

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$. По определению,

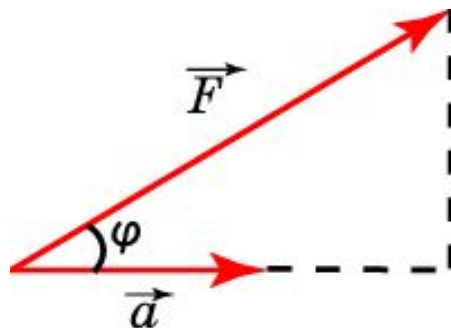
$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos \varphi.$$

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** и обозначается \vec{a}^2 . Из формулы скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Для скалярного произведения векторов имеет место формула $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$, где $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$.

Физический смысл

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и связывает работу A , производимую постоянной силой F при перемещении тела на вектор a , составляющий с направлением силы угол φ , а именно, имеет место следующая формула: $A = F \cdot a = |F| \cdot |a| \cdot \cos \varphi$.



Пример 1

Дан вектор $m(a, b)$. Найдите координаты перпендикулярного к нему вектора.

Решение: Для искомого вектора $n(x, y)$ должно выполняться равенство $ax + by = 0$. Например, этому равенству удовлетворяют $x = b, y = -a$. Следовательно, искомый вектор имеет координаты $n(-b, a)$.

Пример 2

Найдите угол A треугольника с вершинами

$$A(-1, \sqrt{3}), \quad B(1, -\sqrt{3}), \quad C\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right).$$

Решение: Воспользуемся определением скалярного произведения векторов \vec{AB} и \vec{AC} . Имеем $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos A$. Вычислим это скалярное произведение через координаты векторов. Вектор \vec{AB} имеет координаты $(2, -2\sqrt{3})$, следовательно, его длина равна 4. Вектор \vec{AC} имеет координаты $(\frac{3}{2}, \sqrt{3})$, следовательно, его длина равна $\frac{3}{2}$. Скалярное произведение данных векторов равно 3. Подставляя эти данные в формулу скалярного произведения, получим $\cos A = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $A = 60^\circ$.

Упражнение 1

Вычислите скалярное произведение двух векторов a и b , если $|a| = 2$, $|b| = 3$, а угол между ними равен: а) 45° ; б) 90° ; в) 135° .

Ответ: а) $3\sqrt{2}$; б) 0 ; в) $-3\sqrt{2}$.

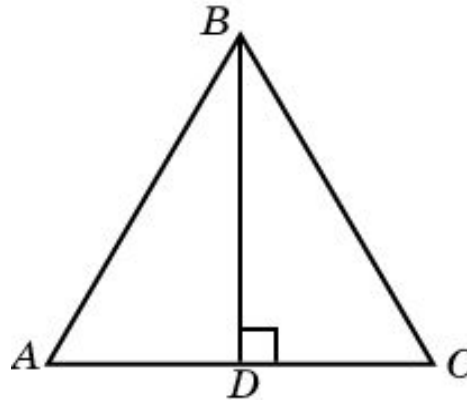
Упражнение 2

В равностороннем треугольнике ABC со стороной 1 проведена высота BD . Вычислите скалярное произведение векторов:

а) \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{CB} ;

б) \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BD} ;

в) \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AC} .



Ответ: а) $-\frac{1}{2}$; б) 0; в) 1.

Упражнение 3

Найдите скалярное произведение векторов $(a_1, 2)$ и $(a_2, -1)$.

Ответ: -4 .

Упражнение 4

Охарактеризуйте угол ϕ между векторами a и b , если:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0;$

Ответ: а) $0^\circ < \phi < 90^\circ;$

б) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0;$

б) $90^\circ < \phi < 180^\circ ;$

в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$

в) $\phi = 90^\circ;$

г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$

г) $\phi = 180^\circ.$

Упражнение 5

Длины векторов a и b равны 1. При каком угле между ними скалярное произведение будет: а) наибольшим; б) наименьшим?

Ответ: а) $\phi = 0^\circ$;
б) $\phi = 180^\circ$.

Упражнение 6

Найдите угол между векторами $a(1, 2)$ и $b(1, 0)$.

Ответ: $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Упражнение 7

Какой угол φ образуют единичные векторы a и b , если известно, что $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - \vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

Ответ: 60° .

Упражнение 8

При каком значении t вектор $2\vec{a} + tb$ перпендикулярен вектору $b - a$, если $a = (2, -1)$, $b = (4, 3)$.

Ответ: $t = 0$.

Упражнение 9

Для прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ см, $AD = 8$ см найдите скалярное произведение:

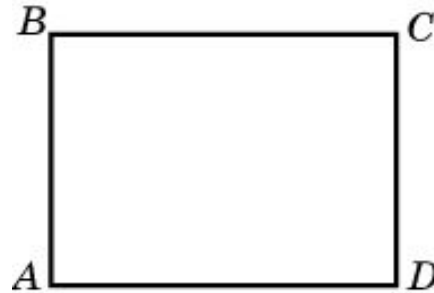
а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE}$;

б) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$;

в) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD}$;

г) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF}$,

где E и F — середины сторон AD и CD соответственно.



Ответ: а) 36; б) 68; в) 82; г) 50.

Упражнение 10

Вычислите, какую работу A производит сила $(-3, \frac{4}{A})$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $B(5, -1)$ в положение $C(2, 1)$.

Ответ: $A = 17$.