Скалярное произведение в координатах

Подготовила:
учитель математики
МОУ сош №30 имени А.И.Колдунова
Кутоманова Е.М.

2010-2011 учебный год

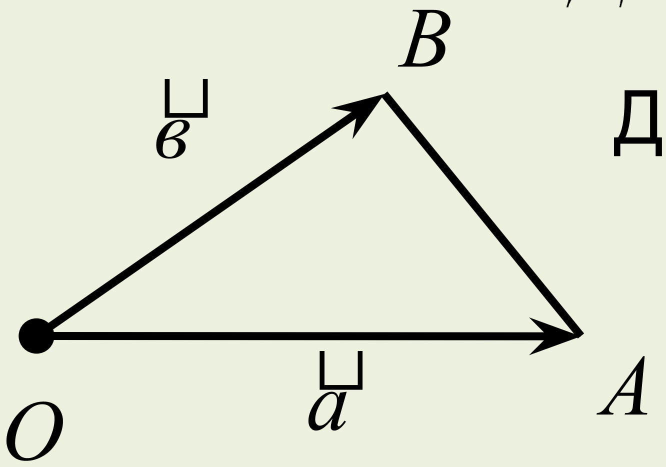
Теорема

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{в}\{x_2; y_2\}$

выражается формулой $\vec{a} \cdot \vec{в} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$

$$Дано: \vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{\text{в}}\{x_2; y_2\}$$

$$Доказать: \vec{a}\cdot\vec{\text{в}} = x_1x_2 + y_1y_2.$$



Доказательство.

По теореме косинусов:

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\alpha$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{\text{в}} - \vec{a}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{\text{в}}$

$$|\vec{a} - \vec{\text{в}}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{\text{в}}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{\text{в}}, \quad \vec{a}\cdot\vec{\text{в}} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{\text{в}}|^2 - |\vec{a} - \vec{\text{в}}|^2\right).$$

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2, |\vec{в}|^2 = x_2^2 + y_2^2,$$

$$|\vec{в} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 =$$

$$= x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - y_1^2 + 2y_1y_2 - y_2^2\right) =$$

$$= \frac{2x_1x_2 + 2y_1y_2}{2} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Теорема доказана.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{в} = x_1 x_2 + y_1 y_2}$$

№1044(а)

Дано:

$\vec{a}\left\{\frac{1}{4};-1\right\}, \vec{в}\{2;3\}$

Найти: $\vec{a} \cdot \vec{в}$

Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = \frac{1}{4} \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 0{,}5 - 3 = -2{,}5.$$

Ответ: -2,5.

Следствие 1.
Ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

№1047(а)

$\textit{Дано}: \boxed{\vec{a} \perp \vec{в}}$

$\vec{a}\{4;4\}, \vec{в}\{x;-6\}$

$\textit{Найти}: x$

Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = x_1x_2 + y_1y_2,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = 4x - 5 \cdot 6 =$$

$$= 4x - 30,$$

$$4x - 30 = 0,$$

$$x = 7{,}5.$$

$$\textit{Ответ}: 7{,}5$$

Следствие 2.

Косинус угла между векторами выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

$№1.\ Дано:$

$\vec{a}\{1;1\}, \vec{в}\{3;4\}$

$Найти: \alpha$

Решение.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}, \vec{a}\cdot\vec{в} = 1\cdot3 + 1\cdot4 = 7,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, |\vec{в}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для векторов $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ *и любого числа к справедливы соотношения:*

1. $\vec{a}^2 \geq 0$, *причём* $\vec{a}^2 > 0$ *при* $\vec{a} \neq \vec{0}$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{в} = \vec{в} \cdot \vec{a}$ (*переместительный закон*).
3. $(\vec{a} + \vec{в}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{в} \cdot \vec{c}$ (*распределительный закон*).
4. $(к\vec{a}) \cdot \vec{в} = к(\vec{a} \cdot \vec{в})$ (*сочетательный закон*).

№1054

Дано:

$\widehat{\vec{a}\vec{в}} = \widehat{\vec{в}\vec{c}} = 60^\circ$,

$|\vec{a}| = 1, |\vec{в}| = |\vec{c}| = 2$,

Найти: $(\vec{a} + \vec{в}) \cdot \vec{c}$

Решение.

$(\vec{a} + \vec{в}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{в}\vec{c}$,

$\vec{a}\vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot cos60^\circ = 1 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 1$,

$\vec{в}\vec{c} = |\vec{в}| \cdot |\vec{c}| \cdot cos60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 2$,

$(\vec{a} + \vec{в}) \cdot \vec{c} = 1 + 2 = 3$.