

# СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Угол между векторами в пространстве определяется аналогично тому, как это делалось для векторов на плоскости. А именно, угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю. В остальных случаях векторы откладываются от общего начала, и угол между ними определяется как угол между векторами, лежащими в одной плоскости.

**Скалярным произведением** двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  обозначается  $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ . По определению,  $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ .

Произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  называется **скалярным квадратом** и обозначается  $\vec{a}^2$ . Из формулы скалярного произведения следует равенство  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ .

# СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

**Теорема.** Скалярное произведение векторов  $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$  выражается формулой  $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ .

Используя формулу  $\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$ ,

и формулу скалярного произведения, можно находить угол между векторами.

Для скалярного произведения векторов справедливы свойства, аналогичные свойствам произведения чисел:

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .

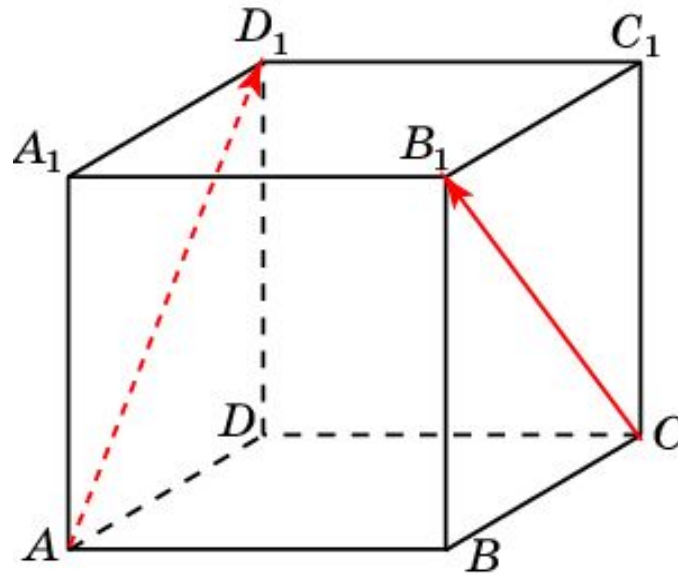
2.  $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$ .

3.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ .

# Упражнение 1

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между векторами

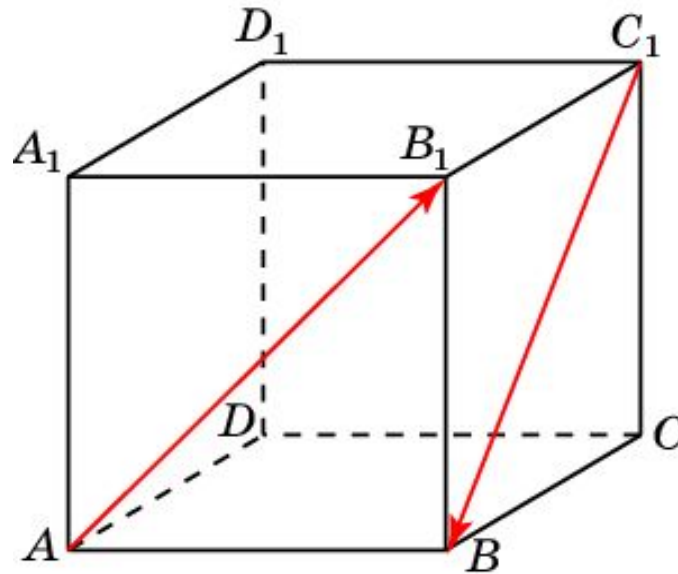
$\overrightarrow{AD_1}$  и  $\overrightarrow{CB_1}$ .



Ответ.  $90^\circ$ .

## Упражнение 2

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между векторами  $\overrightarrow{AB_1}$  и  $\overrightarrow{C_1B}$ .

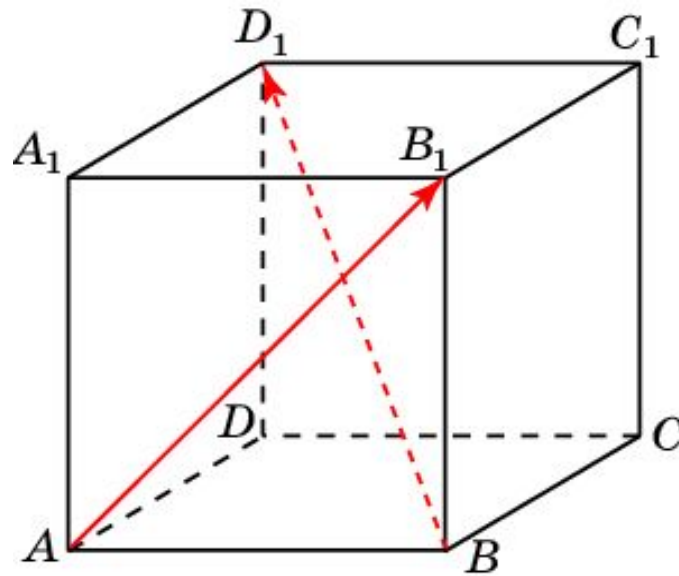


Ответ.  $120^\circ$ .

## Упражнение 3

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между векторами

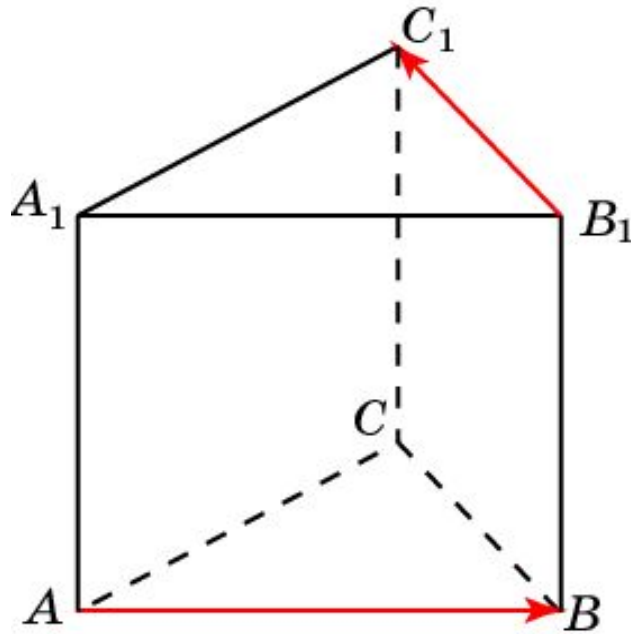
$\overrightarrow{AB_1}$  и  $\overrightarrow{BD_1}$ .



Ответ.  $90^\circ$ .

## Упражнение 4

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{B_1C_1}$ .



Ответ.  $120^\circ$ .

## Упражнение 5

В правильной шестиугольной призме  $A \dots F_1$  найдите угол между векторами:

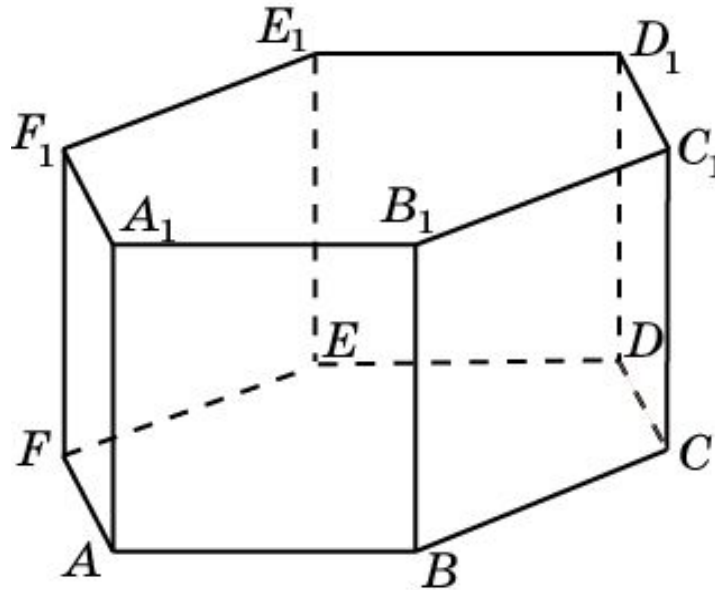
а)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{B_1C_1}$ ;

б)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{C_1D_1}$ ;

в)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{B_1D_1}$ ;

г)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{B_1E_1}$ ;

д)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{C_1E_1}$ .



**Ответ.** а)  $60^\circ$ ; б)  $120^\circ$ ; в)  $90^\circ$ ; г)  $120^\circ$ ; д)  $150^\circ$ .

## Упражнение 6

Дан прямоугольный параллелепипед  $OABCO_1A_1B_1C_1$ , представленный на рисунке. Найдите скалярное произведение векторов:

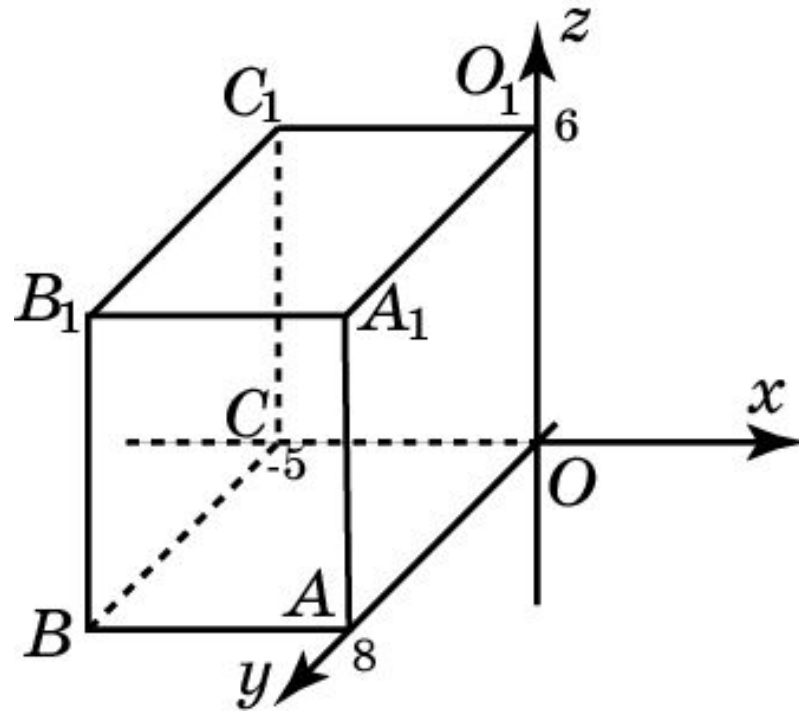
а)  $\overrightarrow{AA_1}$  и  $\overrightarrow{OB}$  ;

б)  $\overrightarrow{C_1O_1}$  и  $\overrightarrow{C_1A_1}$  ;

в)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{OB}$  ;

г)  $\overrightarrow{CA_1}$  и  $\overrightarrow{CA}$  ;

д)  $\overrightarrow{O_1B}$  и  $\overrightarrow{C_1B}$  .



**Ответ:** а) 0; б) 25; в) 25; г) 89; д) 100.



## Упражнение 7

Найдите скалярное произведение векторов  $a_1(-1, 2, 3)$  и  $a_2(2, -1, 0)$ .

Ответ:  $-4$ .

## Упражнение 8

Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними: а) острый; б) тупой?

**Ответ:** а) Плюс; б) минус.

## Упражнение 9

В каком случае скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю?

**Ответ:** Если они перпендикулярны.

## Упражнение 10

Найдите угол между векторами:

а)  $a_1'(2, 3, -1)$  и  $a_2'(1, -2, 4)$ ;

б)  $a_1'(1, 2, -2)$  и  $a_2'(1, 0, -1)$ .

**Ответ:** а)  $\cos \varphi = -\frac{4\sqrt{6}}{21}$  ; б)  $\varphi = 45^\circ$ .

## Упражнение 11

При каком значении  $z$  векторы  $\vec{a} = 3i - 5j + zk$  и  $\vec{b} = -4i - 2j + k$  перпендикулярны?

Ответ:  $z = -2$ .

## Упражнение 12

Точки  $M, N, P$  – середины ребер  $AB, AD, DC$  правильного тетраэдра с ребром 4. Найдите скалярные произведения:

а)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ ;

б)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$ ;

в)  $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;

г)  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;

д)  $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{BA}$ ;

е)  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PC}$ .

**Ответ:** а) 2; б) -2; в) -2; г) 1; д) -1; е) 0.

## Упражнение 13

Найдите углы, которые образует с координатными векторами вектор:

а)  $i + j + k$ ;

б)  $-3j - k$ ;

в)  $-5i$ ;

г)  $a(0, 3, 4)$ .

**Ответ:** а)  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; б)  $90^\circ$ ,  $\cos \varphi = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$ ,  $\cos \varphi = \frac{-\sqrt{10}}{10}$ ;

в)  $180^\circ, 90^\circ, 90^\circ$ ; г)  $90^\circ$ ,  $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \varphi = \frac{4}{5}$ .

## Упражнение 14

Найдите координаты единичного вектора, если известно, что он перпендикулярен векторам с координатами  $(1,1,0)$ ,  $(0,1,1)$ .

Ответ:  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ,  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ .