Теорема Пифагора

Автор работы:

ученица 8 «А» класса Стребкова Ксения

Преподаватель:

Стребкова Наталья Сергеевна

Биография Пифагора

- Письменных документов о Пифагоре Самосском не осталось, а по более поздним свидетельствам трудно восстановить подлинную картину его жизни и достижений. Известно, что Пифагор покинул свой родной остров Самос в Эгейском море у берегов Малой Азии в знак протеста против тирании правителя и уже в зрелом возрасте (по преданию в 40 лет)появился в греческом городе Кротоне на юге Италии.

Пифагор и его последователи – пифагорейцы - образовали тайный союз, игравший немалую роль в жизни греческих колоний в Италии. Пифагорейцы узнавали друг друга по звездчатому пятиугольнику – пентаграмме.

На учение Пифагора большое влияние оказала философия и религия Востока. Он много путешествовал по странам Востока: был в Египте и в Вавилоне. Там Пифагор познакомился и с восточной математикой. Математика стала частью его ученья, и важнейшей его частью.

Пифагорейцы верили, что в числовых закономерностях спрятана тайна мира. Мир чисел жил для пифагорейца особой жизнью, числа имели свой жизненный смысл. Числа, равные сумме своих делителей, воспринимались как совершенные (6, 28, 496, 8128); дружественными называли пары чисел, из которых каждое равнялось сумме делителей другого (например, 220 и 284). Пифагор впервые разделил числа на четные и нечетные, простые и составные, ввел понятие фигурного числа. Естественно, что геометрия у Пифагора была подчинена арифметике, это ярко проявилось в теореме, носящей его имя и ставшей в дальнейшем основой применения численных методов в геометрии.

История теоремы

Исторический обзор начнем с древнего Китая. Здесь особое внимание привлекает математическая книга Чу-пей. В этом сочинении так говорится о пифагоровом треугольнике со сторонами 3, 4 и 5:

" Если прямой угол разложить на составные части, то линия, соединяющая концы его сторон, будет 5, когда основание есть 3, а высота 4" .

В этой же книге предложен рисунок, который совпадает с одним из чертежей индусской геометрии Басхары.

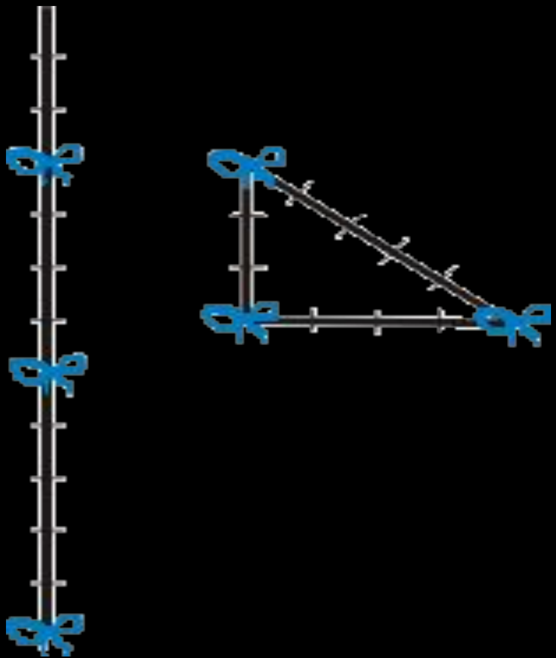
Кантор (крупнейший немецкий историк математики) считает, что равенство

$3^2 + 4^2 = 5^2$

было известно уже **египтянам** еще около 2300 г. до н. э., во времена царя **Аменхотепа I** (согласно папирусу 6619 Берлинского музея).

По мнению Кантора ***гарпедонапты***, или "натягиватели веревок", строили прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5.

Очень легко можно воспроизвести их способ построения. Возьмем веревку длиною в 12 м. и привяжем к ней по цветной полоске на расстоянии 3м. от одного конца и 4 метра от другого . Прямой угол окажется заключенным между сторонами длиной в 3 и 4 метра. Гарпедонаптам можно было бы возразить, что их способ построения становиться излишним, если воспользоваться, например, деревянным угольником, применяемым всеми плотниками. И действительно, известны египетские рисунки, на которых встречается такой инструмент, например рисунки, изображающие столярную мастерскую.



Несколько больше известно о теореме Пифагора у вавилонян. В одном тексте, относимом ко времени Хаммурапи, т. е. к 2000 г. до н. э., приводится приближенное вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника. Отсюда можно сделать вывод, что в Двуречье умели производить вычисления с прямоугольными треугольниками, по крайней мере в некоторых случаях. Основываясь, с одной стороны, на сегодняшнем уровне знаний о египетской и вавилонской математике, а с другой-на критическом изучении греческих источников, Ван-дер-Варден (голландский математик) сделал следующий вывод:

"Заслугой первых греческих математиков, таких как Фалес, Пифагор и пифагорейцы, является не открытие математики, но ее систематизация и обоснование. В их руках вычислительные рецепты, основанные на смутных представлениях, превратились в точную науку."

Геометрия у индусов, как и у египтян и вавилонян, была тесно связана с культом. Весьма вероятно, что теорема о квадрате гипотенузы была известна в Индии уже около 18 века до н. э.

Формулировка теоремы

Приведем различные формулировки теоремы Пифагора в переводе с греческого, латинского и немецкого языков.
У **Евклида** эта теорема гласит (дословный перевод):
"В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, натянутой над прямым углом, равен квадратам на сторонах, заключающих прямой угол".
Латинский перевод арабского текста **Аннаирици** (около 900 г. до н. э.), сделанный **Герхардом Клемонским** (начало 12 в.), в переводе на русский гласит:
"Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат, образованный на стороне, натянутой над прямым углом, равен сумме двух квадратов, образованных на двух сторонах, заключающих прямой угол".

В Geometria Culmonensis (около 1400 г.) в переводе теорема читается так :
"Итак, площадь квадрата, измеренного по длинной стороне, столь же велика, как у двух квадратов, которые измерены по двум сторонам его, примыкающим к прямому углу".
В первом русском переводе евклидовых "Начал", сделанном Ф. И. Петрушевским, теорема Пифагора изложена так:
"В прямоугольных треугольниках квадрат из стороны, противолежащей прямому углу, равен сумме квадратов из сторон, содержащих прямой угол".

В настоящее время известно, что эта теорема не была открыта Пифагором. Однако одни полагают, что Пифагор первым дал ее полноценное доказательство, а другие отказывают ему и в этой заслуге. Некоторые приписывают Пифагору доказательство, которое Евклид приводит в первой книге своих "Начал". С другой стороны, Прокл утверждает, что доказательство в "Началах" принадлежит самому Евклиду. Как мы видим, история математики почти не сохранила достоверных данных о жизни Пифагора и его математической деятельности. Зато легенда сообщает даже ближайшие обстоятельства, сопровождавшие открытие теоремы. Многим известен сонет Шамиссо:

Пребудет вечной истина, как скоро
Ее познает слабый человек!
И ныне теорема Пифагора

Верна, как и в его далекий век.

Обильно было жертвоприношенье
Богам от Пифагора. Сто быков
Он отдал на закланье и сожженье
За света луч, пришедший с облаков.

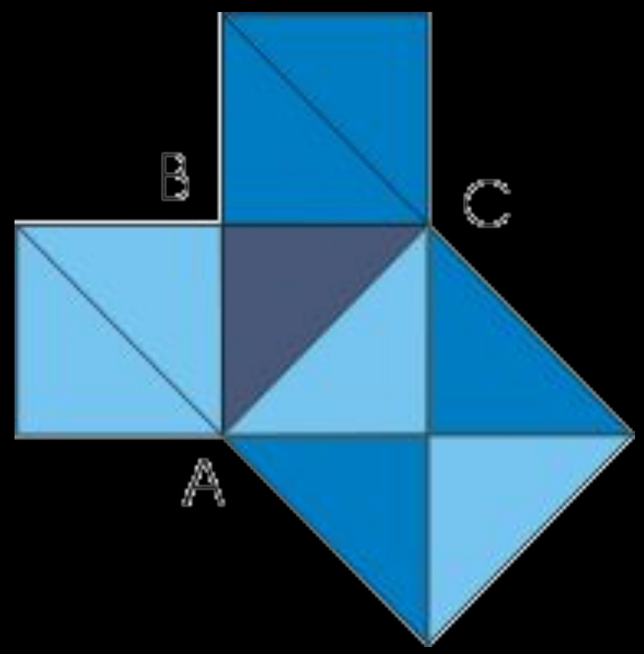
Поэтому всегда с тех самых пор,
Чуть истина рождается на свет,
Быки ревут, ее почуя ,вслед.

Они не в силах свету помешать ,
А могут лишь закрыв глаза дрожать
От страха, что вселил в них Пифагор.

Простейшее доказательство

Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников , чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для треугольника ABC : квадрат, построенный на гипотенузе AC, содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах,- по два.

Теорема доказана.



Доказательство методом дополнения

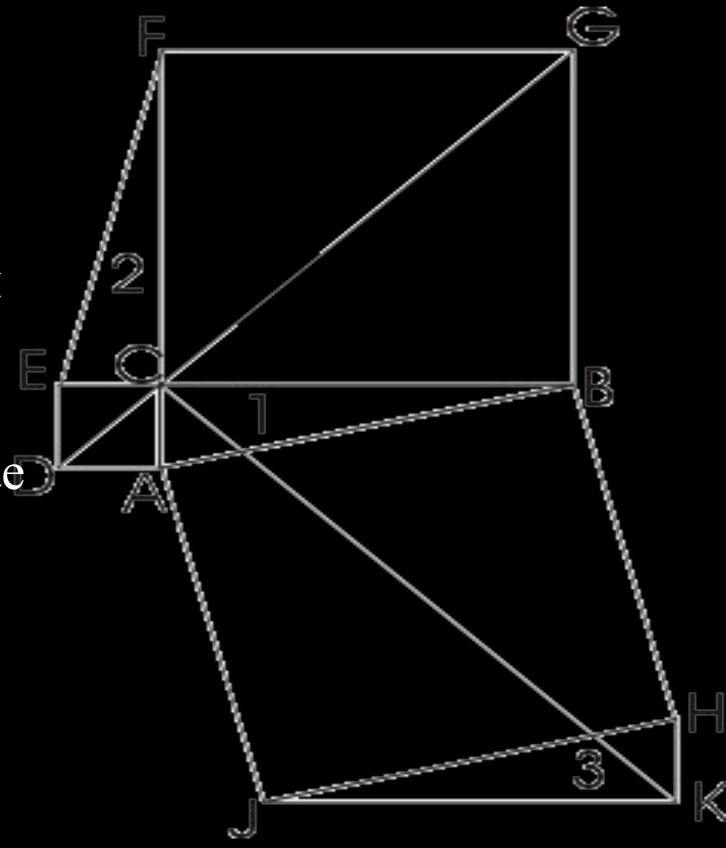
Доказательство первое.

Наряду с доказательствами методом сложения можно привести примеры доказательств при помощи вычитания, называемых также доказательствами методом дополнения. Общая идея таких доказательств заключается в следующем.

От двух равных площадей нужно отнять равновеликие части так, чтобы в одном случае остались два квадрата, построенные на катетах, а в другом- квадрат, построенный на гипотенузе. Ведь если в равенствах

B-A=C и $\mathbf{B_1}$**-**$\mathbf{A_1}$**=**$\mathbf{C_1}$

часть **A** равновелика части $\mathbf{A_1}$, а часть **B** равновелика $\mathbf{B_1}$, то части **C** и $\mathbf{C_1}$ также равновелики.

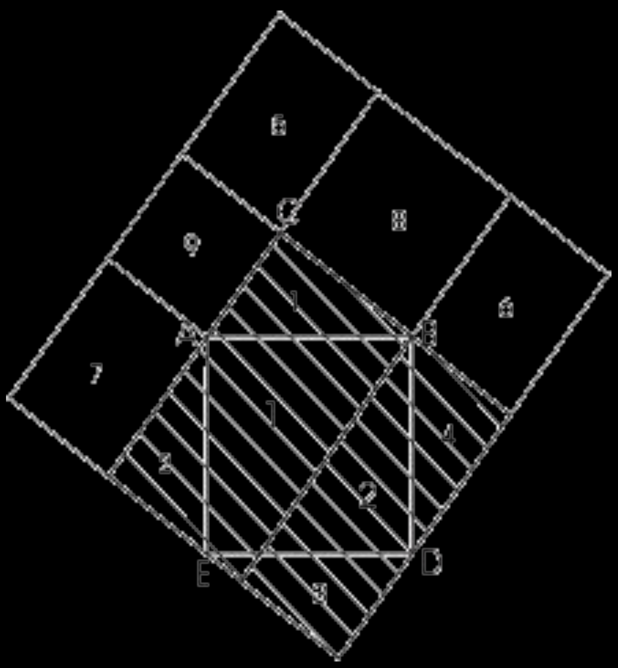


Поясним этот метод на примере. На рис. к обычной пифагоровой фигуре приставлены сверху и снизу треугольники 2 и 3, равные исходному треугольнику 1. Прямая DG обязательно пройдет через C. Заметим теперь (далее мы это докажем), что шестиугольники DABGFE и CAJKHB равновелики. Если мы от первого из них отнимем треугольники 1 и 2, то останутся квадраты, построенные на катетах, а если от второго шестиугольника отнимем равные треугольники 1 и 3, то останется квадрат, построенный на гипотенузе. Отсюда вытекает, что квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.

Остается доказать, что наши шестиугольники равновелики. Заметим, что прямая DG делит верхний шестиугольник на равновеликие части; то же можно сказать о прямой CK и нижнем шестиугольнике. Повернем четырехугольник DABG, составляющий половину шестиугольника DABGFE, вокруг точки A по часовой стрелке на угол 90; тогда он совпадет с четырехугольником CAJK, составляющим половину шестиугольника CAJKHB. Поэтому шестиугольники DABGFE и CAJKHB равновелики

Другое доказательство методом вычитания.

Познакомимся с другим доказательством методом вычитания. Знакомый нам чертеж теоремы Пифагора заключим в прямоугольную рамку, направления сторон которой совпадают с направлениями катетов треугольника. Продолжим некоторые из отрезков фигуры так, как указано на рисунке, при этом прямоугольник распадается на несколько треугольников, прямоугольников и квадратов. Выбросим из прямоугольника сначала несколько частей так чтобы остался лишь квадрат, построенный на гипотенузе. Эти части следующие:



1. треугольники 1, 2, 3, 4;
2. прямоугольник 5;
3. прямоугольник 6 и квадрат 8;
4. прямоугольник 7 и квадрат 9;

Затем выбросим из прямоугольника части так, чтобы остались только квадраты, построенные на катетах. Этими частями будут:

1. прямоугольники 6 и 7;
2. прямоугольник 5;
3. прямоугольник 1(заштрихован);
4. прямоугольник 2(заштрихован);

Нам осталось лишь показать, что отнятые части равновелики. Это легко видеть в силу расположения фигур. Из рисунка ясно, что:

прямоугольник 5 равновелик самому себе;

четыре треугольника 1,2,3,4 равновелики двум прямоугольникам 6 и 7;

прямоугольник 6 и квадрат 8, взятые вместе, равновелики прямоугольнику 1 (заштрихован);;

прямоугольник 7 вместе с квадратом 9 равновелики прямоугольнику 2(заштрихован);

Доказательство закончено.

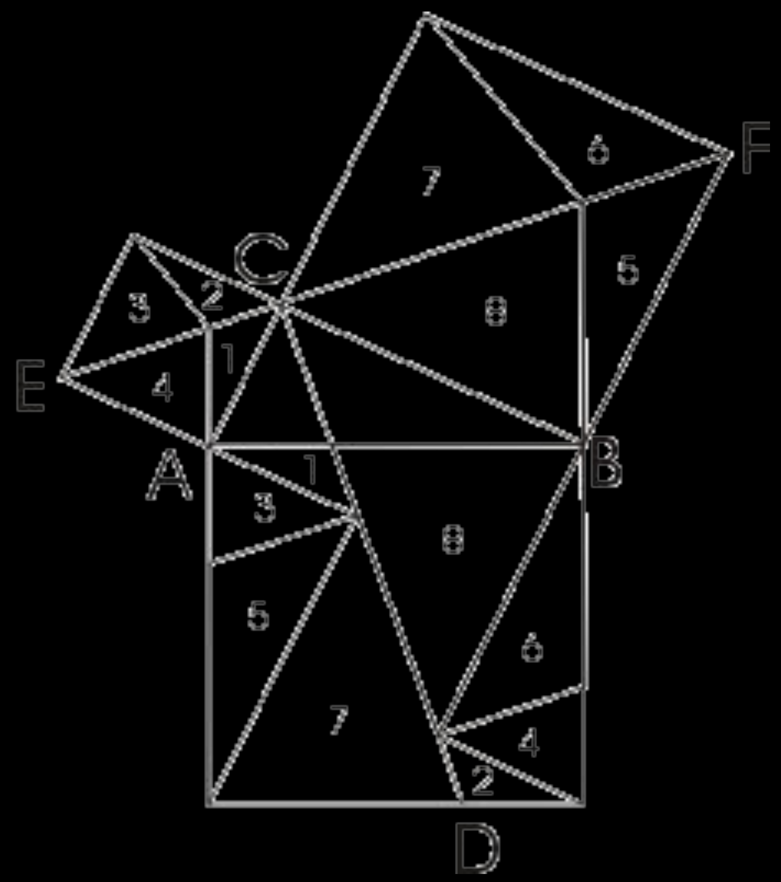
Доказательство методом разложения

Существует целый ряд доказательств теоремы Пифагора, в которых квадраты, построенные на катетах и на гипотенузе, разрезаются так, что каждой части квадрата ,построенного на гипотенузе, соответствует часть одного из квадратов, построенных на катетах. Во всех этих случаях для понимания доказательства достаточно одного взгляда на чертеж; рассуждение здесь может быть ограничено единственным словом: "Смотри!", как это делалось в сочинениях древних индусских математиков. Следует, однако, заметить, что на самом деле доказательство нельзя считать полным, пока мы не доказали равенства всех соответствующих друг другу частей. Это почти всегда довольно не трудно сделать, однако может (особенно при большом количестве частей) потребовать довольно продолжительной работы.

Доказательство Эпштейна

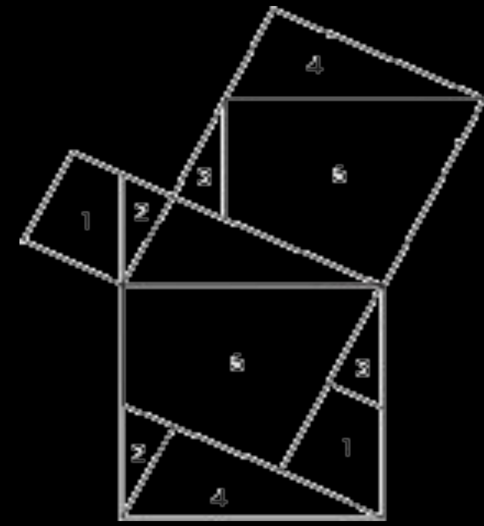
Начнем с доказательства **Эпштейна**(рис. 1) ; его преимуществом является то, что здесь в качестве составных частей разложения фигурируют исключительно треугольники. Чтобы разобраться в чертеже, заметим, что прямая CD проведена перпендикулярно прямой EF.

Разложение на треугольники можно сделать и более наглядным, чем на рисунке.



Доказательство Нильсена.

На рисунке вспомогательные линии изменены по предложению **Нильсена**.

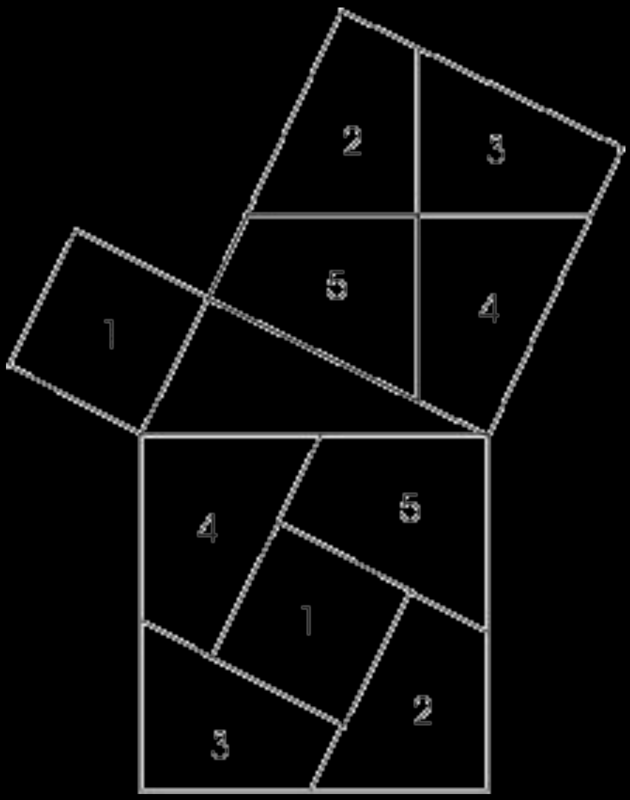


Доказательство Бетхера .

На рисунке дано весьма наглядное разложение **Бетхера**.

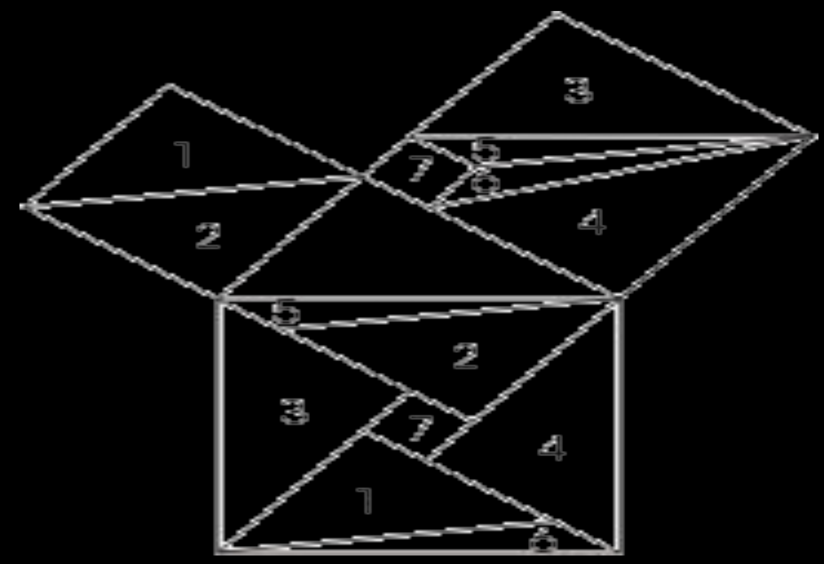
Доказательство Перигаля.

В учебниках нередко встречается разложение указанное на рисунке (так называемое "колесо с лопастями"; это доказательство нашел **Перигаль**). Через центр О квадрата, построенного на большем катете, проводим прямые, параллельную и перпендикулярную гипотенузе. Соответствие частей фигуры хорошо видно из чертежа.



Доказательство Гутхейля.

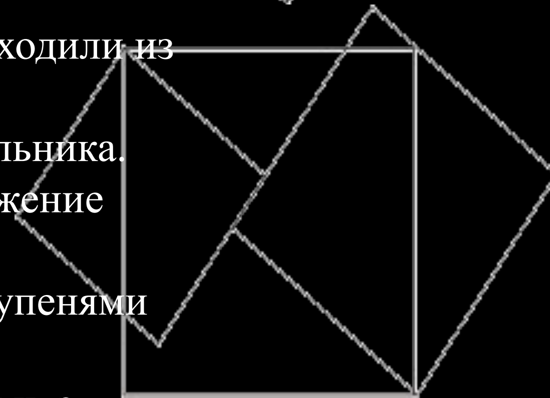
Изображенное на рисунке разложение принадлежит Гутхейлю; для него характерно наглядное расположение отдельных частей, что позволяет сразу увидеть, какие упрощения повлечет за собой случай равнобедренного прямоугольного треугольника.



Доказательство 9 века н.э.

Ранее были представлены только такие доказательства, в которых квадрат, построенный на гипотенузе, с одной стороны, и квадраты, построенные на катетах, с другой, складывались из равных частей. Такие доказательства называются доказательствами при помощи сложения ("аддитивными доказательствами") или, чаще, доказательствами методом разложения. До сих пор мы исходили из обычного расположения квадратов, построенных на соответствующих сторонах треугольника, т. е. вне треугольника. Однако во многих случаях более выгодно другое расположение квадратов.

На рисунке квадраты, построенные на катетах, размещены ступенями один рядом с другим. Эту фигуру, которая встречается в доказательствах, датируемых не позднее, чем 9 столетием н. э., индусы называли **"стулом невесты"**. Способ построения квадрата со стороной, равной гипотенузе, ясен из чертежа. Общая часть двух квадратов, построенных на катетах, и квадрата, построенного на гипотенузе, - неправильный заштрихованный пятиугольник 5. Присоединив к нему треугольники 1 и 2, получим оба квадрата, построенные на катетах; если же заменить треугольники 1 и 2 равными им треугольниками 3 и 4, то получим квадрат, построенный на гипотенузе. На рисунках ниже изображены два различных расположения близких к тому, которое дается на первом рисунке.



Применение теоремы

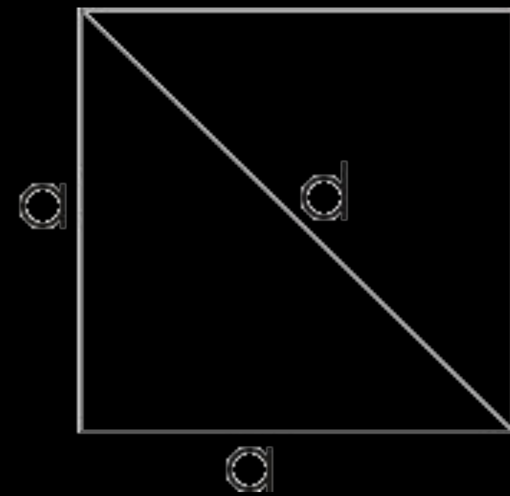
Рассмотрим примеры практического применения теоремы Пифагора. Не будем пытаться привести все примеры использования теоремы - это вряд ли было бы возможно. Область применения теоремы достаточно обширна и вообще не может быть указана с достаточной полнотой. Определим возможности, которые дает теорема Пифагора для вычисления длин отрезков некоторых фигур на плоскости.

Диагональ d квадрата со стороной а можно рассматривать как гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом а. Таким образом,

$d=2a$,

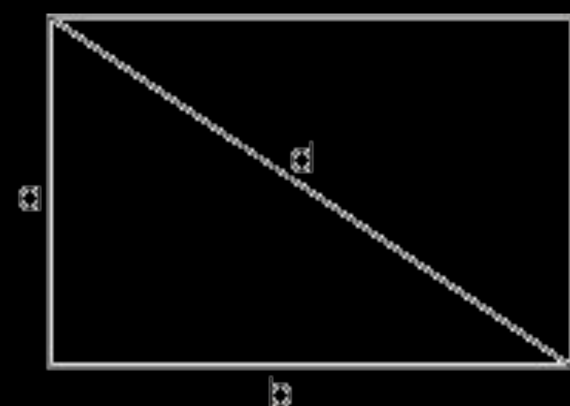
откуда:

$d=2a^2$.



Диагональ d прямоугольника со сторонами a и b вычисляется подобно тому, как вычисляется гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b. Мы имеем

$d^2=a^2+b^2$



Высота h равностороннего треугольника со стороной a может рассматриваться как катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого a, а другой катет a/2. Таким образом имеем

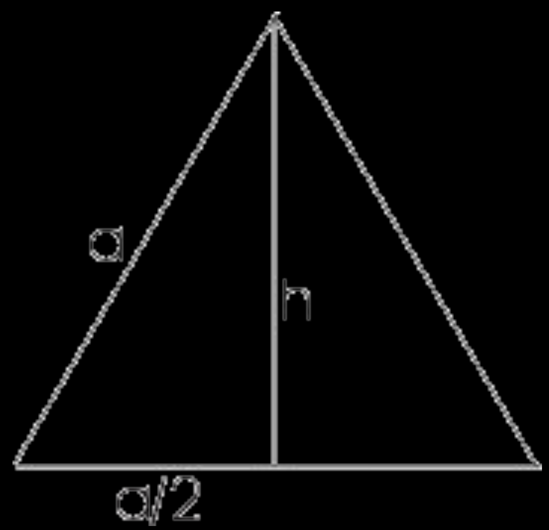
a = h +(a/2),

или

h =(3/4)a.

Отсюда вытекает

???h=1/2 3a.

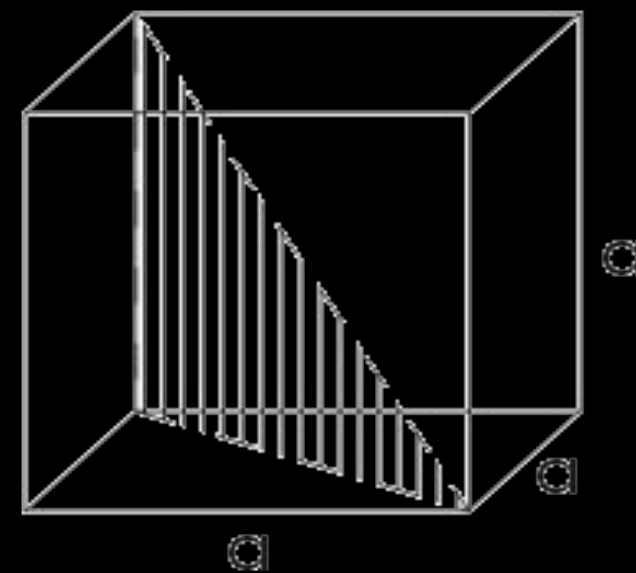


Возможности применения теоремы Пифагора к вычислениям не ограничиваются планиметрией. **На рисунке изображен куб**, внутри которого проведена диагональ d, являющаяся одновременно гипотенузой прямоугольного треугольника, заштрихованного на рисунке. Катетами треугольника служат ребро куба и диагональ квадрата, лежащего в основании (как указывалось ранее, длина диагонали равна 2a). Отсюда имеем

$d = a + (2a)$, $d = 3a$, $d = 3a$.

Рассуждение, подобное этому, можно провести и для **прямоугольного параллелепипеда** с ребрами a, b, c и получить для диагонали выражение

$d = a + b + c$.

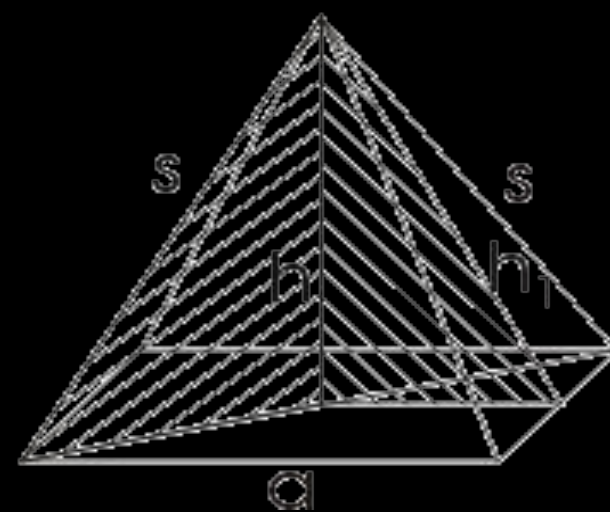


Исследуем пирамиду, например, такую, в основании которой лежит квадрат и высота которой проходит через центр этого квадрата (правильную пирамиду). Пусть сторона квадрата - а, и высота пирамиды - h. Найдем s (длину боковых ребер пирамиды). Ребра будут гипотенузами прямоугольных треугольников, у которых один из катетов - высота h, а другой - половина диагонали квадрата ???(1/2*2a). Вследствие этого имеем:

$s = h + (1/2)a.$

Затем можем вычислить высоту h1 боковых граней.

$h1 = h + (1/4)a.$



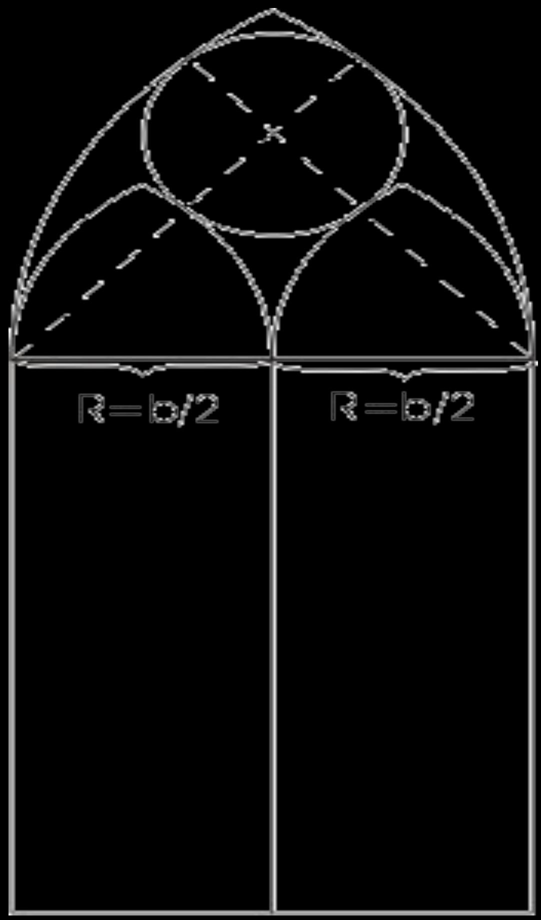
Считать эти приложения теоремы Пифагора только теоретическими - большая ошибка. Если, например, рассматривать нашу четырехугольную пирамиду как **крышу башни**, то в первом нашем вопросе речь идет о том, какой длины нужно сделать боковые ребра, чтобы при данной площади чердака была выдержана предписанная высота крыши, а вопрос о величине боковой поверхности должен интересовать, например, кровельщика при подсчете стоимости кровельных работ. Заметим, что расчет площади кровли можно заметно упростить, если воспользоваться одним очень простым правилом, справедливым во всех случаях, когда все скаты крыши, сколько бы их ни было, имеют одинаковый уклон. Оно гласит:

"Чтобы найти поверхность крыши, все скаты которой имеют равный уклон, нужно умножить перекрываемую площадь на длину какого-нибудь стропила и разделить полученное произведение на проекцию этого стропила ??? на перекрываемую площадь."

В зданиях готического и романского стиля верхние части окон расчленяются каменными ребрами, которые не только играют роль орнамента, но и способствуют прочности окон. На рисунке представлен простой пример такого окна в готическом стиле. Способ построения его очень прост: Из рисунка легко найти центры шести дуг окружностей, радиусы которых равны

1. ширине окна (b) для наружных дуг
2. половине ширины, (b/2) для внутренних дуг

Остается еще полная окружность, касающаяся четырех дуг.



Т. к. она заключена между двумя концентрическими окружностями, то ее диаметр равен расстоянию между этими окружностями, т. е. b/2 и, следовательно, радиус равен b/4. А тогда становится ясным и положение ее центра. В рассмотренном примере радиусы находились без всяких затруднений. В других аналогичных примерах могут потребоваться вычисления; покажем, как применяется в таких задачах теорема Пифагора.

В **романской архитектуре** часто встречается мотив, представленный на рисунке. Если b по-прежнему обозначает ширину окна, то радиусы полуокружностей будут равны $R = b / 2$ и $r = b / 4$. Радиус p внутренней окружности можно вычислить из прямоугольного треугольника, изображенного на рис. пунктиром. Гипотенуза этого треугольника, проходящая через точку касания окружностей, равна b/4+p, один катет равен b/4, а другой b/2-p. По теореме Пифагора имеем:

$$(b/4+p)=(b/4)+(b/4-p)$$

или

$$b/16+ bp/2+p=b/16+b/4-bp+p,$$

откуда

$$bp/2=b/4-bp.$$

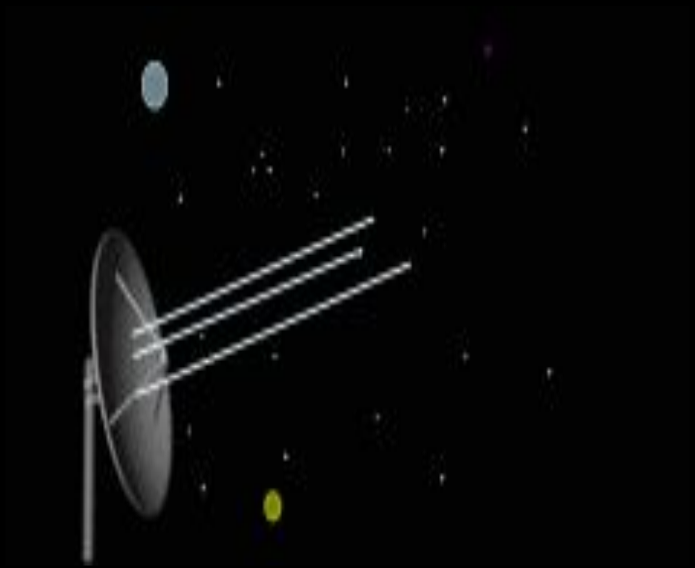
Разделив на b и приводя подобные члены, получим:

$$(3/2)p=b/4,\ p=b/6.$$

Собор Парижской Богоматери. Западный фасад

У египтян была известна задача о лотосе. "На глубине 12 футов растет лотос с 13-футовым стеблем. Определите, на какое расстояние цветок может отклониться от вертикали, проходящей через точку крепления стебля ко дну."

В конце девятнадцатого века высказывались разнообразные предположения о существовании обитателей Марса подобных человеку, это явилось следствием открытий итальянского астронома **Скиапарелли** (открыл на Марсе каналы которые долгое время считались исскуственными) и др.



Естественно, что вопрос о том, можно ли с помощью световых сигналов объясняться с этими гипотетическими существами, вызвал оживленную дискуссию. Парижской академией наук была даже установлена премия в 100000 франков тому, кто первый установит связь с каким-нибудь обитателем другого небесного тела; эта премия все еще ждет счастливца. В шутку, хотя и не совсем безосновательно , было решено передать обитателям Марса сигнал в виде теоремы Пифагора.

Неизвестно, как это сделать; но для всех очевидно, что математический факт, выражаемый теоремой Пифагора имеет место всюду и поэтому похожие на нас обитатели другого мира должны понять такой сигнал.