



«Число, положение и комбинаторика – три  
взаимно пересекающиеся, но различные  
сферы мысли, к которым можно  
отнести все математические идеи»

Джозеф Сильвестр (1844 г.)

# КОМБИНАТОРИКА

# КОМБИНАТОРИКА

- это раздел математики, в котором изучаются различного рода соединения элементов:

- перестановки,
- размещения,
- сочетания.

Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова «*combinā*», что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять».



алгебра

геометрия

М  
а  
т  
е  
м  
а  
т  
и  
к  
а

теория  
вероятностей

комбинаторика

# Готфрид Вильгельм Лейбниц



Лейбниц впервые ввёл термин **«комбинаторика»** и стал рассматривать комбинаторику как самостоятельный раздел математики.

(1646 - 1716)

# Основное правило комбинаторики (правило умножения)

Если некоторый выбор  $A$  можно осуществить  $m$  различными способами, а для каждого из этих способов другой выбор  $B$  можно осуществить  $n$  способами, то выбор  $A$  и  $B$  можно осуществить  $mn$  способами.

## Пример 1

К площади с неким памятником ведёт 6 улиц. По четырём из них разрешено двустороннее движение, а по двум одностороннее – к площади. Водитель собирается приехать на площадь, посмотреть на памятник, а затем покинуть площадь. Каким числом способов он может это сделать?

6 способов попасть на площадь и 4 способа уехать с площади.  
Значит, всего  $6 \times 4 = \mathbf{24}$  способа.

# Основное правило комбинаторики в общем виде

Пусть требуется выполнить одно за другим  $k$  действий. Если первое действие можно выполнить  $n_1$  способами, второе действие –  $n_2$  способами, третье –  $n_3$  способами и так до  $k$ -го действия, которое можно выполнить  $n_k$  способами, то все  $k$  действий вместе могут быть выполнены

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$$

## Пример 2

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5, если:

- а) ни одна из цифр не повторяется более одного раза;
- б) цифры могут повторяться.

а) Для первой цифры 5 вариантов – 1,2,3,4,5 (0 не может быть).  
Для второй цифры 5 вариантов, для третьей 4 варианта,  
для четвёртой 3 варианта.

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 = \mathbf{300 \text{ чисел.}}$$

б) 5 возможностей для первой цифры, 6 вариантов для других:

$$5 \times 6 \times 6 \times 6 = \mathbf{1080 \text{ чисел.}}$$

# Сочетания

**Сочетание из  $n$  элементов по  $k$**  - произвольное  $k$ -элементное подмножество  $n$ -элементного множества (комбинация).  
Порядок элементов в подмножестве не имеет значения.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Термин “**сочетание**” впервые встречается у **Блеза Паскаля** в 1665 году.

$C$  – первая буква французского слова *combinaison* – сочетание.



(1623-1662)

**Число всех подмножеств множества из  $n$  элементов равно  $2^n$ .**

# N!

$n!$  ( $n$ -факториал) – произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$  включительно.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Термин «**факториал**»  
ввел в 1800 году  
французский математик  
Аргобаст Луи Франсуа  
Антуан (1759-1803).

Обозначение  $n!$   
придумал чуть позже  
французский математик  
Кристиан Крамп  
(1760-1826) в 1808 году.



# Сочетания

## Пример 3

Сколькими способами читатель может выбрать 3 книжки из 5?

Число способов равно числу трёхэлементных подмножеств из 5 элементов:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 120 : 12 = 10$$

## Пример 4

Сколькими способами из 7 судей можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

# Перестановки

Множество называется **упорядоченным**, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до  $n$ , где  $n$  – число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа.

**Перестановки** – различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов.

$$P_n = n!$$

Термин “**перестановка**” употребил впервые Якоб Бернулли в книге «Искусство предположений». Р – первая буква французского слова *permutation* – перестановка.



(1654-1705)

# Перестановки

## Пример 5

Перестановки множества  $A=\{a, b, c\}$  из трёх элементов имеют вид:

(a, b, c);      (b, c, a);      (c, a, b);  
(a, c, b);      (b, a, c);      (c, b, a),

т. е.  $P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$  перестановок.

## Пример 6

Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги?

$P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$  способа.

# Размещения

**Размещения из  $n$  элементов по  $k$**  – упорядоченные  $k$ -элементные подмножества множества из  $n$  элементов.

Различные размещения отличаются количеством элементов или их порядком.

$A$  – первая буква французского слова *arrangement* - размещение.

Число всех  $k$ -элементных подмножеств множества  $A$  равно  $C_n^k$

Каждое такое подмножество можно упорядочить  $k!$  способами.

Значит, число размещений из  $n$  по  $k$  равно

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

## Пример 7

Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 мест?

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$$

# Сочетания с повторениями

**Сочетаниями с повторениями** называются такие сочетания, в которых некоторые элементы (или все) могут оказаться одинаковыми.

$$\overline{C}_n^m = C_{m+n-1}^m$$

## Пример 8

Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеется 4 сорта пирожных?

$$\overline{C}_4^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

# Перестановки с повторениями

Рассматривая перестановки ранее, мы предполагали, что  $n$  элементов различны.

Если среди  $n$  элементов есть  $n_1$  элемент одного вида,  $n_2$  элементов другого вида и т.д.,  $n_k$  элементов  $k$ -го вида, то имеем перестановки с повторениями, их число:

$$\overline{P}_n(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}, \text{ где } n_1 + \dots + n_k = n$$

## Пример 9

Сколько различных «слов» можно составить из букв слова ДЕД?  
 $n=3$ ,  $k=2$ ,  $n_1=2$ ,  $n_2=1$

$$\overline{P}_3(2,1) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

## Размещения с повторениями

Размещения из  $n$  элементов, в каждое из которых входит  $m$  элементов, причём один и тот же элемент может повторяться в каждом размещении любое число раз, но не более  $m$  называются **размещениями из  $n$  элементов по  $m$  с повторениями**.

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

### Пример 10

Телефонные номера одной фирмы состоят только из цифр 2,3,5,7. Сколько всего может быть телефонных номеров, если каждый номер семизначный?

$$\overline{A}_4^7 = 4^7 = 16384$$