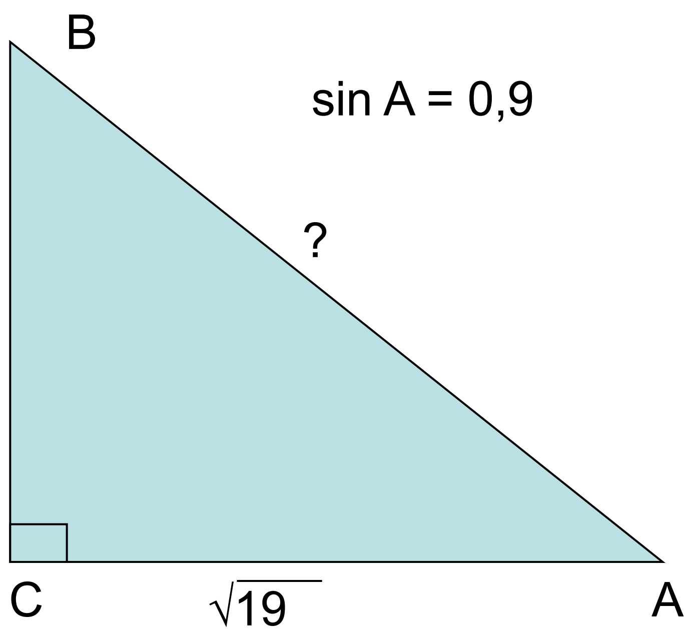
  $\cos B = \sqrt{75}/14 = 5\sqrt{3}/14$
- $\cos B = CB/AB$

  $\cos B = 10\sqrt{3}/AB$

$$\frac{10\sqrt{3}}{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

- $AB = 28$

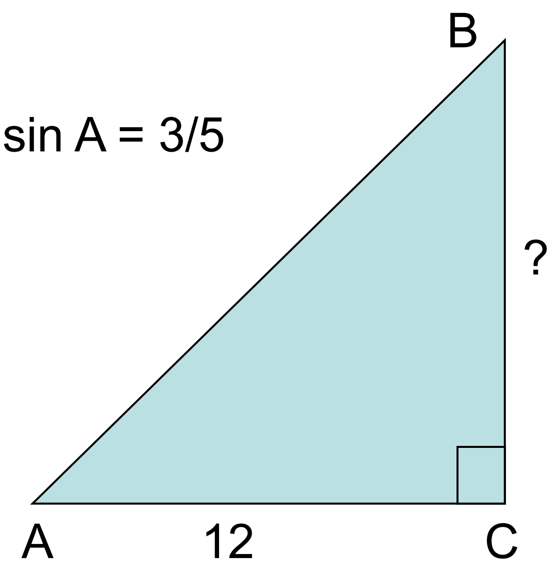
Проверь себя



sin A = 0,9

Ответ: AB = 10

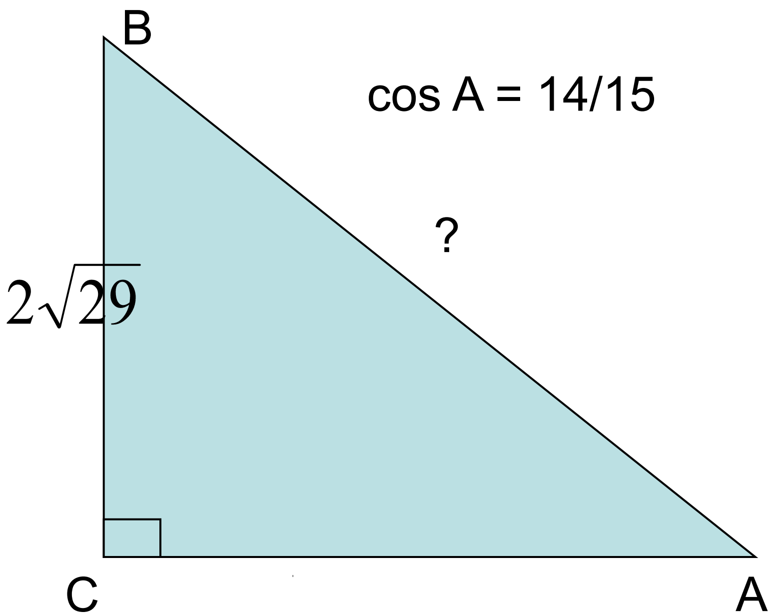
sin A = 3/5



Ответ: BC = 9

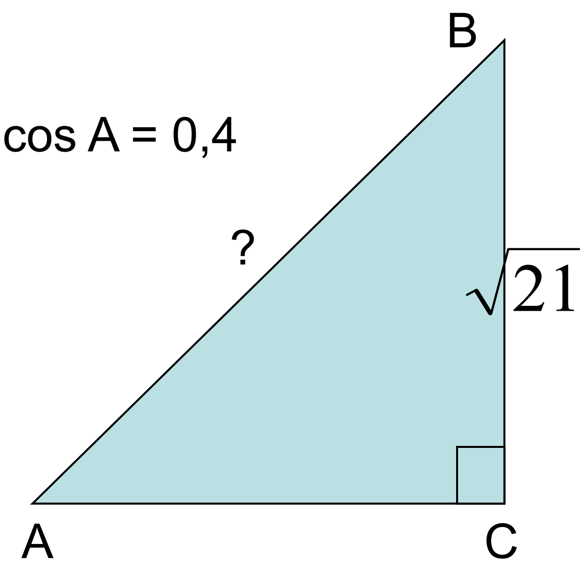
Проверь себя

cos A = 14/15



Ответ: AB = 30

cos A = 0,4



Ответ: AB =5

Часть 6

Свойства равнобедренного треугольника

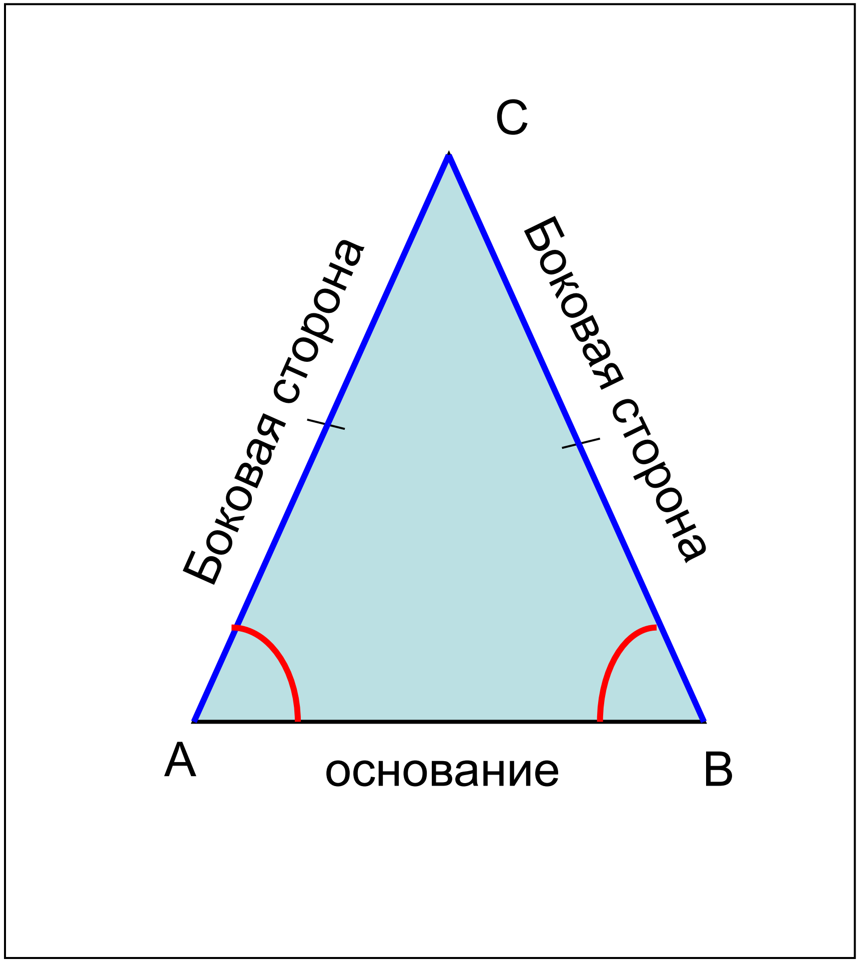
Равнобедренный треугольник

- Равнобедренный треуголь-ник - это треугольник, у которого две стороны равны.

- Эти стороны называются боковыми. Третья сторона называется основание.

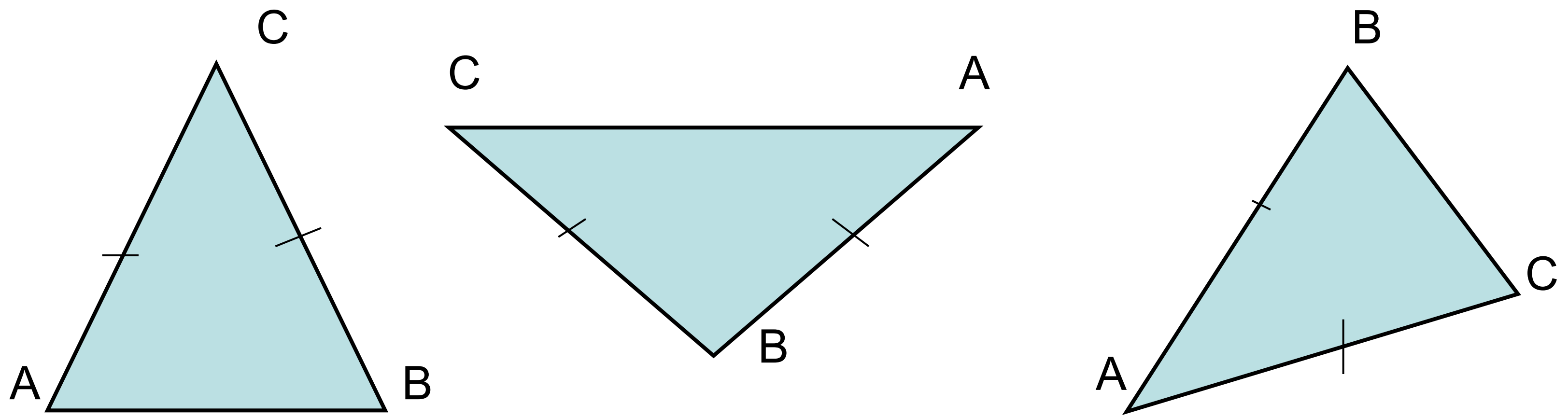
В равнобедренном треугольнике

- *Углы при основании равны.*



Упражнения

- Укажите в равнобедренных треугольниках основание и равные углы
- Важно помнить: основание не обязательно располагается горизонтально.



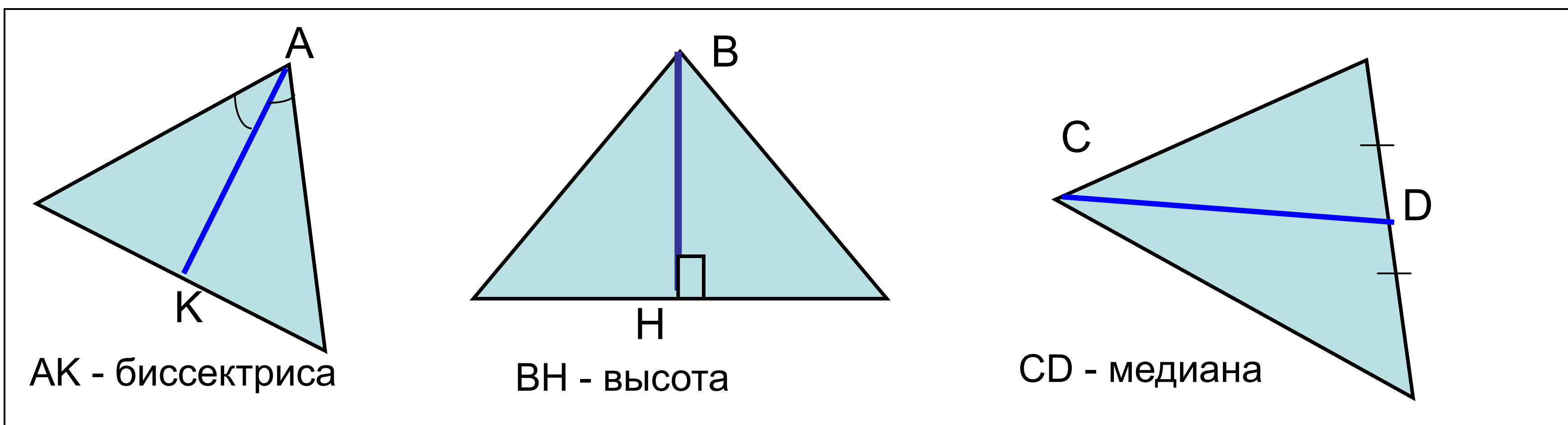
AB – основание $\angle A = \angle B$

CA - основание $\angle A = \angle C$

BC - основание $\angle B = \angle C$

Медиана, высота и биссектриса треугольника

- Высота треугольника – это отрезок, который соединяет вершину треугольника и точку противоположной стороны и является перпендикуляром к ней.
- Медиана треугольника – это отрезок, который соединяет вершину треугольника и середину противоположной стороны.
- Биссектриса треугольника – это отрезок, который соединяет вершину треугольника и точку противоположной стороны и лежит на биссектрисе угла, т. е. на луче который делит данный угол пополам.



AK - биссектриса

BH - высота

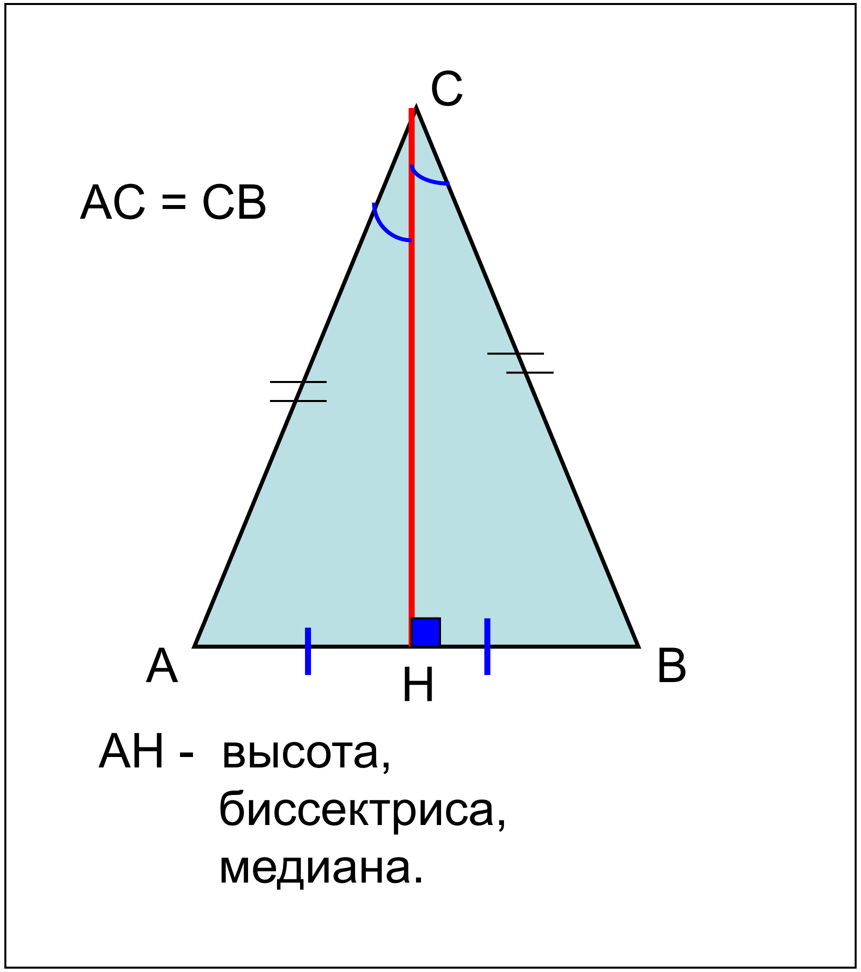
CD - медиана

Высота, проведенная к основанию в равнобедренном треугольнике

- *Высота, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.*

- *Медиана, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой*

- *Биссектриса, проведенная к основанию, является высотой и медианой*

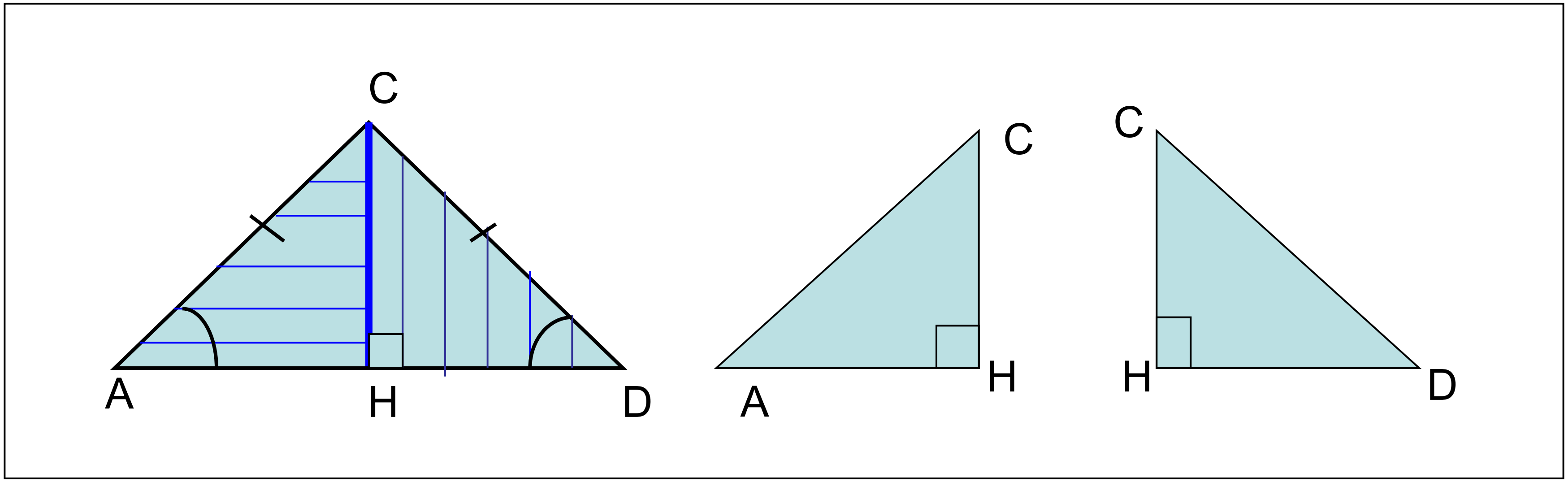


Часть 7

Равнобедренный треугольник, в котором проведена высота

Равнобедренный треугольник, в котором проведена высота к основанию

- Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, разбивает его на два равных треугольника.
- При решении задач вместо данного равнобедренного треугольника можно рассматривать его половину – прямоугольный треугольник.
- Фактически решение задачи сводится к решению прямоугольного треугольника (смотри I, II, III тип задач)



Пример. Задача, сводимая к задаче I типа

- Рассмотрим Δ BAH. Это прямоугольный треугольник, в котором даны две стороны и надо найти косинус угла. Это задача I типа.

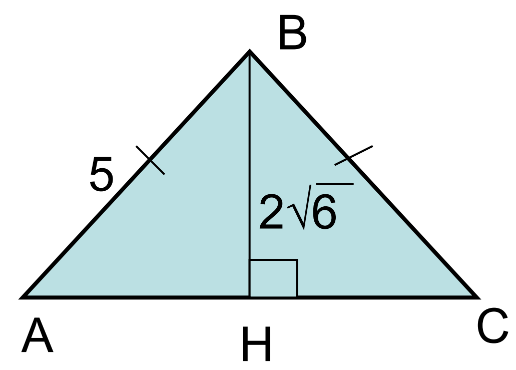
- Выразим косинус угла через стороны. Подставим данные значения.

  Очевидно, надо найти AH.

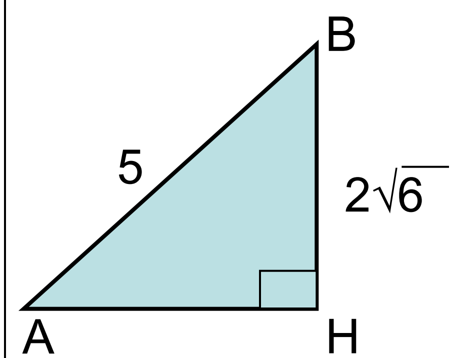
- По теореме Пифагора найдем:

$$AH = \sqrt{5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{25 - 24}$$

AH = 1



AB = BC
AB = 5
BH =$2\sqrt{6}$
cosA = ?



cosA = AH/AC
cosA = AH/5

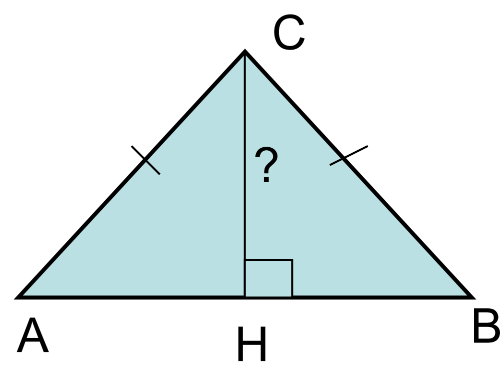
cosA = 1/5 =0,2

Пример. Задача, сводимая к задаче II типа

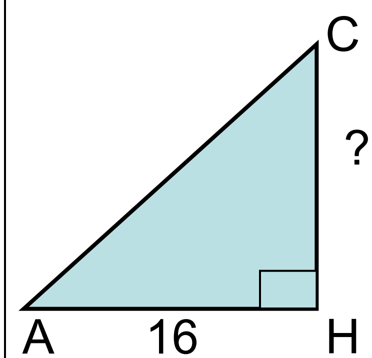
- AH = HB = 16   CH – высота, значит и медиана.
- Рассмотрим Δ CAH. Это прямоугольный треугольник, в котором дана сторона и косинус угла надо найти сторону. Это задача II типа.
- Найдем AC
- По теореме Пифагора найдем CH:

$$CH = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256}$$

$$CH = \sqrt{144} = 12$$



AC = BC
AB = 32
cosA = 4/5
CH =?



cosA = 4/5
cosA = AH/AC
AH/AC = 4/5
16/AC = 4/5
AC = 20

Решить задачи

- В треугольнике ABC
  AC=BC=4   AB=6
  Найдите cos A.

- В треугольнике ABC
  AC=BC= $\sqrt{61}$ AB=10
  Найдите tg A.

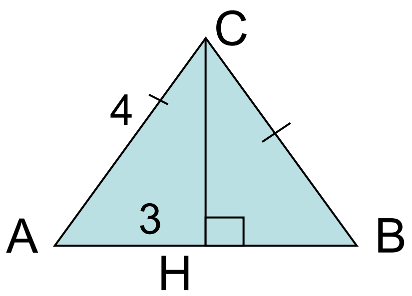
- В треугольнике ABC
  AC=BC=15   AB=18
  Найдите sin A.

- В треугольнике ABC
  AC=BC, AB=24, cos A = $\frac{4\sqrt{41}}{41}$
  Найдите высоту CH

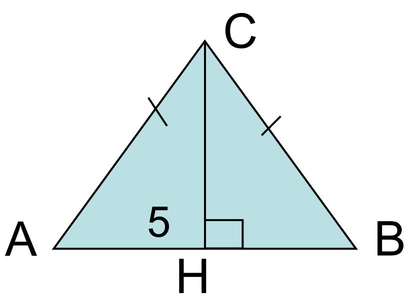
- В треугольнике ABC
  AC=BC=8,   sin B= $\frac{\sqrt{7}}{4}$
  Найдите AB

- В треугольнике ABC
  AC=BC, AB=2, sin A= $\frac{\sqrt{15}}{4}$
  Найдите AC.

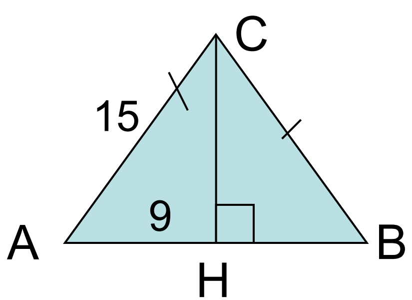
Проверь себя



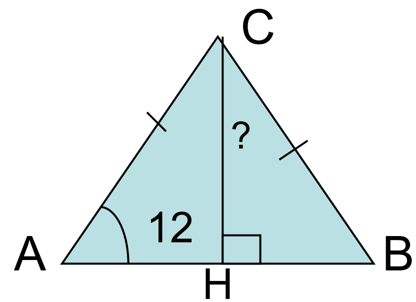
cos A = ¾=0,75



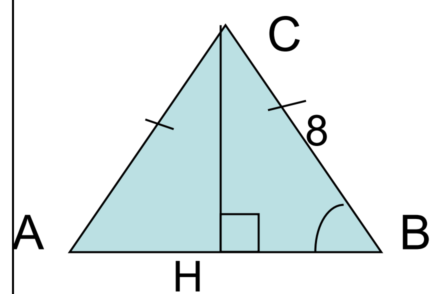
CH = 6
tg A = 6/5 = 1,2



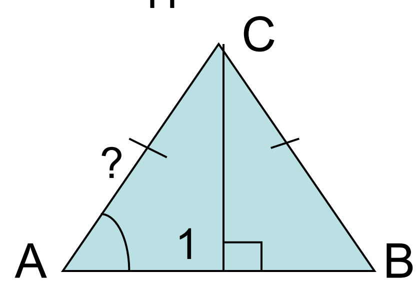
CH = 12
sin A=12/15= 0,75



AC= $3\sqrt{41}$
CH= 15



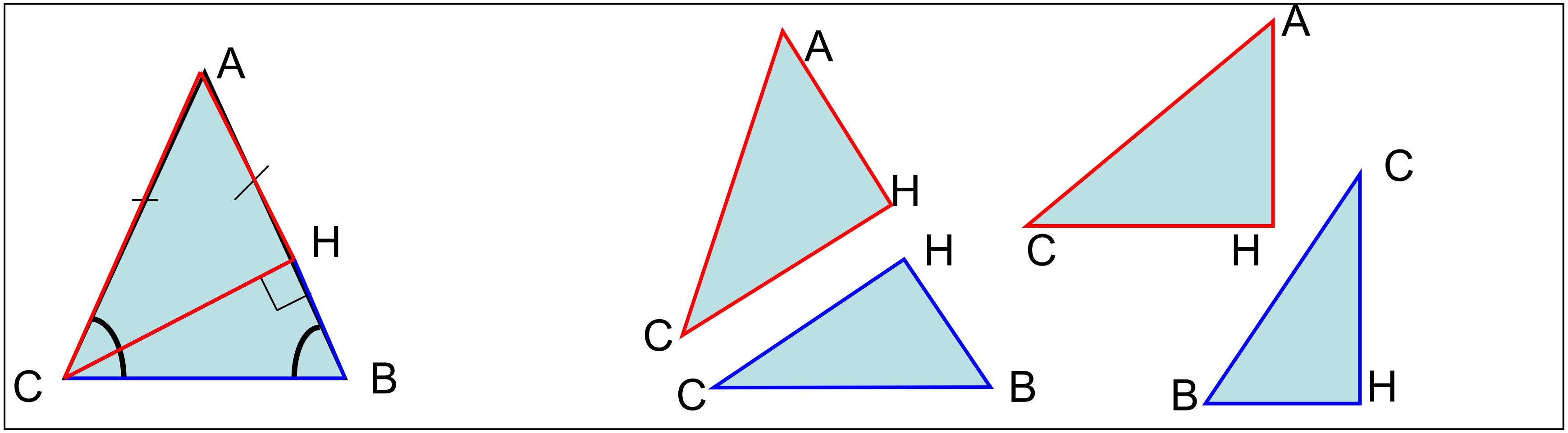
CH = $2\sqrt{7}$
HB = 6
AB = 12



cos A = ¼
AC = 4

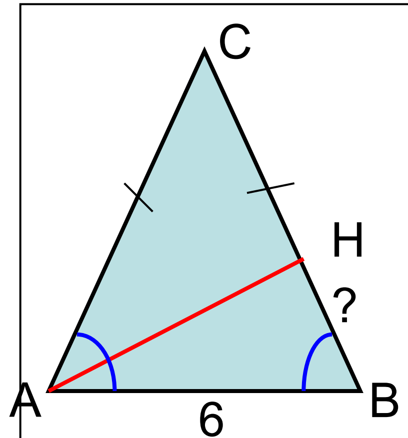
Равнобедренный треугольник, в котором высота проведена к боковой стороне

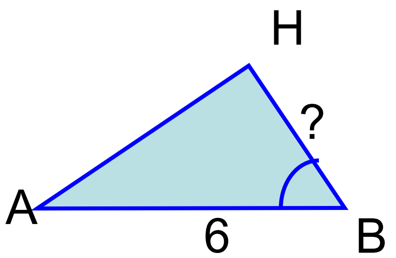
- Высота, проведенная к боковой стороне треугольник, в общем случае, не является медианой и биссектрисой.
- Но! Эта высота разбивает данный треугольник на два прямоугольных.
- Каждый из получившихся прямоугольных треугольников можно рассматривать отдельно. (I, II, III тип задач)
- Важно помнить, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, Поэтому вместо синуса одного из углов при основании можно рассматривать синус другого угла при основании. Это замечание верно для cos, и tg.

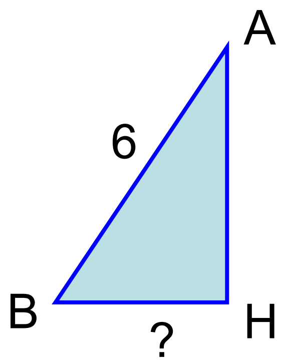


Пример

- В треугольнике ABC AC=BC, AB=6 cosA=3/5, AH –высота Найдите BH.
- Очевидно, что $\angle CAB = \angle B$
  Значит cosA = cosB = 3/5
- Данная задача сводится к задаче II типа: найти сторону прямоугольного треугольника
  по известному косинусу и стороне







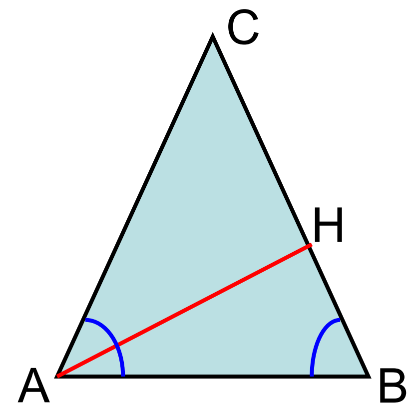
$$\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{6} = \frac{3}{5}$$

BH = 3,6

Упражнения

- В треугольнике ABC AC=BC, AB=20, высота AH=5. Найдите sinA
- В треугольнике ABC AC=BC, AB=25, высота AH=15. Найдите cosA

- В треугольнике ABC AB=BC, AC=16, высота CH=4. Найдите синус угла ACB



1задача

sinA= sinB= AH/AB

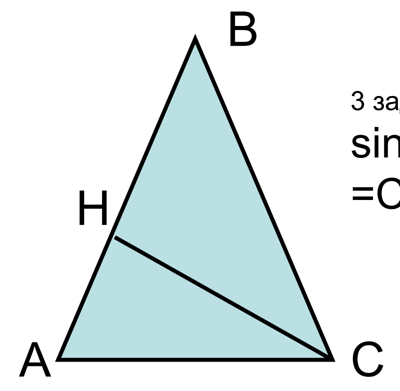
sin A=5/20= 0,25

2задача

cosA=cosB=HB/AB

HB= 20 (т.Пифагора)

cos A=20/25=0,8



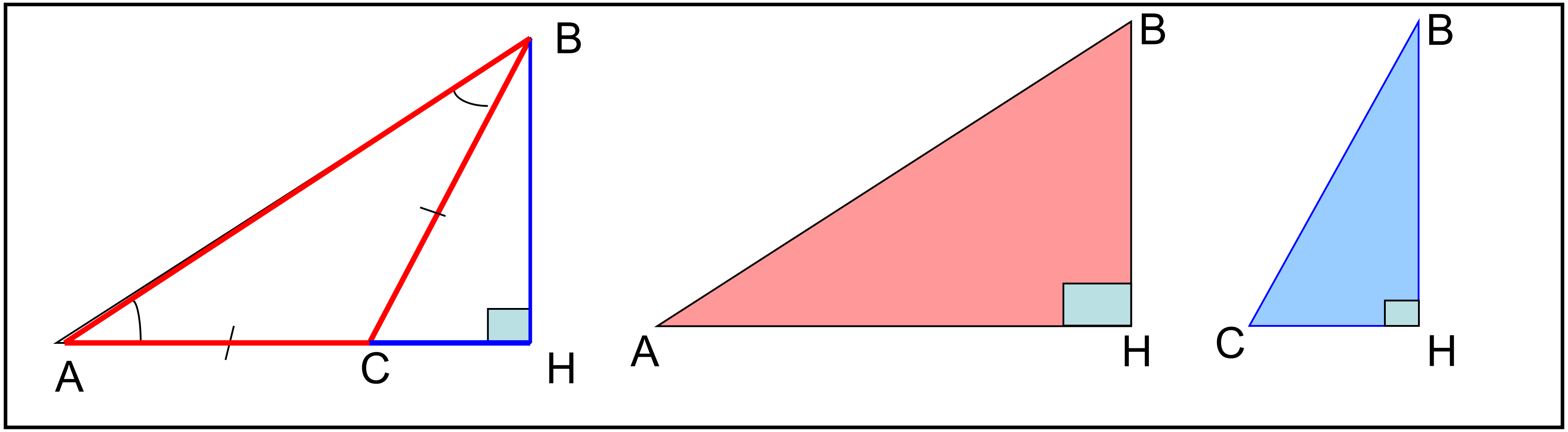
3 задача

sin ACB=sin A=

=CH/AC=4/16=0,25

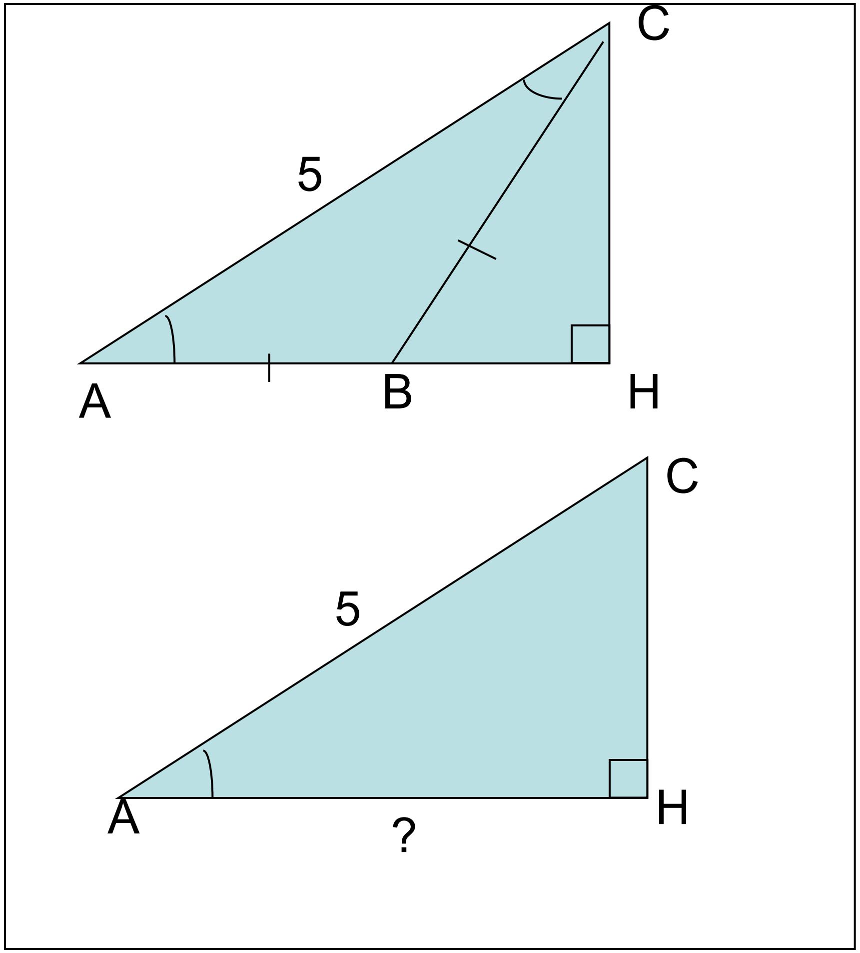
Тупоугольный равнобедренный треугольник, в котором высота проведена к боковой стороне

- Сумма углов треугольника 180° . Поэтому в равнобедренном треугольнике тупым углом может быть только угол, образованный боковыми сторонами.
- Высота, опущенная из вершины основания образует прямой угол с продолжением боковой стороны. Она лежит вне треугольника
- На чертеже два прямоугольных треугольника. Прямой угол у них общий. Один треугольник лежит внутри другого. Эти треугольники можно рассматривать отдельно(I, II, III тип задач)



Пример

- В тупоугольном треугольнике ABC   AB = BC,   AC=5,
  sin C=0,6   CH – высота. Найдите AH.
- Угол ACB равен углу A, значит sin ACB= sin A
- Задача сводится к решению прямоугольного ACH (II тип)
- sin A = CH/AC
  CH/5=0,6=3/5   CH=3
  по теореме Пифагора AH=4



Упражнения

В тупоугольном треугольнике ABC AB=BC, AC=25, CH - высота, AH = 24
Найдите синус угла ACB

0,28

В тупоугольном треугольнике ABC AB=BC, AC=2, CH - высота, AH = $\sqrt{3}$
Найдите синус угла ACB

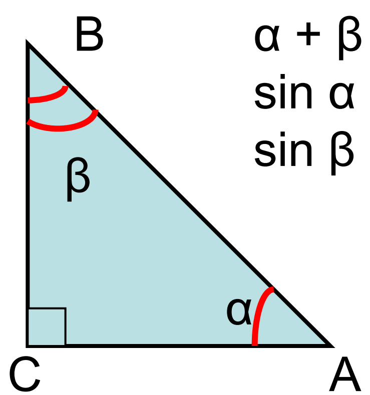
0,5

Часть 8

Применение формул приведения при решении прямоугольного треугольника

Использование формул приведения при решении прямоугольного треугольника

- Сумма острых углов прямоугольного треугольника 90°. Значит, синус одного равен косинусу другого и тангенс одного равен котангенсу другого
- Внешним углом треугольника называется угол смежный с одним из внутренних углов. При каждой вершине образуется два внешних угла
- Сумма смежных углов равна 180°. Значит, синус внутреннего угла и внешнего угла равны, а косинусы и тангенсы отличаются знаком



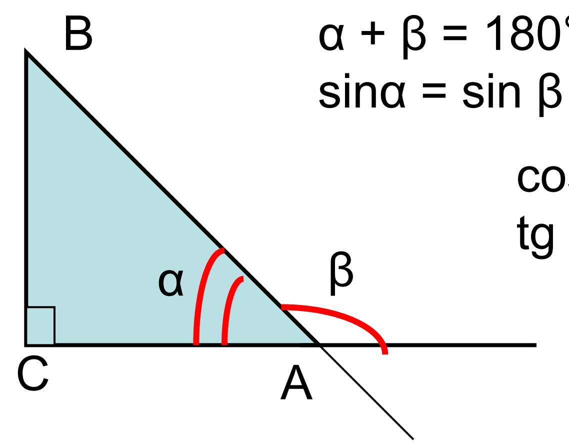
$\alpha + \beta = 90°$

$\sin \alpha = \cos \beta$

$\sin \beta = \cos \alpha$

$\mathrm{tg}\ \alpha = \mathrm{ctg}\ \beta$

$\mathrm{tg}\ \beta = \mathrm{ctg}\ \alpha$



$\alpha + \beta = 180°$

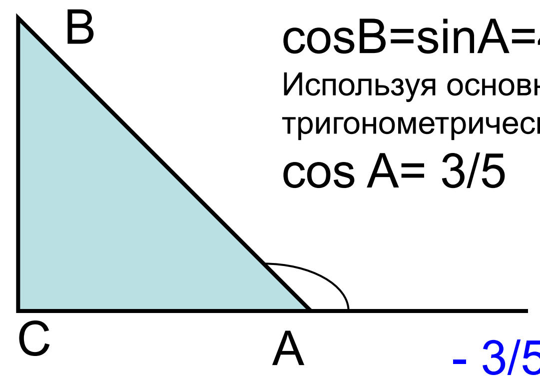
$\sin\alpha = \sin \beta$

$\cos \alpha = -\cos \beta$

$\mathrm{tg}\ \alpha = -\mathrm{tg}\ \beta$

Пример использование формул приведения

- В треугольнике ABC угол C равен 90°, cos B =4/5. Найдите косинус внешнего угла при вершине A



cosB=sinA=4/5

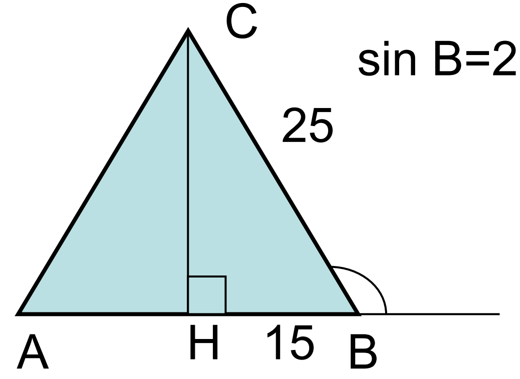
Используя основное тригонометрическое тождество

cos A= 3/5

- 3/5 = - 0,6

- В треугольнике ABC AC=BC=25, AB=30. Найдите синус внешнего угла при вершине B
-
- Проведем высоту CH. HB=15

  По теореме Пифагора CH=20



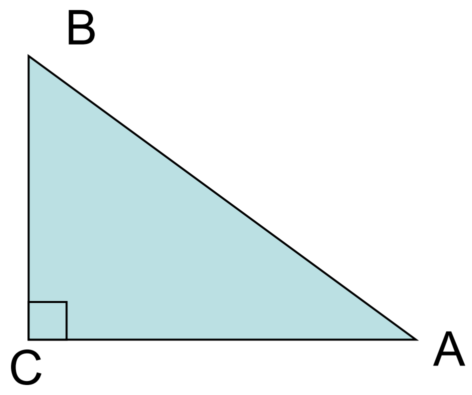
sin B=20/25=4/5

4/5=0,8

Упражнения

- В Δ ABC угол C=90°,
  cos B= 0,8. Найти sin A

0,8

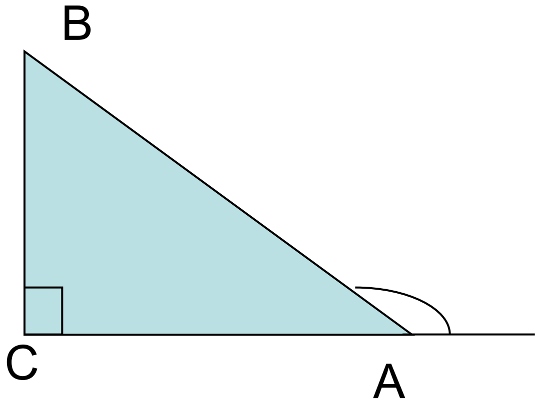


- В Δ ABC угол C=90°.
  cos B= 0,8. Найти cos A

0,6

- В треугольнике ABC
  угол C=90°. cos B= $\frac{\sqrt{3}}{2}$
  Найти косинус внешнего
  угла при вершине A

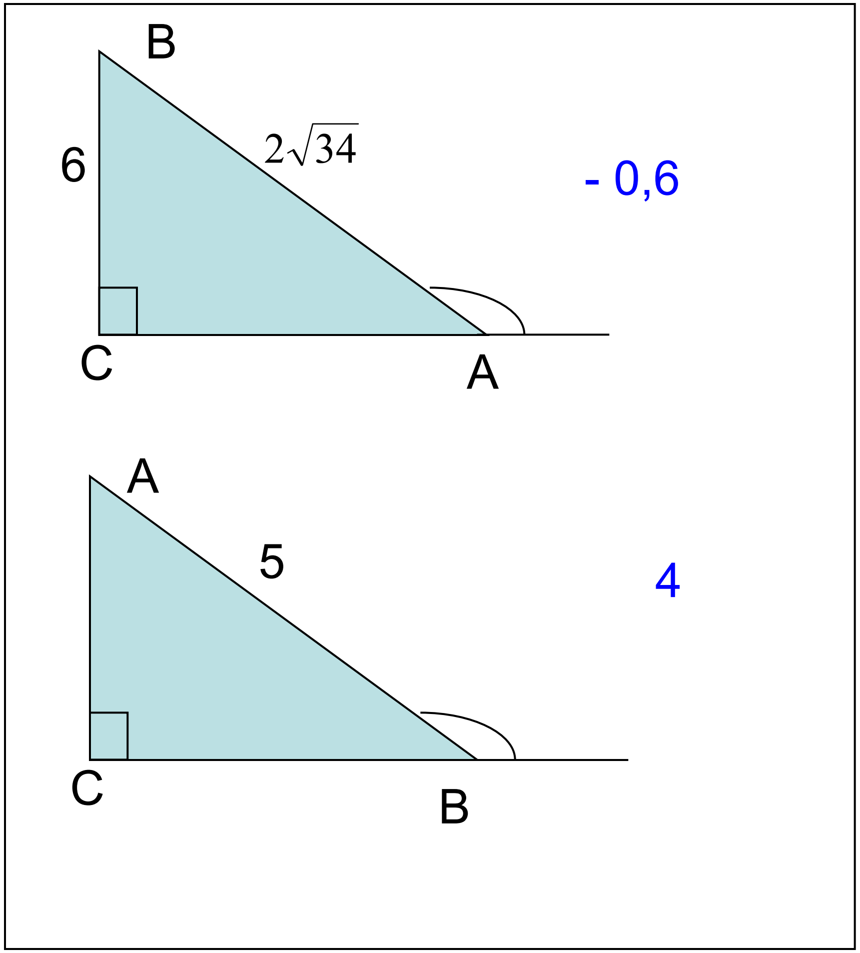
- 0,5



Упражнения

- В треугольнике ABC угол C=90°. AB= $2\sqrt{34}$ BC=6. Найти тангенс внешнего угла при вершине A

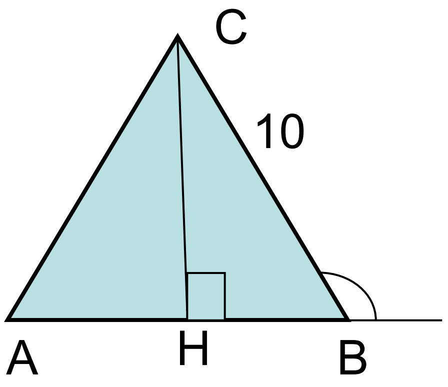
- В треугольнике ABC угол C=90°. AB=5. Косинус внеш-него угла при вершине B равен -0,6. Найти AC



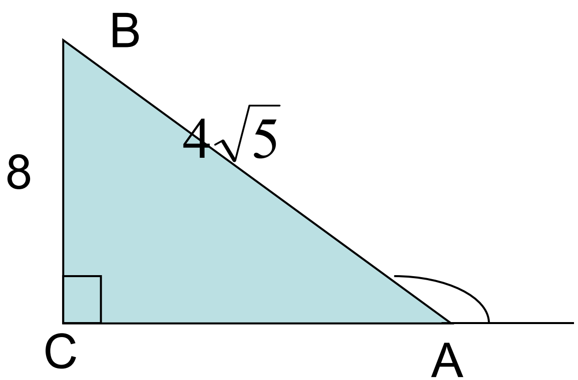
Упражнения

- В ΔABC AC=BC=10, AB=$2\sqrt{51}$ Найти синус внешнего угла при вершине B.

- В ΔABC угол C равен 90°, AB= $4\sqrt{5}$, BC=8. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A

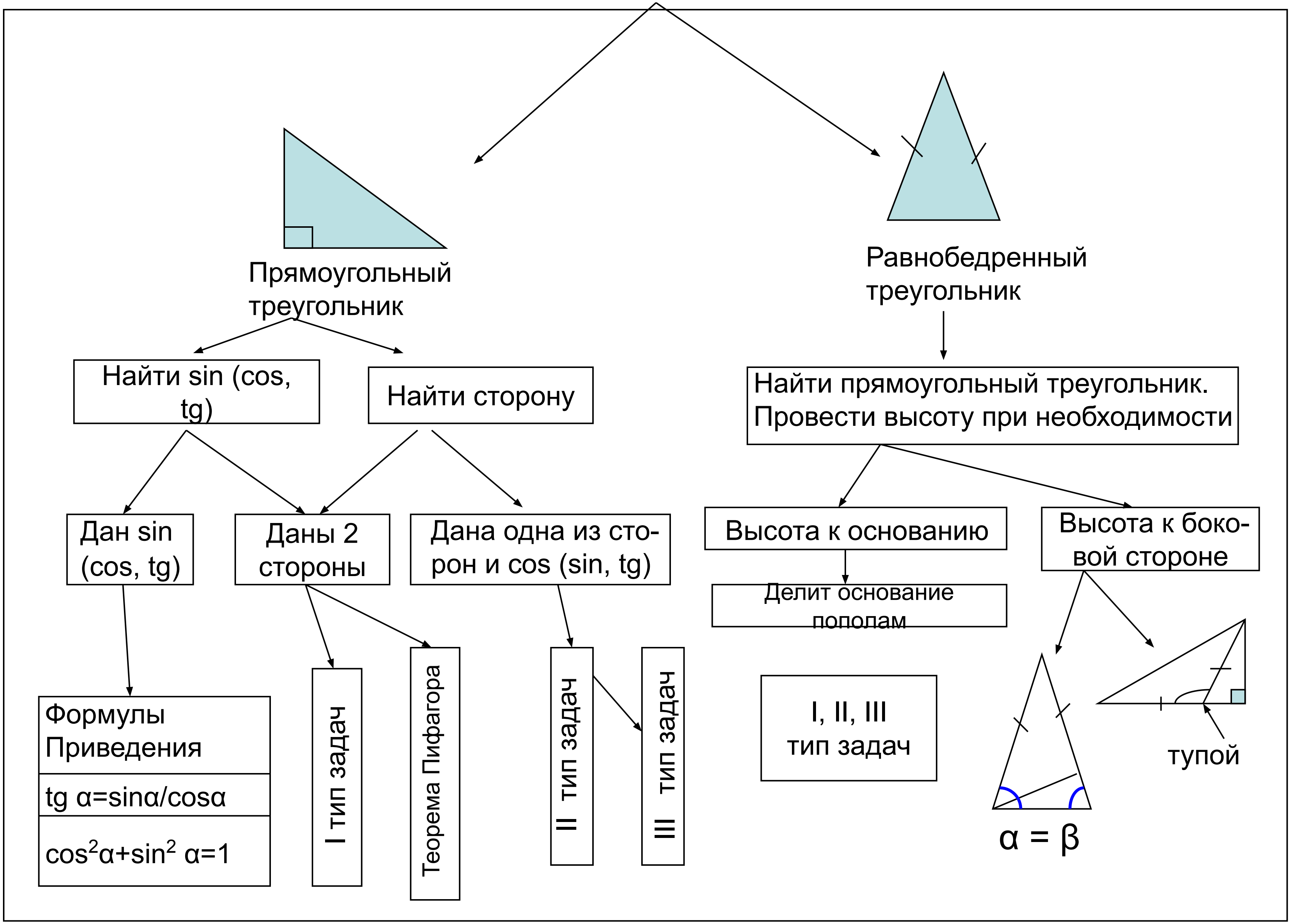


0,7



- 2

Обобщение и систематизация изученного материала



Прямоугольный треугольник
Равнобедренный треугольник
Найти sin (cos, tg)
Найти сторону
Найти прямоугольный треугольник. Провести высоту при необходимости
Дан sin (cos, tg)
Даны 2 стороны
Дана одна из сто-рон и cos (sin, tg)
Высота к основанию
Высота к боко-вой стороне
Делит основание пополам
Формулы Приведения
tg α=sinα/cosα
cos²α+sin² α=1
I тип задач
Теорема Пифагора
II тип задач
III тип задач
I, II, III тип задач
тупой
α = β