Геометрия

Сечение

Вдохновение в геометрии
нужно также как и в поэзии

МОУ Серковская СОШ

Цитович Алексей

Федорова Ирина Юрьевна

Цели:

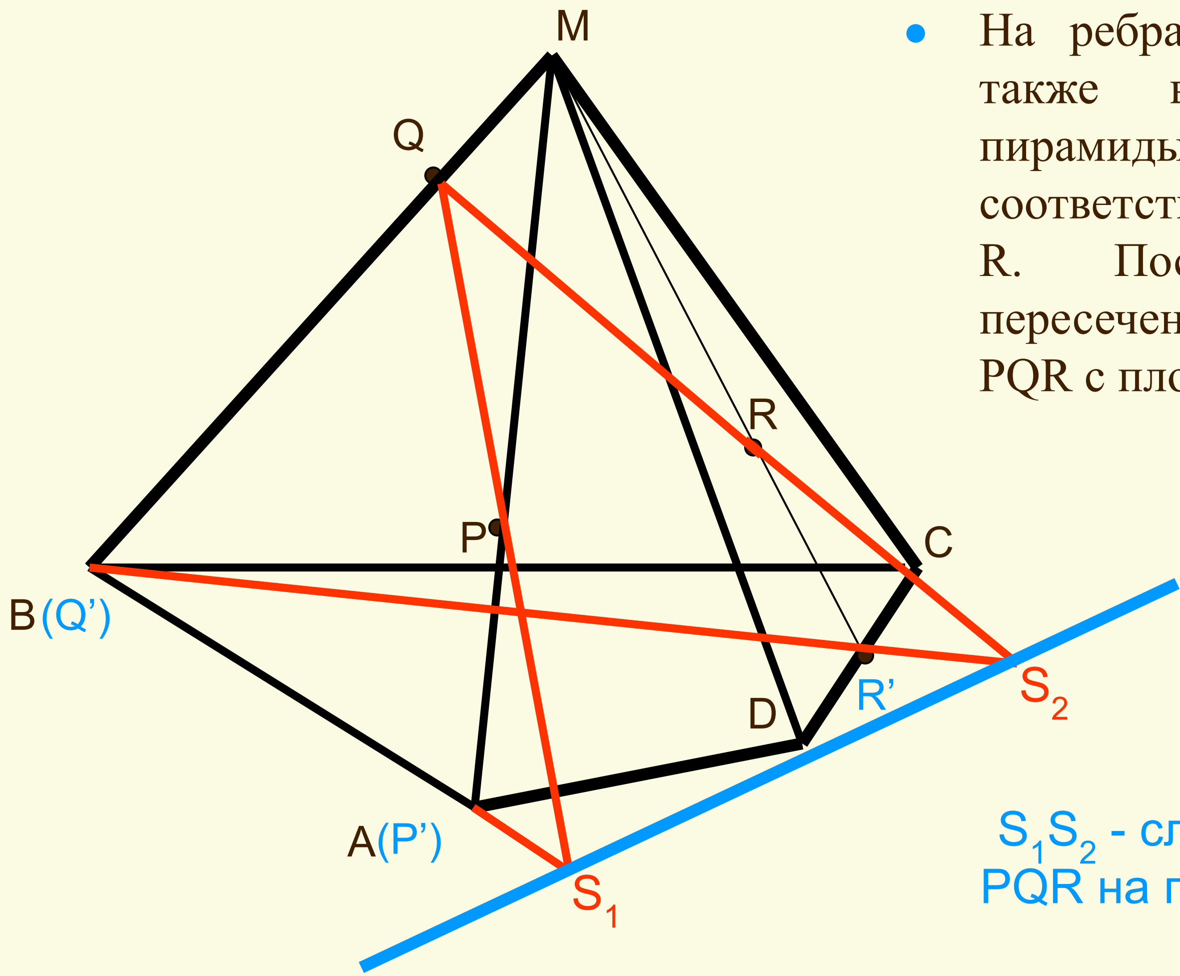
- ***Показать свои знания основного теоретического материала по темам «Аксиомы стереометрии», «Параллельность прямой и плоскости», «Параллельность плоскостей», «Перпендикулярность прямой и плоскости»;***
- ***Научиться работать с инструментами: вставка объекта и надписи, прямые, тип линий, тип штриха, цвет линий, эллипс, группировка объектов, эффекты и настройка анимации, управляющие кнопки, WordArt;***
- ***Развитие способности практического применения основных теорем и аксиом стереометрии при построении сечений;***
- ***научиться планировать свою деятельность.***

Содержание:

Сводный список применявшихся теорем:

- *C_2:* Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.
- *C_3:* Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.
- ***Теорема 15.1 :*** Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.
- ***Теорема 15.2 :*** Если две точки прямой принадлежат этой плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.
- ***Теорема 15.3 :*** Через три точки ,не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.
- ***Теорема 16.1 :*** Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.
- ***Теорема 16.2 :*** Две прямые, параллельные третьей прямой, параллейны.
- ***Теорема 16.3 :*** Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-ни будь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.
- ***Свойство параллельных плоскостей:*** Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллейны.
- ***Свойство перпендикулярных прямой и плоскости:*** Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
- ***Признак перпендикулярности прямой и плоскости:*** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

Проектное задание №1:



- На ребрах MA и MB, а также в грани MCD пирамиды MABCD взяты соответственно точки P, Q и R. Построить линию пересечения плоскости PQR с плоскостью ABC.

Решение:

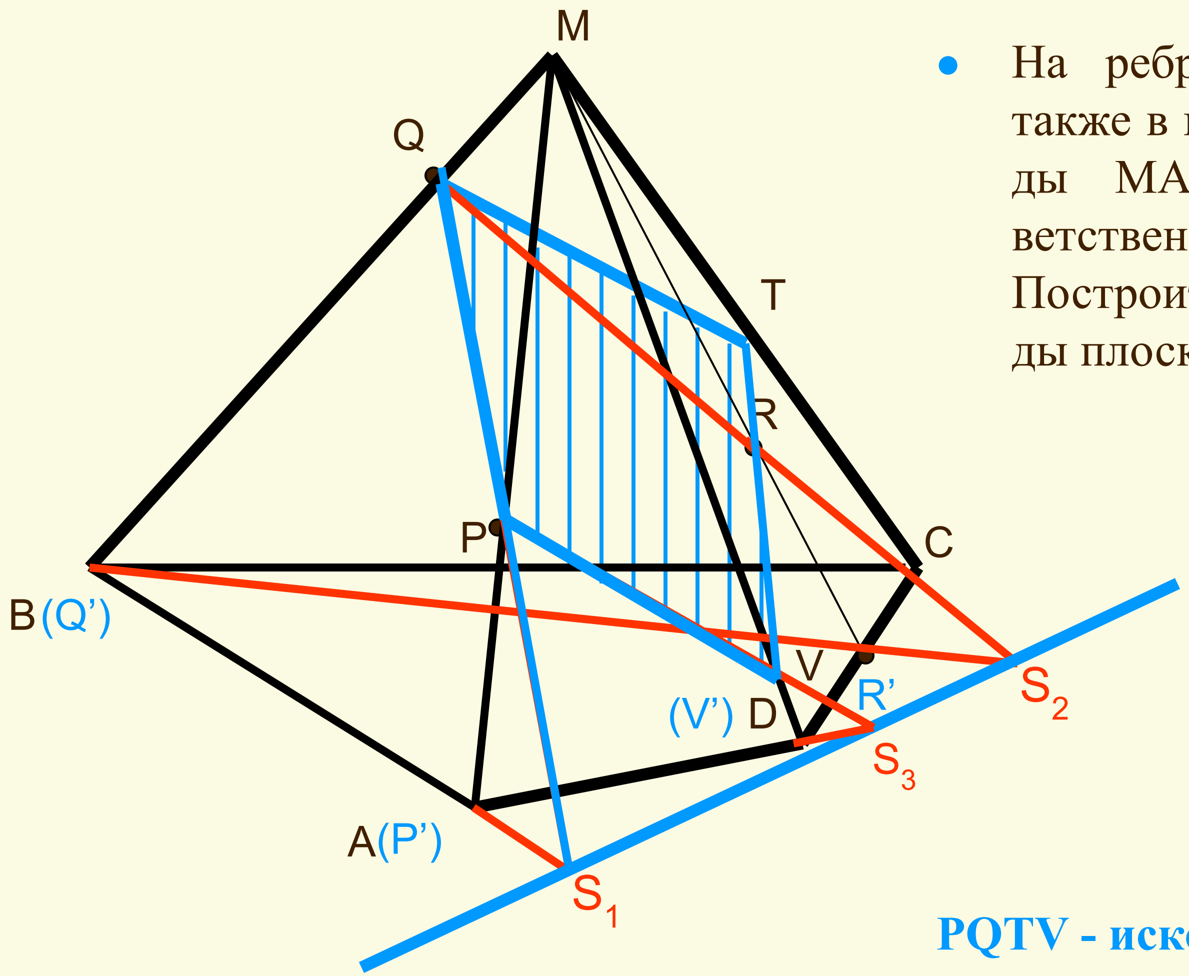
S_1S_2 - след плоскости PQR на плоскости ABC

Решение:

- Построим точки P’, Q’, R’ - проекции соответственно точек P, Q, R на плоскость ABC.
- Прямые PQ и P’Q’ лежат в одной плоскости. Найдем точку S_1, в которой пересекаются эти прямые. По теореме 15.2. точка S_1 является общей точкой плоскостей PQR и ABC. По аксиоме C_2 эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_1 .
- Аналогично найдем точку S_2 , в которой пересекаются прямые QR и Q’R’ и которая является общей для плоскостей PQR и ABC. По аксиоме C_2 эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_2 .
- Проведём прямую S_1 S_2. По теореме 15.2. Эта прямая лежит как в плоскости ABC, так и в плоскости PQR. Таким образом, прямая S_1 S_2 -это искомая линия пересечения.

Линию пересечения двух плоскостей называют также ***следом*** одной из них на другой.

Проектное задание №2:



- На ребрах MA и MB, а также в грани MCD пирамиды MABCD взяты соответственно точки P, Q и R. Построить сечение пирамиды плоскостью PQR.

Решение:

PQTV - искомое сечение

Решение:

- Построим прямую S_1S_2- след плоскости PQR на плоскости ABC.
- Линия пересечения плоскости PQR с плоскостью MAB - прямая QS_1, а отрезок QP - это пересечение плоскости PQR с гранью MAB.
- Точка P является общей точкой плоскостей PQR и MAD. Эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку P (по Т 15.2.). Проекция точки пересечения прямой MD с плоскостью PQR на плоскость ABC совпадает с точкой D. Пересечение P’V’ с прямой S_1S_2 дает точку S_3. Точка S_3 является общей точкой плоскостей PQR и MAD. Эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_3 (по Т 15.2.).
- Точки P и S_3 являются общими для плоскостей PQR и MAD. Значит, прямая PS_3 - это линия пересечения этих плоскостей. Проведем её и найдём точку V, в которой прямая PS_3 пересекает MD. Отрезок PV является пересечением плоскости PQR с гранью MAD.
- Точки R и V являются общими для плоскостей PQR и MCD. Значит, прямая RV - это линия пересечения этих плоскостей. Найдём точку T, в которой прямая RV пересекает MC. Отрезок VT является пересечением плоскости PQR с гранью MCD.
- Отрезок QT - это пересечение плоскости PQR с гранью MBC

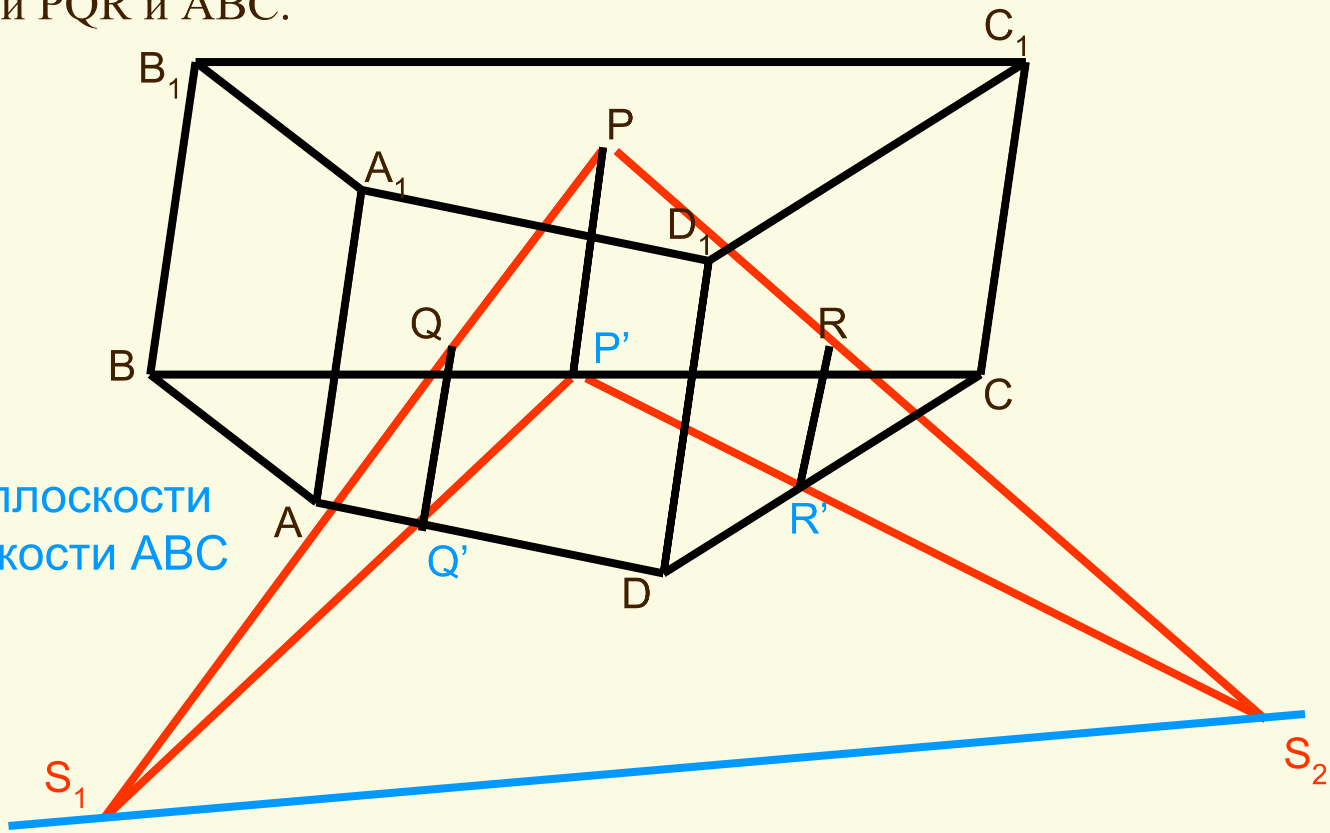
PQTV - искомое сечение

Проектное задание №3:

- В гранях BCC_1B_1, ADD_1A_1 и CDD_1C_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q, R. Построим линию пересечения плоскостей PQR и ABC.

Решение:

S_1S_2 - след плоскости PQR на плоскости ABC



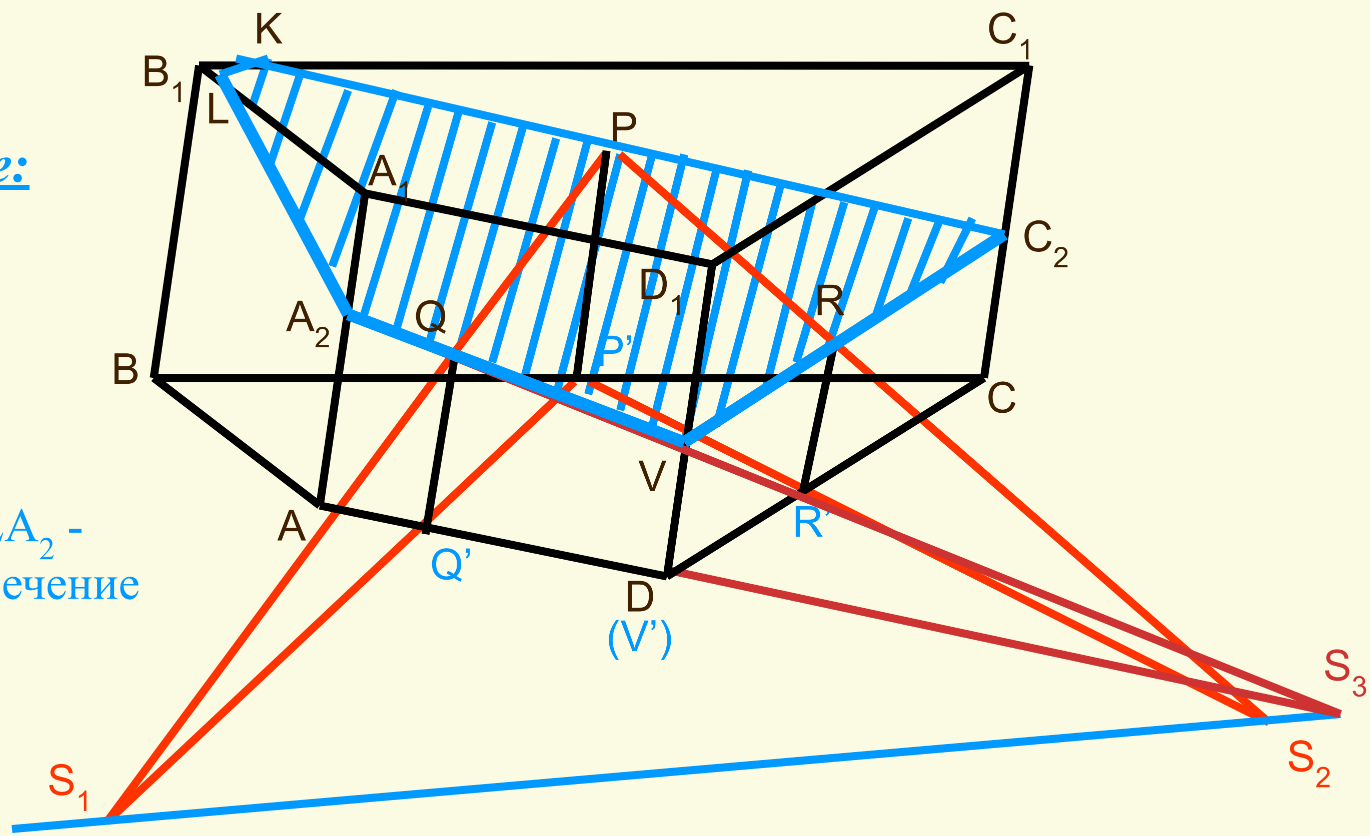
Решение:

- Построим точки P', Q', R' - проекции соответственно точек P, Q, R на плоскость ABC.
- Так как $BB_1 \| AA_1$, $BB_1 \| PP'$, $AA_1 \| QQ'$, то $PP' \| QQ'$ и, значит, определя-ют плоскость. Прямые PQ и P'Q' лежат в одной плоскости. Найдем точку S_1, в которой пересекаются эти прямые. По теореме 15.2. точка S_1 является общей точкой плоскостей PQR и ABC. По аксиоме C_2 эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_1 .
- Так как $CC_1 \| PP'$, $CC_1 \| RR'$, то $PP' \| RR'$ и, значит, определяют плоскость. Аналогично найдем точку S_2 , в которой пересекаются прямые QR и Q'R' и которая является общей для плоскостей PQR и ABC. По аксиоме C_2 эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_2 .
- Проведём прямую S_1 S_2. По теореме 15.2. Эта прямая лежит как в плоскости ABC, так и в плоскости PQR. Таким образом, прямая S_1 S_2 -это искомая линия пересечения.

Проектное задание №4:

- В гранях BCC_1B_1, ADD_1A_1 и CDD_1C_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q, R. Построим сечение призмы плоскостью PQR.

Решение:



VC_2KLA_2 - искомое сечение

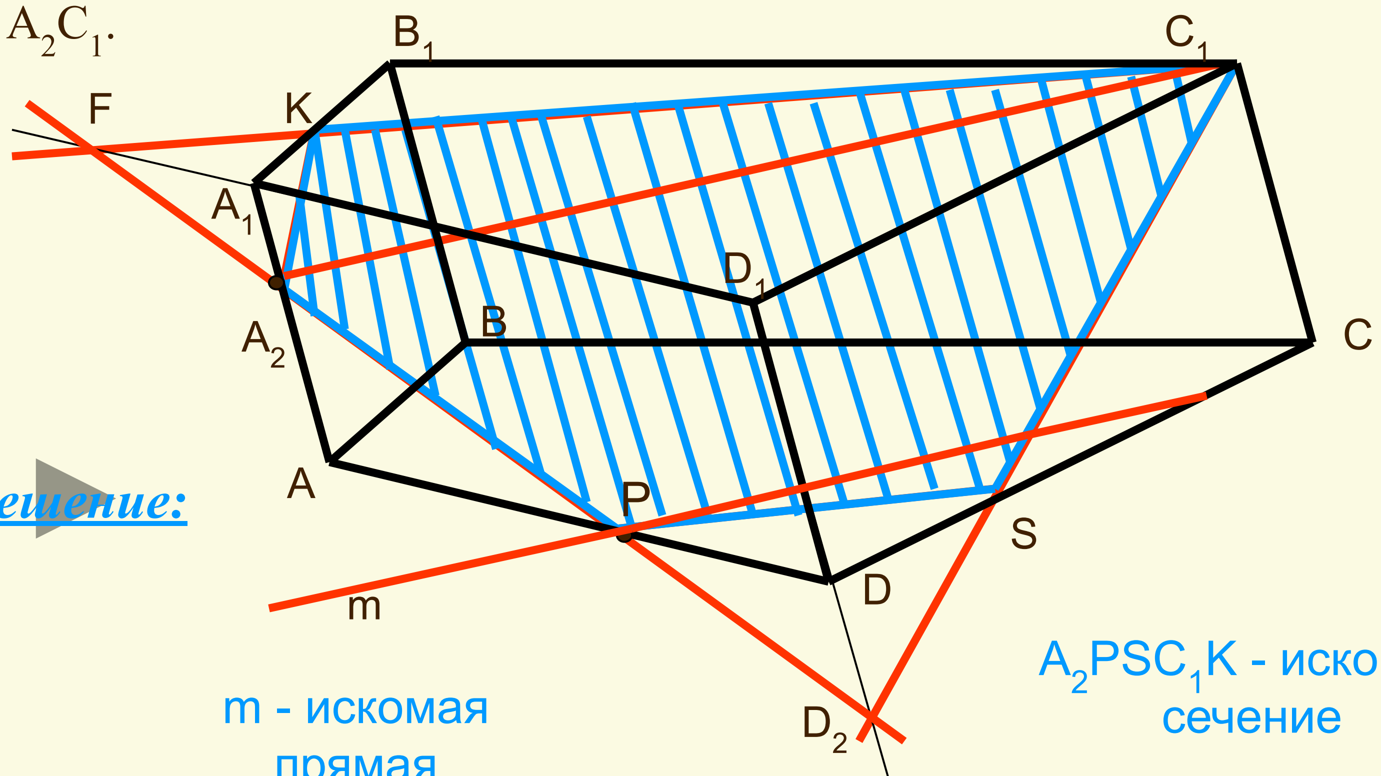
Решение:

- Построим прямую S_1S_2- след плоскости PQR на плоскости ABC.
- Точка Q является общей для плоскостей PQR и ADD_1. Они пересекаются по прямой, проходящей через точку Q (по Т 15.2.). Проекция точки пересечения прямой DD_1 с плоскостью PQR на плоскость ABC совпадает с точкой D. Пересечение Q'V' с пря-мой S_1S_2 дает точку S_3. Точка S_3 является общей для плоскостей PQR и ADD_1. Эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_3 (по Т 15.2.).
- Точки Q и S_3 являются общими для плоскостей PQR и ADD_1. Значит, прямая QS_3 - это линия пересечения этих плоскостей. Проведем её и найдём точки V(точка пере-сечения прямых QS_3 и DD_1) и A_2(точка пересечения прямых QS_3 и AA_1). Отрезок A_2V является пересечением плоскости PQR с гранью ADD_1A_1.
- Точки R и V являются общими для плоскостей PQR и C_1CD. Значит, прямая RV - это линия пересечения этих плоскостей. Найдём точку C_2, в которой прямая RV пе-ресекает CC_1. Отрезок VC_2 является пересечением плоскости PQR с гранью C_1CDD_1.
- Рассуждая аналогично найдем отрезок C_2K, который является пересечением плоскости PQR с гранью C_1CBB_1.
- По свойству параллельных плоскостей прямые $S_1S_2 \| KL$, где К - это точка пересе-чения ребра B_1A_1 с плоскостью PQR.

VC_2KLA_2 - искомое сечение

Проектное задание №5:

- На ребрах AA_1 и AD призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки A_2 и P. Через точку P проведем прямую m, параллельную прямой A_2C_1.



Решение:

m - искомая прямая

A_2PSC_1K - искомое сечение

Решение:

- Проведём прямую A_2P и найдем точки пересечения A_2P с DD_1 и A_1D_1 (D_2 и F соответственно).
- Проведем прямую D_2C_1 и найдем S - точку пересечения прямых D_2C_1 и CD.
- Проведём прямую SP.
- Проведём прямую C_1F и найдём К - точку пересечения C_1F и A_1B_1. .
- Соединим точку A_2 с точкой К

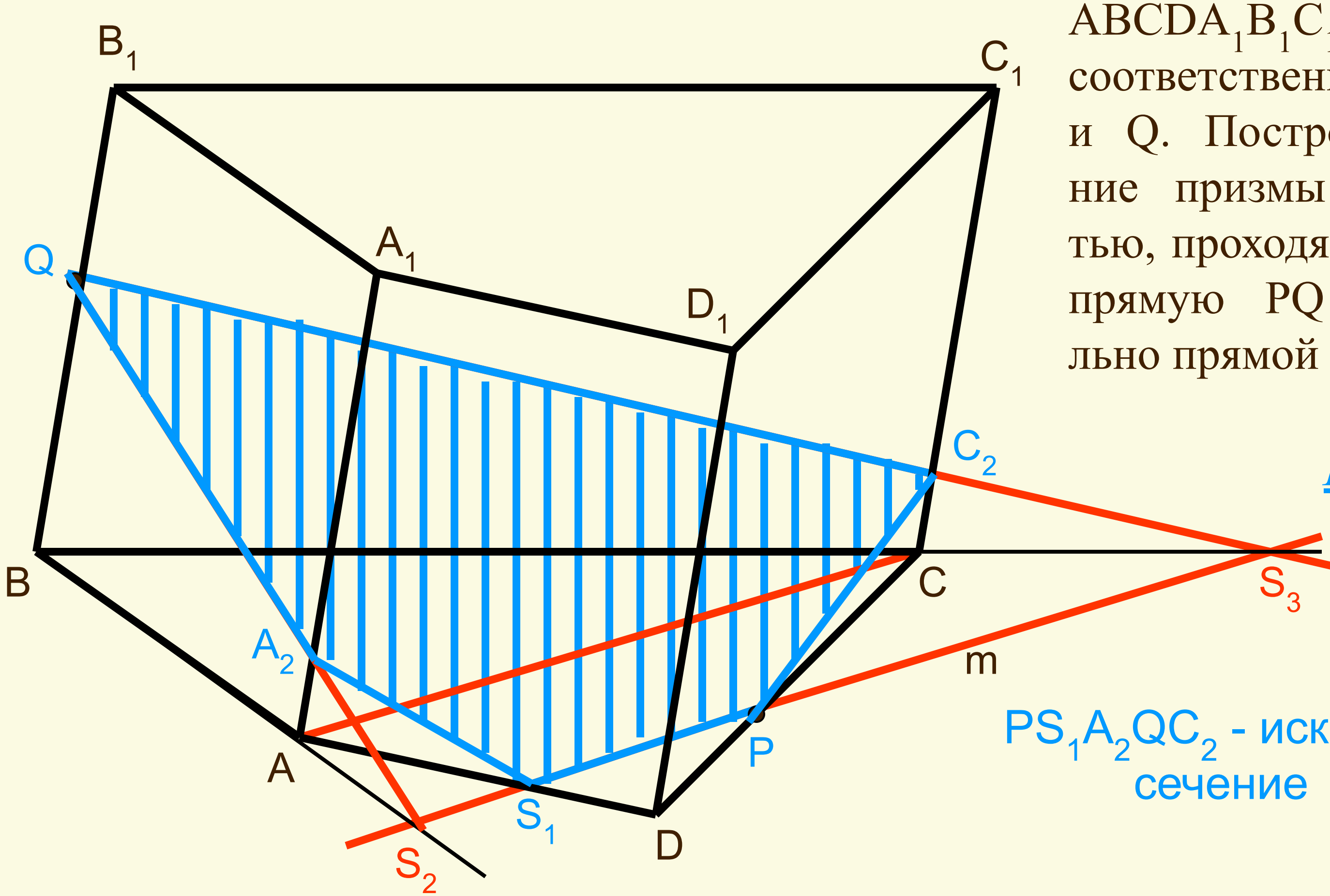
A_2PSC_1K- сечение призмы

- В плоскости A_2C_1P через точку P проведем прямую $m \| A_2C_1$ и найдем Y - точка пересечение прямых m и D_2C_1.

PY-искомая прямая

- Замечание: Прямые PS и KC_1 получились параллельными. Закономерность этого факта обосновывается свойством параллельных плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$.

Проектное задание №6:



- На ребрах CD и BB_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q. Построим сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую PQ параллельно прямой AC.

Решение:

$PS_1A_2QC_2$ - искомое сечение

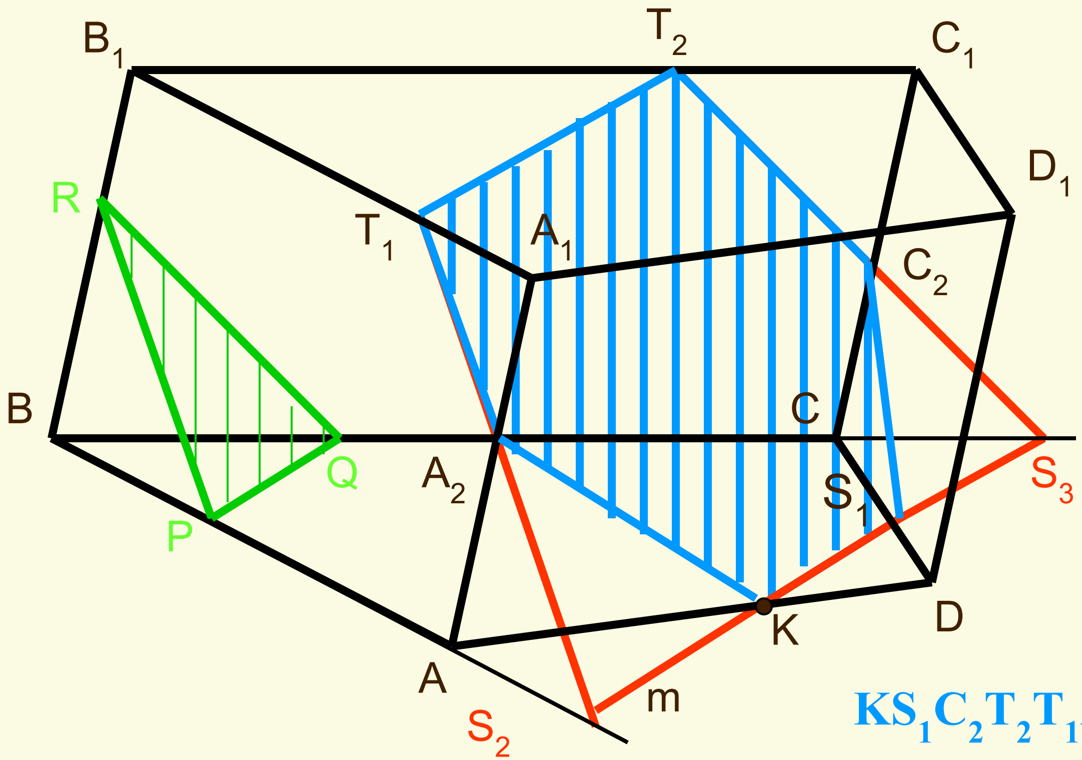
Решение:

- В плоскости ABC проведём прямую $m \| AC$.
- Найдем S_1, S_2, S_3 - точки пересечения прямой m с прямыми AD, AB, BC соответственно.
- Прямая QS_2 - линия пересечения секущей плоскости с плоскостью ABB_1. Найдем A_2 - точку пересечения прямых AA_1 и QS_2. Отрезок QA_2 является пересечением секущей плоскости с гранью ABB_1A_1.
- Прямая QS_3 - линия пересечения секущей плоскости с плоскостью BCC_1. Найдем C_2 - точку пересечения прямых CC_1 и QS_3. Отрезок QC_2 является пересечением секущей плоскости с гранью BCC_1C_1.
- Соединим точку A_2 с точкой S_1 и точку C_2 с точкой P. Отрезки A_2S_1 и C_2P являются пересечениями секущей плоскости соответственно с гранями ADD_1A_1 и CDD_1C_1.

$PS_1A_2QC_2$ - искомое сечение

Проектное задание №7:

- На ребрах AB, BC и BB_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R. Построим сечение призмы плоскостью, параллельной плоскости PQR и проходящей через точку K взятую на ребре AD.



Решение:

$KS_1C_2T_2T_1A_2$ - искомое сечение

Решение:

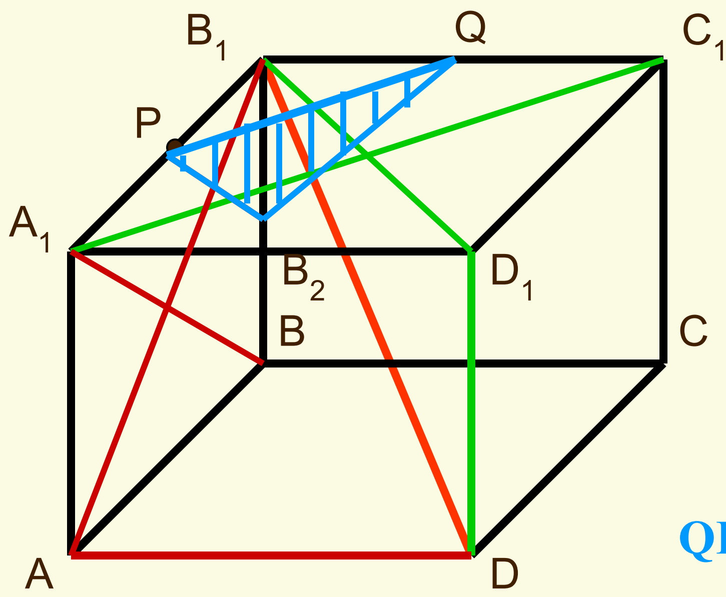
- В плоскости ABC через точку K проведём прямую m||PQ.
- Найдем S_1, S_2, S_3 - точки пересечения прямой m с прямыми CD, AB, BC соответственно.
- В плоскости ABB_1 через точку S_2 прямую n||PR.
- Найдем A_2, T_1 - точки пересечения прямой n с прямыми AA_1, B_1A_1 соответственно.
- В плоскости CBB_1 через точку S_3 прямую k||QR.
- Найдем C_2, T_2 - точки пересечения прямой k с прямыми CC_1, B_1C_1 соответственно.
- Соединим точку T_1 с точкой T_2, точку S_1 с точкойC_2, точку A_2 с точкой K.

$KS_1C_2T_2T_1A_2$ - искомое сечение

- Замечание: Прямые KS_1 и T_1T_2 получились параллельными. Закономерность этого факта обосновывается свойством параллельных плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$.

Проектное задание №8:

- На ребре A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P - середина этого ребра. Построим сечение куба плоскостью, проходящей через точку P перпендикулярно прямой B_1D.



Решение:

QPB_2 - искомое сечение

Решение:

- Так как A_1C_1 перпендикулярна B_1D_1 и A_1C_1 перпендикулярна DD_1, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости DD_1B_1.
- Проведём в плоскости $A_1B_1C_1$ через точку P прямую $PQ||A_1C_1$. По свойству перпендикулярных прямой и плоскости прямая PQ перпендикулярна плоскости DD_1B_1, и, следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В частности, PQ перпендикулярна B_1D.
- Рассуждая аналогично, проведём через точку P в плоскости ABB_1 прямую $PB_2||A_1B$. Тогда PB_2 перпендикулярна B_1D.
- Так как прямая B_1D (по построению) перпендикулярна двум пересекающимся прямым PQ и PB_2, то плоскость, определяемая этими прямимы, перпендикулярна прямой B_1D.

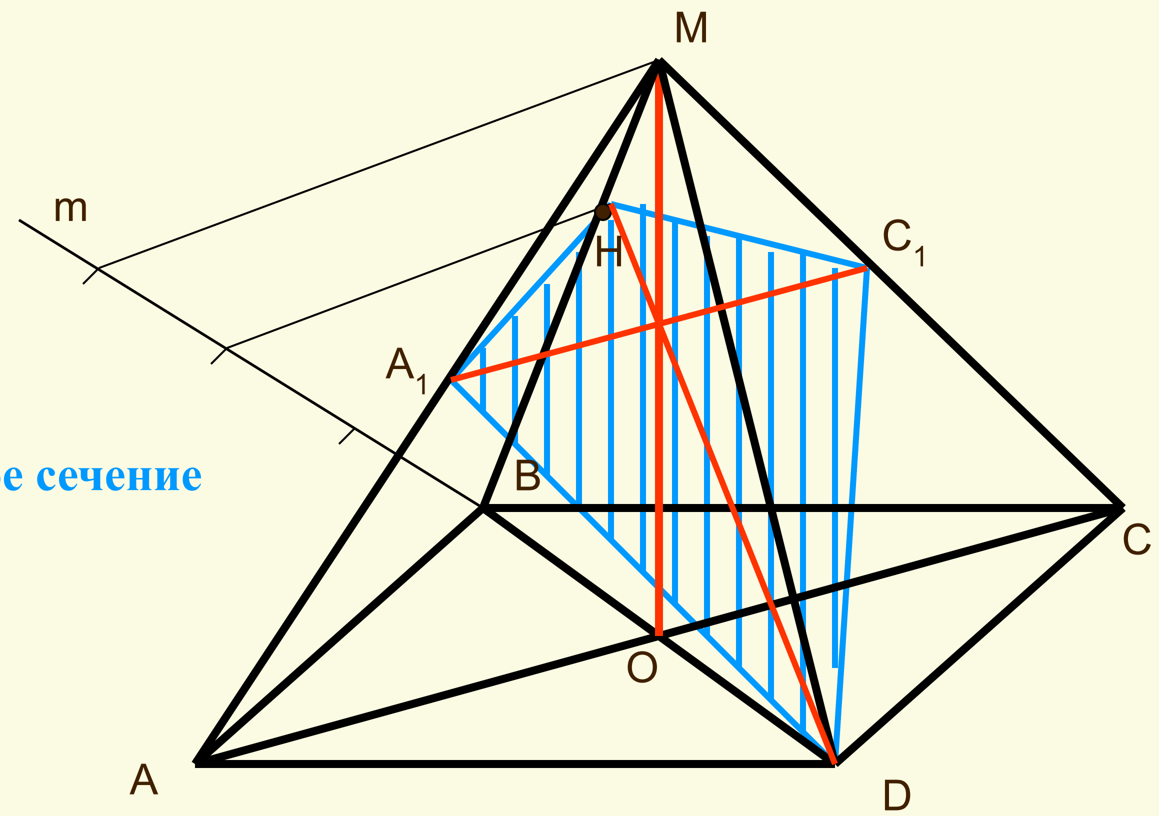
QPB_2 - искомое сечение

Проектное задание №9:

- Высота МО правильной пирамиды МАВСD равна стороне ее основания. По-строим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину D перпенди-кулярно прямой МВ.

Решение:

DA_1HC_1 - искомое сечение



Решение:

$$MO=a, BD=a\sqrt{2}, BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$MB=MD=\sqrt{MO^2+OB^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$DB^2-BH^2=DM^2-MH^2, \text{или}$$

$$2a^2-BH^2=\frac{6a^2}{4}-MH^2, \text{т.к.} MH=MB-BH$$

$$\text{получим } 2a^2-BH^2=\frac{6a^2}{6}-\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}-BH\right)^2,$$

$$\text{находим } BH=\frac{2a}{\sqrt{6}}.$$

$$BH:BM=\frac{2a}{\sqrt{6}}:\frac{a\sqrt{6}}{2}=2:3.$$

- В плоскости BMD опустим перпендикуляр из точки D на прямую MB. Выполним это построение вычислительным способом. Для построения точки H подсчитаем, что отношение BH:BM=2:3. Зная это отношение параллельных отрезков BH и BM, построим с помощью вспомогательного луча m точку H и проведем затем прямую DH.
- Проведем в плоскости MAC через точку пересечения прямых DH и MO прямую $A_1C_1 \| AC$. По свойству перпендикулярных прямой и плоскости AC перпендикулярна плоскости BDM. Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В частности, A_1C_1 перпендикулярна MB.
- Пересекающимися прямыми A_1C_1 и DH определяется плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно прямой MB.

DA_1HC_1 - искомое сечение

МОИ ИНСТРУМЕНТЫ:

При выполнении данного проекта мою деятельность мож-но разделить на три этапа:

- работа с текстом;
- геометрические построения;
- анимация.

При работе с текстом я использовала: вставку надписи, цвет текста, нижний индекс, шрифт, размер шрифта.

Для геометрического построения мне были необходимы ин-струменты: линии, цвет линии, тип линии, тип штриха, овал.

Для того чтобы выполнить анимацию мне был нужен ин-струмент-группировка. Без него анимация была бы трудо-емкой.

Я старалась выдержать проект в едином стиле.

ВЫВОДЫ:

Создавая проект, я поняла:

- *технологию применения основных аксиом и теорем стерео-метрии;*
- *за чем нужен и как пользоваться инструментом группи-ровка.*

Этот проект научил меня:

- *строить сечение многогранников;*
- *делать выноски и пользоваться управляющими кнопками.*

Из опыта работы по этому проекту в дальнейшем мне приго-диться:

- *способности планировать свою деятельность и оформ-лять наглядно и стильно любую работу;*
- *навык работы с инструментами: группировка и управляю-щие кнопки.*