Соотношения между сторонами и углами треугольника

Теорема о площади треугольников

- Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

A

b

c

C

a

B

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Дано:

$\triangle ABC$

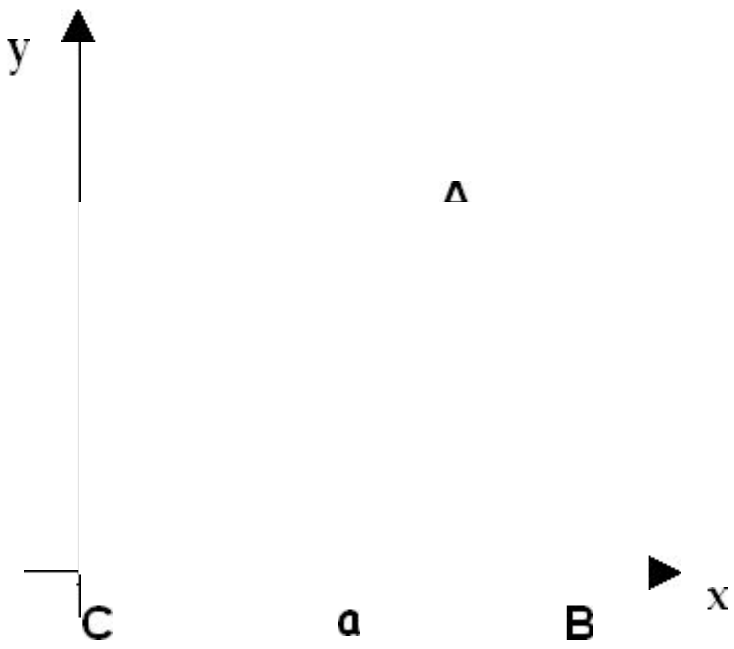
BC=a, CA=b, h-высота

S-площадь треугольника

Доказать:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

Доказательство:



$S = \frac{1}{2}ah$, где h равна ординате точки $A \Rightarrow h = b\sin C \Rightarrow S = \frac{1}{2}ab\sin C$

Теорема синусов

- Стороны треугольника пропорцианальны синусам противолежащих углов

A

b c

C a B

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Дано:

△ ABC

AB=c, BC=a, CA=b.

Доказать:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

Доказательство:

^

C a B

$$\left.\begin{array}{l} S=\frac{1}{2}ab\sin C \\ S=\frac{1}{2}bc\sin A \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\left.\begin{array}{l} S=\frac{1}{2}bc\sin A \\ S=\frac{1}{2}ca\sin B \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B \Rightarrow \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

- Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности

A

b

c

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

C

a

B

Теорема косинусов

- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих строн на косинус угла между ними

A

b

c

C

a

B

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

Дано:

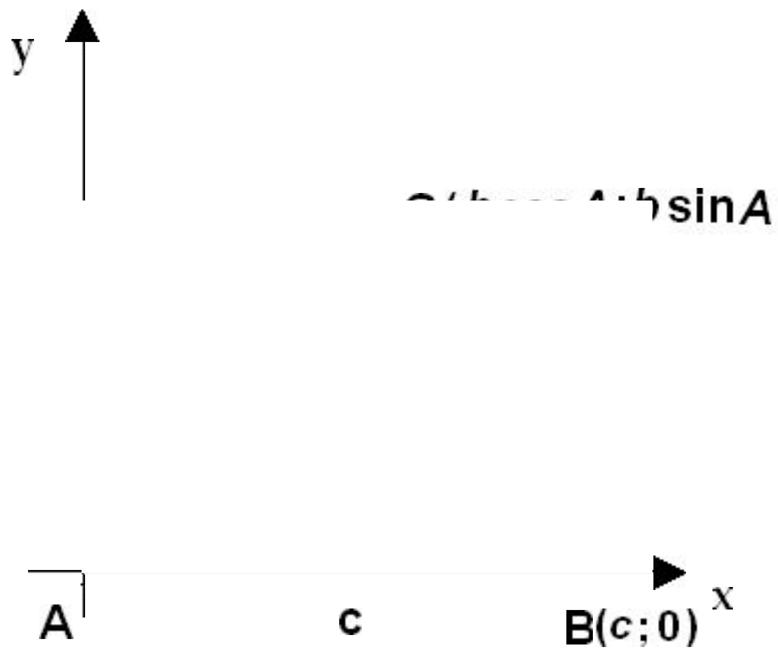
$\triangle ABC$

AB=c, BC=a, CA=b.

Доказать:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Доказательство:



$$BC^2 = a^2 = (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 A =$$
$$= b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A - 2bc\cos A + c^2 =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Решение треугольников

- Решением треугольников называется нахождение всех его шести элементов по каким-нибудь трём данным элементам, определяющим треугольник

Дано:

$\triangle ABC$

$a; b; \angle C$

Найти: $\angle A; \angle B; c$

Решение

A

C a B

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos A}$$

$$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A$$

Дано:

$\triangle ABC$

$a; \angle C; \angle B$

Найти: $b; c; \angle A$

Решение

A

C a B

$$\angle A = 180^{\circ} - \angle B - \angle C$$

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}$$

$$c = a\frac{\sin C}{\sin A}$$

Дано:

$\triangle ABC$

a; b; c

Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$

Решение

A

C

B

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A$$

Дано:

$\triangle$ ABC

$a=6,3; b=6,3; \angle C=54^{\circ}$

Найти: $\angle A; \angle B; c$

Решение

A

C a B

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos A}\approx 5,7$$

$$\cos A=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\approx 0,4540 \Rightarrow \angle A=63^{\circ}$$

$$\angle B=180^{\circ}-\angle C-\angle A=63^{\circ}$$

Ответ: $c\approx 5,7; \angle B=63^{\circ}; \angle A=63^{\circ};$

Дано:

$\triangle ABC$

$a=14\ ;\ \angle C=40^\circ;\ \angle B=60^\circ$

Найти: $b;\ c\ ;\ \angle A$

Решение

A

C a B

$$\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C\ =80^\circ$$

$$b=a\frac{\sin B}{\sin A}\ \approx 12{,}3$$

$$c=a\frac{\sin C}{\sin A}\ \approx 9{,}1$$

Ответ: $\angle A=80^\circ;\ b\approx 12{,}3;\ c\approx 9{,}1;$

Дано:

$\triangle ABC$

$a=14;\ b=18;\ c=20$

Найти: $\angle A; \angle B; \angle C$

Решение

A

C B

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\approx 0{,}2382 \Rightarrow \angle C=76^\circ 13'$$

$$\cos A=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\approx 0{,}7406 \Rightarrow \angle A=42^\circ 50'$$

$$\angle B=180^\circ-\angle C-\angle A=60^\circ 57'$$

Ответ: $\angle C=76^\circ 13'; \angle A=42^\circ 50'; \angle B=60^\circ 57';$