



*Una Serpiente*



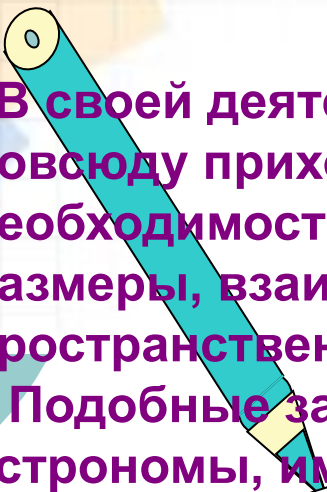
# СТЕРЕОМЕТРИЯ

---

- Объёмы тел
- Изображения пространственных фигур



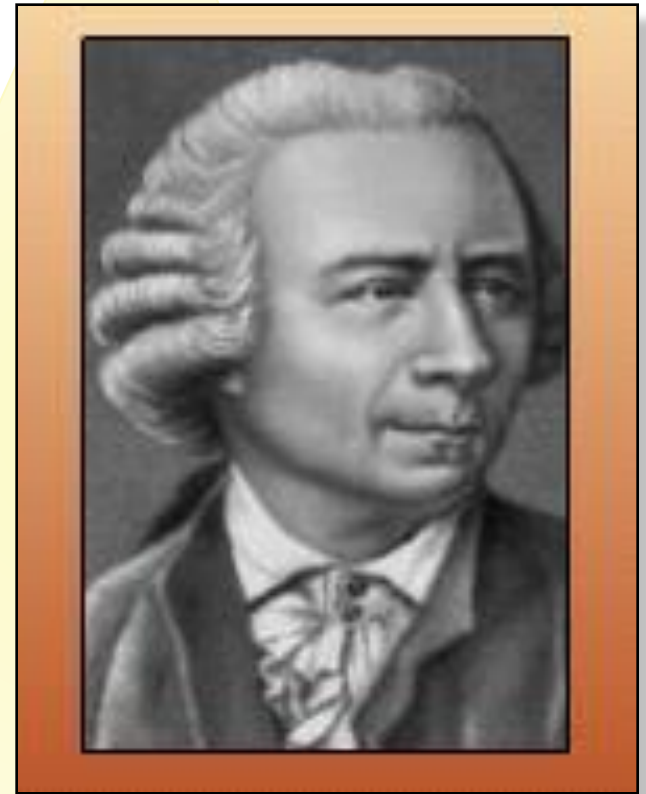
*«Мой карандаш, бывает еще остроумней моей головы», — признавался великий математик Леонард Эйлер (1707—1783).*



**В своей деятельности человеку повсюду приходится сталкиваться с необходимостью изучать форму, размеры, взаимное расположение пространственных фигур.**

**Подобные задачи решают и астрономы, имеющие дело с самыми большими масштабами, и физики, исследующие структуру атомов и молекул.**

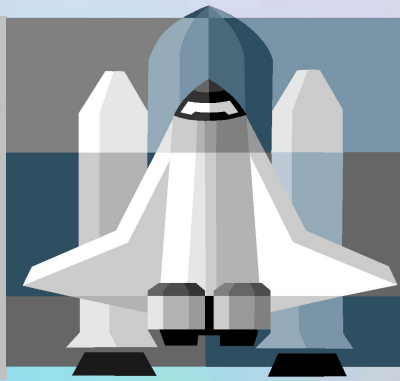
**Раздел геометрии, в котором изучаются такие задачи, называется стереометрией**



*Интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления — это ключ к изучению стереометрии*

# Мы знаем, что

- **ГЕОМЕТРИЯ** возникла из практических задач людей;
- **ГЕОМЕТРИЯ** лежит в основе всей техники и большинства изобретений человечества;
- **ГЕОМЕТРИЯ** нужна
  - технику,
  - инженеру,
  - рабочему,
  - архитектору,
  - модельеру ...



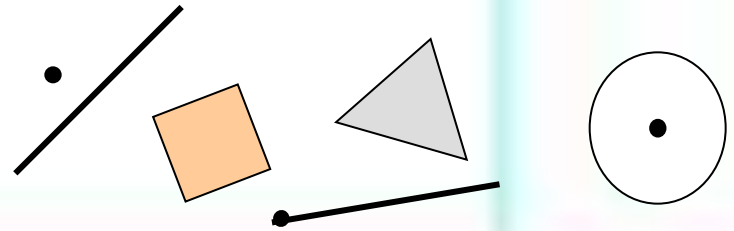


«планиметрия» – наименование смешанного происхождения: от греч. **metreo** – *измерять* и лат. **planum** – *плоская поверхность (плоскость)*

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

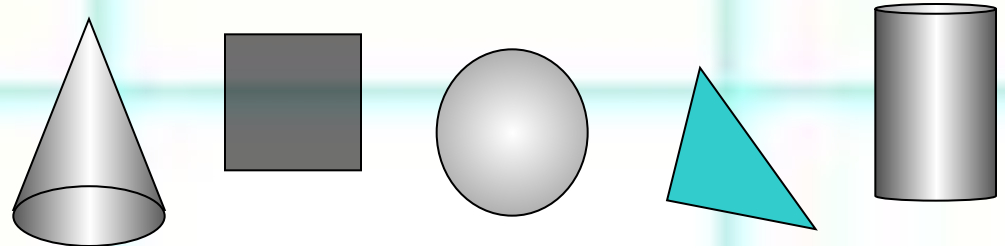
ГЕОМЕТРИЯ на плоскости



«стереометрия» – от греч. **stereos** – *пространственный (stereon – объем)*.

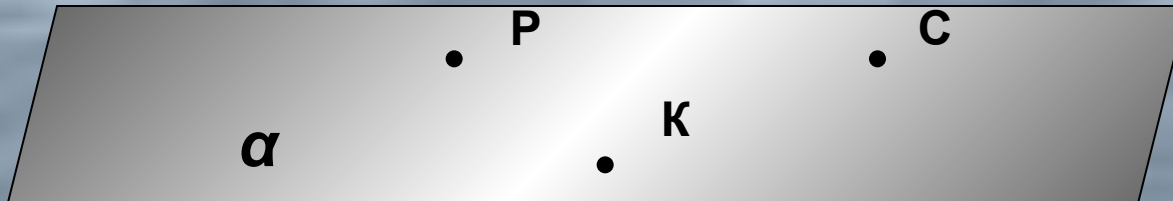
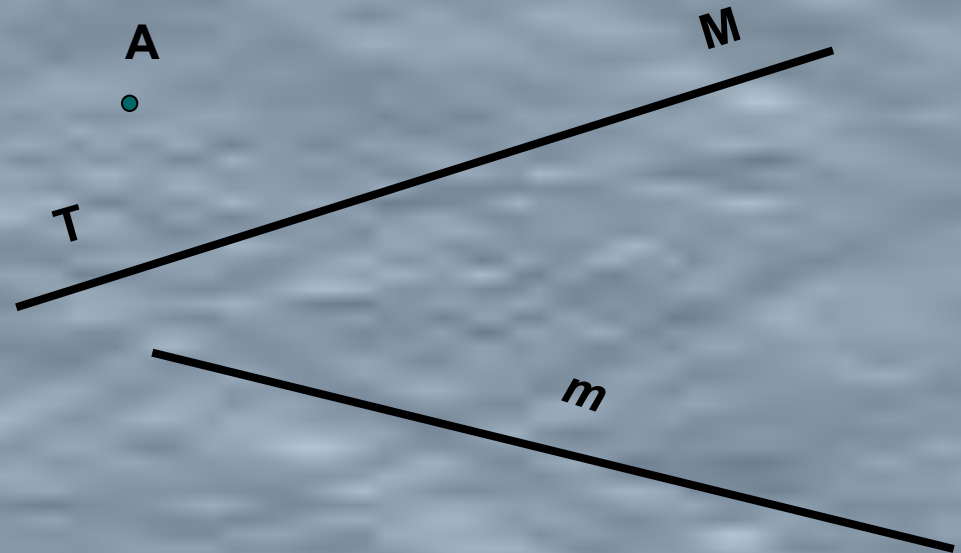
СТЕРЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ в пространстве



# Основные понятия стереометрии

- точка,
- прямая,
- плоскость,
- расстояние



$\alpha = (PKC)$

$|PK|$

$A \notin \alpha, KC \subset \alpha, P \in \alpha, |PK| = 2 \text{ см}$

# Аксиомы стереометрии

*Слово «аксиома» греческого происхождения и в переводе означает **ИСТИННОЕ**, исходное положение теории.*

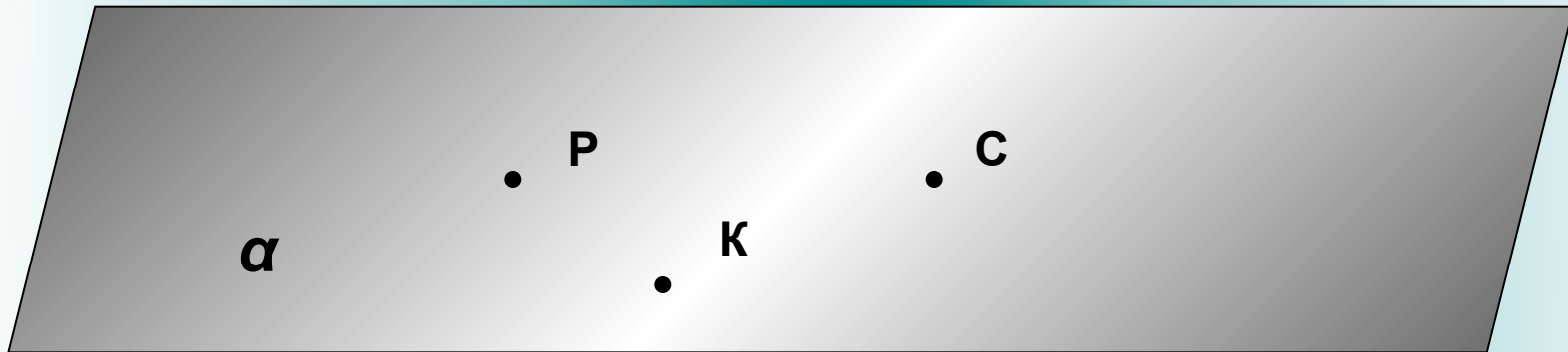
**Система аксиом стереометрии дает описание свойств пространства и основных его элементов**

Понятия «*точка*», «*прямая*», «*плоскость*», «*расстояние*» принимаются без определений: их описание и свойства содержатся в аксиомах

# Аксиомы стереометрии

A-1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой  
проходит плоскость, и притом только одна



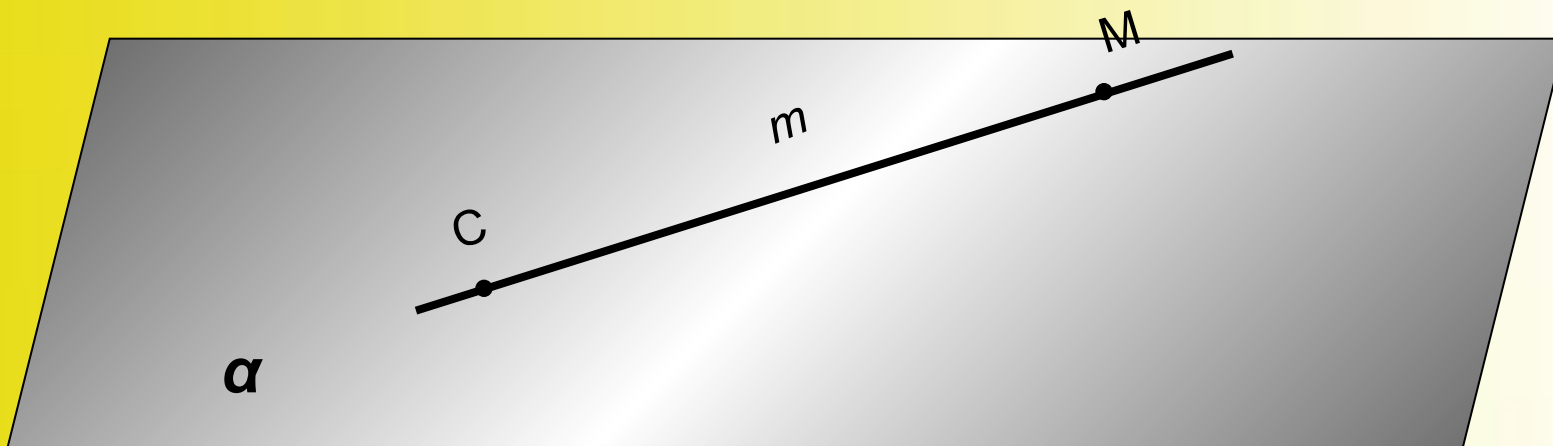
$$\alpha = (PKC)$$



# Аксиомы стереометрии

А-2

**Если две точки прямой лежат в плоскости,  
то все точки прямой лежат в этой плоскости**

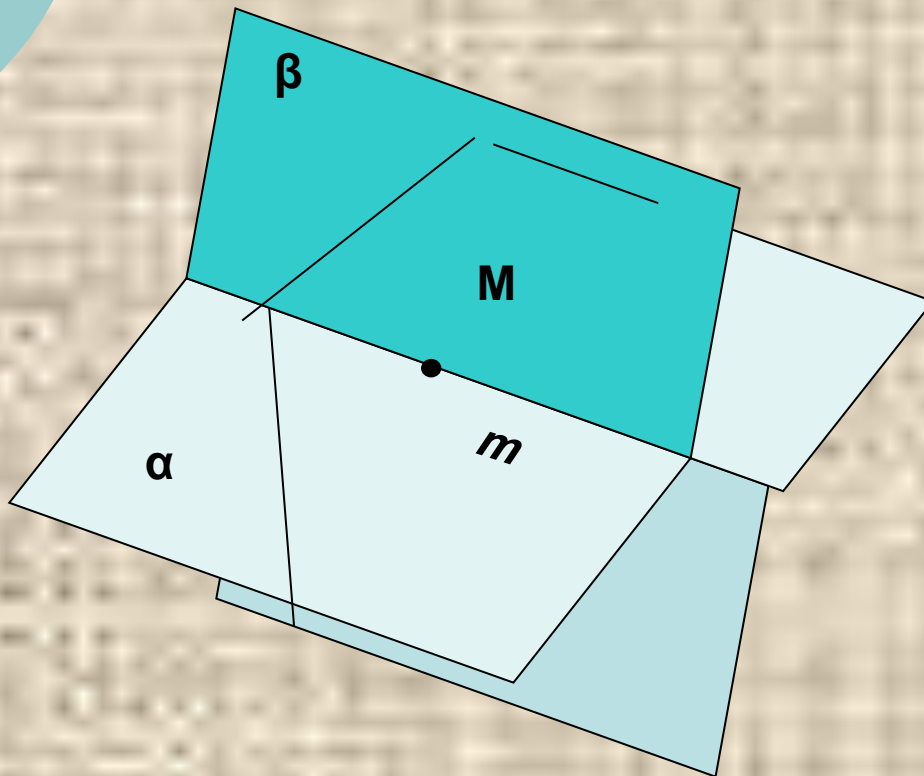


Если  $M, C \in \alpha$   $M, C \in m$ , то  $m \subset \alpha$

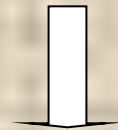
# Аксиомы стереометрии

А-3

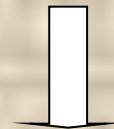
Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$$M \in \alpha, M \in \beta, M \in m$$



$$m \in \alpha, m \in \beta$$

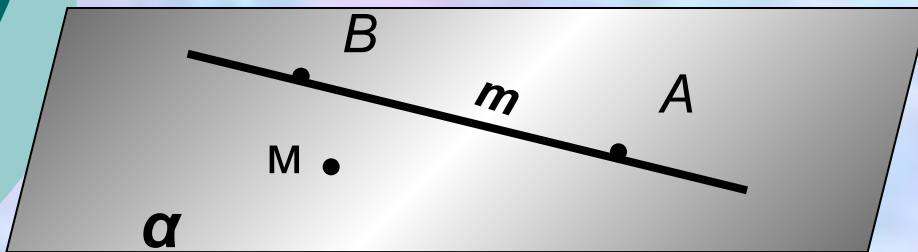


$$\alpha \cap \beta = m$$

# СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

T-1

Через любую прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.



Дано:  $M \notin m$

Доказательство

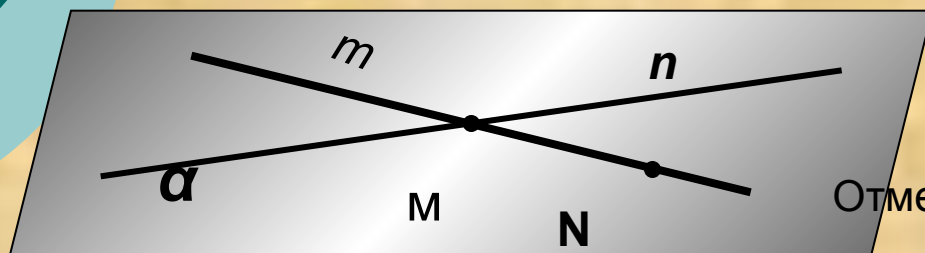
Пусть точки  $A, B \in m$ .

- Так как  $M \notin m$ , то точки  $A, B$  и  $M$  не принадлежат одной прямой. По А-1 через точки  $A, B$  и  $M$  проходит только одна плоскость — плоскость  $(ABM)$ , обозначим её  $\alpha$ . Прямая  $m$  имеет с ней две общие точки — точки  $A$  и  $B$ , следовательно, по аксиоме А-2 эта прямая лежит в плоскости  $\alpha$ . Таким образом, плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $m$  и точку  $M$  и является искомой.
- Докажем, что другой плоскости, проходящей через прямую  $m$  и точку  $M$ , не существует. Предположим, что есть другая плоскость —  $\beta$ , проходящая через прямую  $m$  и точку  $M$ . Тогда плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  проходят через точки  $A, B$  и  $M$ , не принадлежащие одной прямой, а значит, совпадают. Следовательно, плоскость  $\alpha$  единственна.
- Теорема доказана

# СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

T-2

Через любые две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.



Дано:  $m \cap n = M$

Доказательство

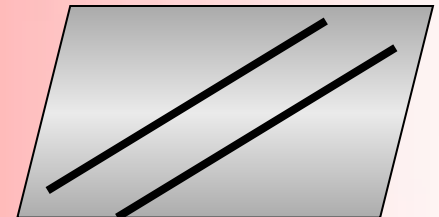
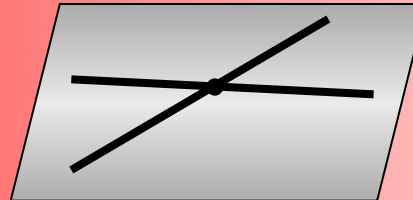
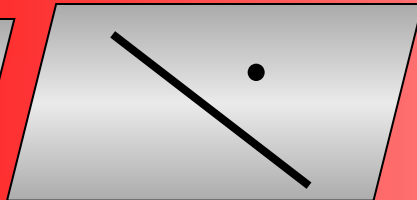
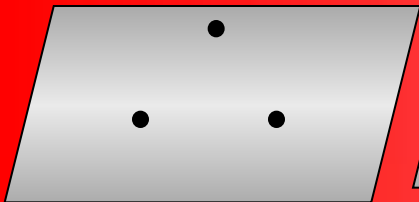
Отметим на прямой  $m$  произвольную точку  $N$ , отличную от  $M$ .

- Рассмотрим плоскость  $\alpha = (n, N)$ . Так как  $M \in \alpha$  и  $N \in \alpha$ , то по А-2  $m \subset \alpha$ . Значит обе прямые  $m, n$  лежат в плоскости  $\alpha$  и следовательно  $\alpha$ , является искомой
- Докажем единственность плоскости  $\alpha$ . Допустим, что есть другая, отличная от плоскости  $\alpha$  и проходящая через прямые  $m$  и  $n$ , плоскость  $\beta$ . Так как плоскость  $\beta$  проходит через прямую  $n$  и не принадлежащую ей точку  $N$ , то по Т-1 она совпадает с плоскостью  $\alpha$ . Единственность плоскости  $\alpha$  доказана.
- Теорема доказана

# ВЫВОД

Как в пространстве можно однозначно задать плоскость?

- По трем точкам, не лежащим на одной прямой
- По прямой и точке, не лежащей на этой прямой
- По двум пересекающимся прямым
- По двум параллельным прямым





# Определение объема тела

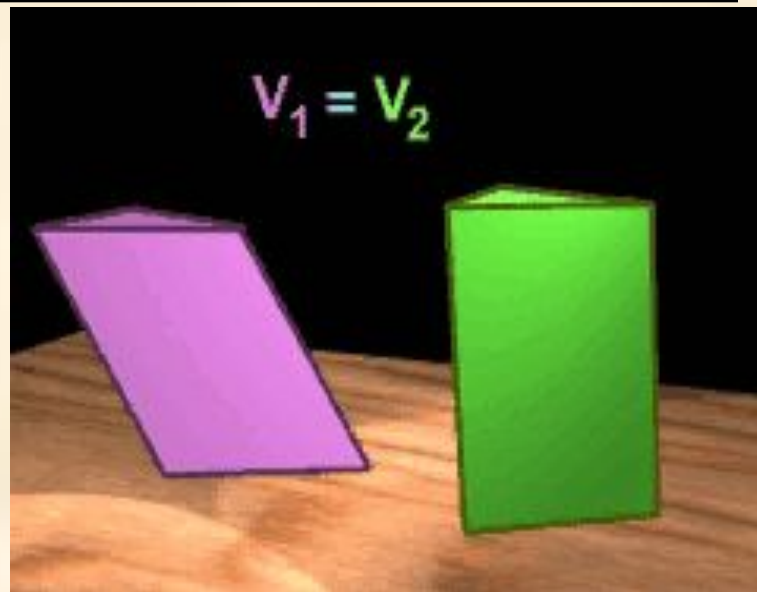
## Определение

- Тело называется простым, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.
- В частности, любой выпуклый многогранник является простым телом.

## Определение

Объемом тела называется положительная величина, характеризующая часть пространства, занимаемую телом, и обладающая следующими свойствами:

1. равные тела имеют равные объемы;
2. при параллельном переносе тела его объем не изменяется;



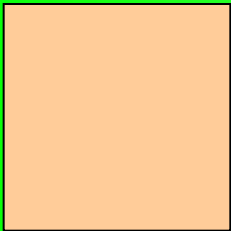
# Определение

---

**Тела с равными объемами называются равновеликими .**

***Из свойства 2 следует, что если тело с объемом  $V_1$  содержится внутри тела с объемом  $V_2$ , то  $V_1 < V_2$ .***

- за единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины;
- если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей;



# Теорема 1.

- Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений:  $V = abc$

# Теорема 2.

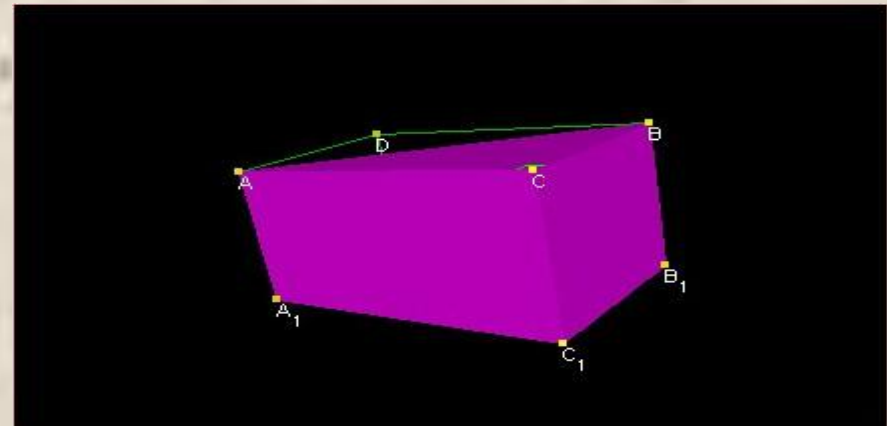
Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту:

$$V = SH .$$

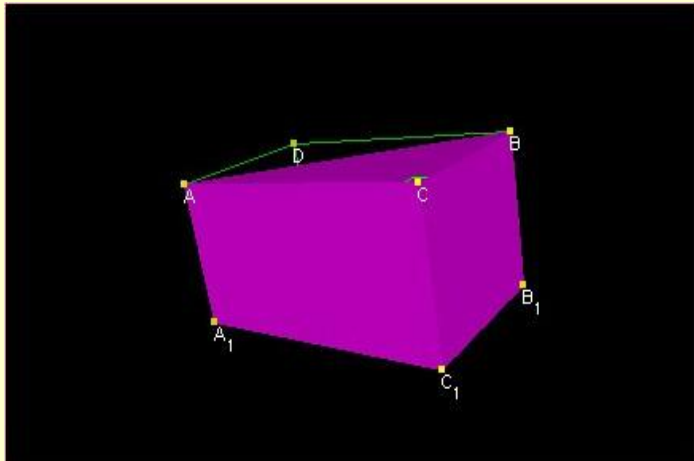
*Пусть  $ABCA_1B_1C_1$  – прямая треугольная призма, причем ее основание – прямоугольный треугольник  $ABC$*

*Дополним эту призму до прямоугольного параллелепипеда  $ACBDA_1C_1B_1D_1$ .*

*Середина  $O$  диагонали  $AB_1$  этого параллелепипеда является его центром симметрии.*



**Данная призма и призма  $ABDA_1B_1D_1$ , которая дополняет данную призму до параллелепипеда, симметричны относительно точки  $O$ , а поэтому равновелики.**



Пусть  $V$  и  $V_1$  – соответственно  
объемы призмы  $ABCA_1B_1C_1$   
и параллелепипеда,

тогда, учитывая теорему 1,  
получим

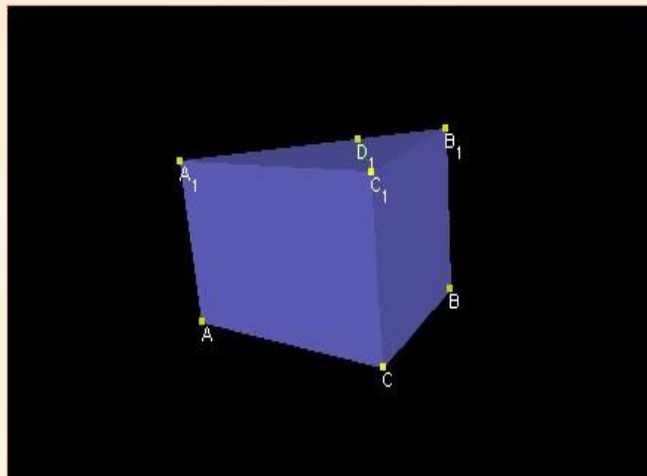
Рассмотрим произвольную прямую треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$   
Если  $\Delta ABC$  не прямоугольный, то его можно разбить на два  
прямоугольных треугольника  $ADC$  и  $BDC$ .

Следовательно,

$$V = V_1 + V_2 = S_{\Delta ADC} \cdot H + S_{\Delta BDC} \cdot H = \\ S_{\Delta ABC} \cdot H = S \cdot H.$$

Таким образом, теорема справедлива для произвольной прямой  
треугольной призмы. Если есть прямая  $n$ -угольная призма ( $n > 3$ ),  
разобьем ее на конечное число прямых треугольных призм

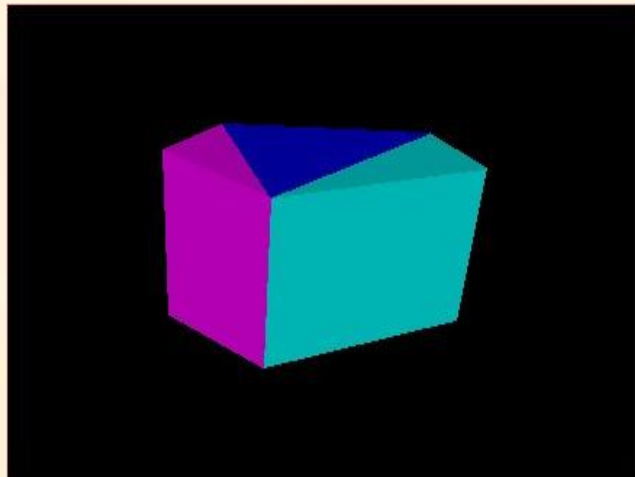
Сложив объемы этих треугольных призм, получим объем  $n$ -угольной  
призмы  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = (S_1 + S_2 + \dots + S_n) H = S \cdot$   
 $H$ , где  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – площади оснований треугольных призм,  
 $S$  и  $H$  – площадь основания и высота  $n$ -угольной призмы.



$$V = \frac{1}{2}V_1 = \frac{1}{2}AC \cdot BC = S_{ABC} \cdot CC_1 = S \cdot H$$

**Рассмотрим произвольную прямую треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$**

**Если  $\Delta ABC$  не прямоугольный, то его можно разбить на два прямоугольных треугольника  $ADC$  и  $BDC$ .**



**Следовательно,  $V = V_1 + V_2 = S_{\Delta ADC} \cdot H + S_{\Delta BDC} \cdot H = S_{\Delta ABC} \cdot H = S \cdot H$ .**

**Таким образом, теорема справедлива для произвольной прямой треугольной призмы. Если есть прямая  $n$ -угольная призма ( $n > 3$ ), разобьем ее на конечное число прямых треугольных призм**

**Сложив объемы этих треугольных призм, получим объем  $n$ -угольной призмы**

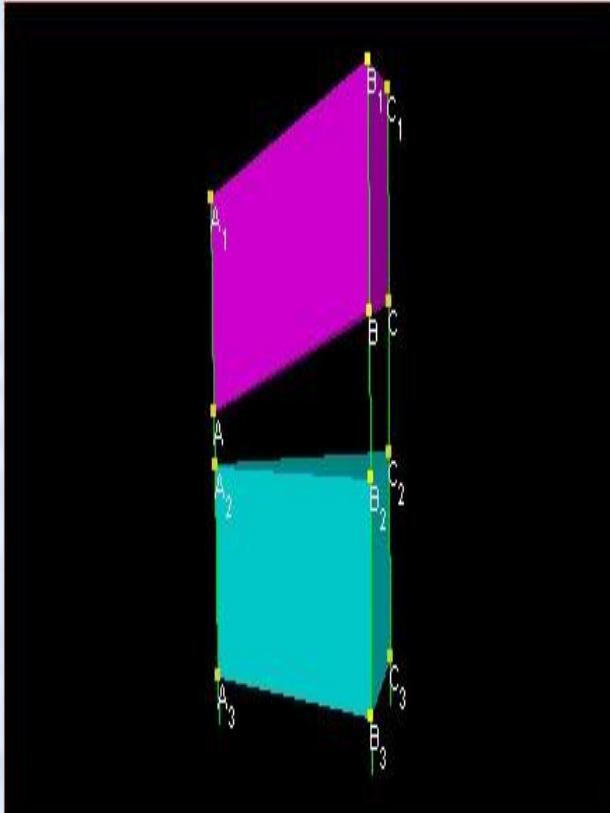
**$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = (S_1 + S_2 + \dots + S_n)H = S \cdot H$ , где  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – площади оснований треугольных призм,  $S$  и  $H$  – площадь основания и высота  $n$ -угольной призмы.**



## Теорема 3.

Объем наклонной призмы равен площади перпендикулярного сечения на боковое ребро:  $V = S_{\text{пс}}$

---



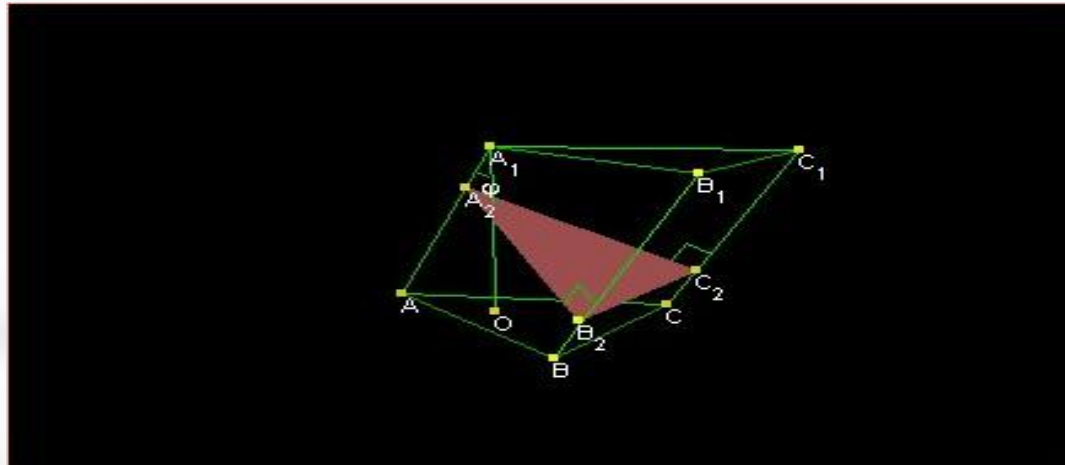
- Пусть  $ABCA_1B_1C_1$  – наклонная призма (чертеж 6.1.4),  $A_2B_2C_2$  и  $A_3B_3C_3$  – перпендикулярные сечения этой призмы.
- Призма  $A_2B_2C_2A_3B_3C_3$  прямая, причем  $A_2A_3 = A_1A_3$ . Заметим, что параллельный перенос на вектор переводит многогранник  $A_2B_2C_2A_1B_1C_1$  в многогранник  $A_3B_3C_3ABC$ .
- Следовательно, эти многогранники равновеликие. Пусть  $V$  – объем призмы  $ABCA_1B_1C_1$ ,  $V_1$  – объем призмы  $A_3B_3C_3A_2B_2C_2$ ,  $V_2$  – объем многогранника  $A_2B_2C_2ABC$ , тогда  $V + V_2 = V_1 + V_2$ , откуда  $V = V_1$ .
- Поскольку призма  $A_3B_3C_3A_2B_2C_2$  прямая, то  $V_1 = S_{\Delta A_3B_3C_3} \cdot A_2A_3 = S_{\text{пс}} \cdot l = V$ , что и требовалось доказать

## Теорема 4.

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту:  $V = S \cdot H$ .

---

- Пусть  $A_2 B_2 C_2$  – перпендикулярное сечение наклонной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$ ,  $A_1 O$  – высота этой призмы.
- Пусть  $\varphi$ . Поскольку  $A_2 B_2 C_2 \perp A_1 A$ , то плоскости  $A_2 B_2 C_2$  и  $ABC$  образуют тот же угол  $\varphi$ , что и прямые  $A_1 A$  и  $A_1 O$ .
- По теореме о площади ортогональной проекции  $S_{A_2 B_2 C_2} = S_{ABC} \cos \varphi$ . Согласно теореме 3
- $V = S_{A_2 B_2 C_2} \cdot A_1 A = S_{ABC} \cos \varphi \cdot A_1 A = S_{ABC} \cdot A_1 O = S \cdot H$ .



# Объёмы тел и их изображение в пространстве

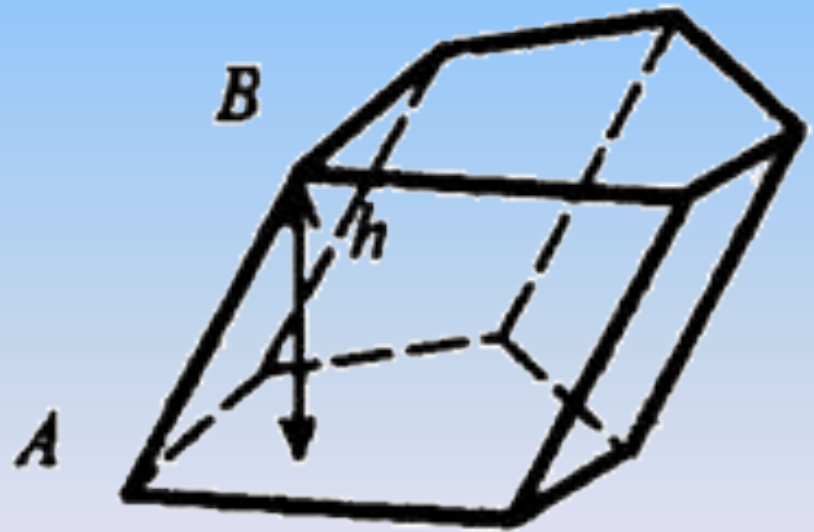
**Многогранник — тело, ограниченное плоскостями.**

**Призма — многогранник, основания которого равные многоугольники, боковые грани — параллелограммы.**

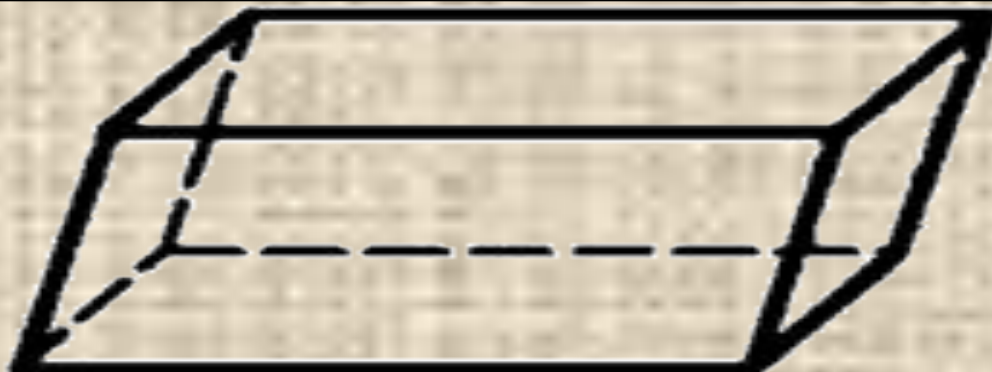
**AB — ребро;  
h — высота**

Объём:  $V = Sh$

S — площадь основания



- Параллелепипед — призма, у которой основания параллелограммы.
- Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке



Прямоугольный параллелепипед — у которого основания прямоугольники, а рёбра перпендикулярны основанию.

Рёбра:

$a$  — длина,  $b$  — ширина,  $c$  — высота;  $d$  — диагональ  
(все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны)

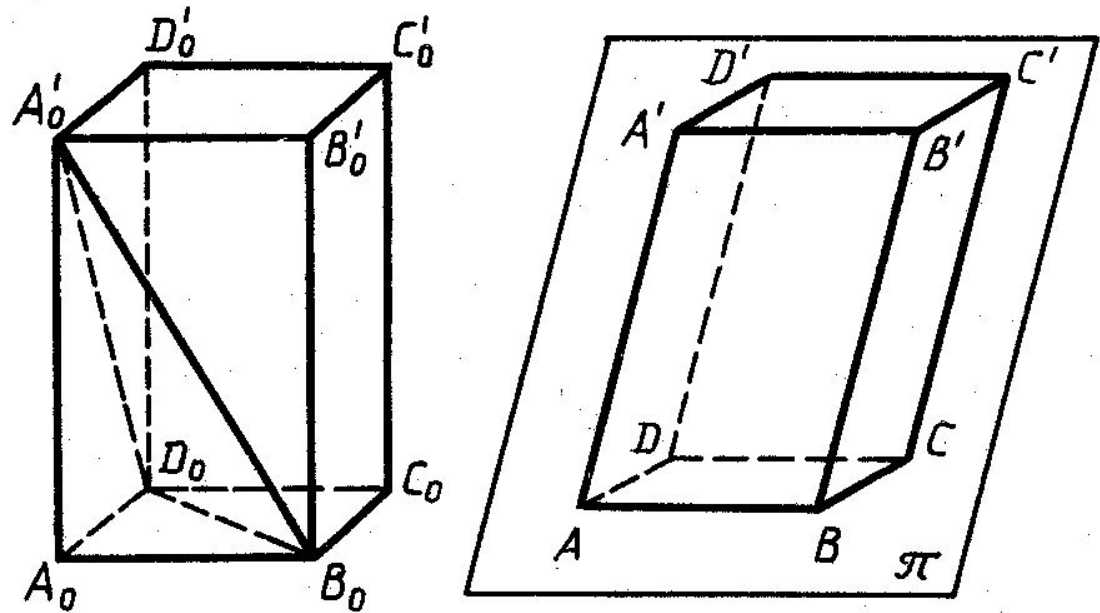
Объём:  $V = a \cdot b \cdot c$

Полная поверхность:  $S = 2(ab + bc + ca)$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Для построения изображения произвольного параллелепипеда  $A_0B_0C_0D_0A'_0B'_0C'_0D'_0$  заметим, что точки  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $D_0$  и  $A'_0$  являются вершинами тетраэдра  $A_0B_0D_0A'_0$ .

Поэтому в качестве их изображения можно взять вершины произвольного четырёхугольника  $ABDA'$ .

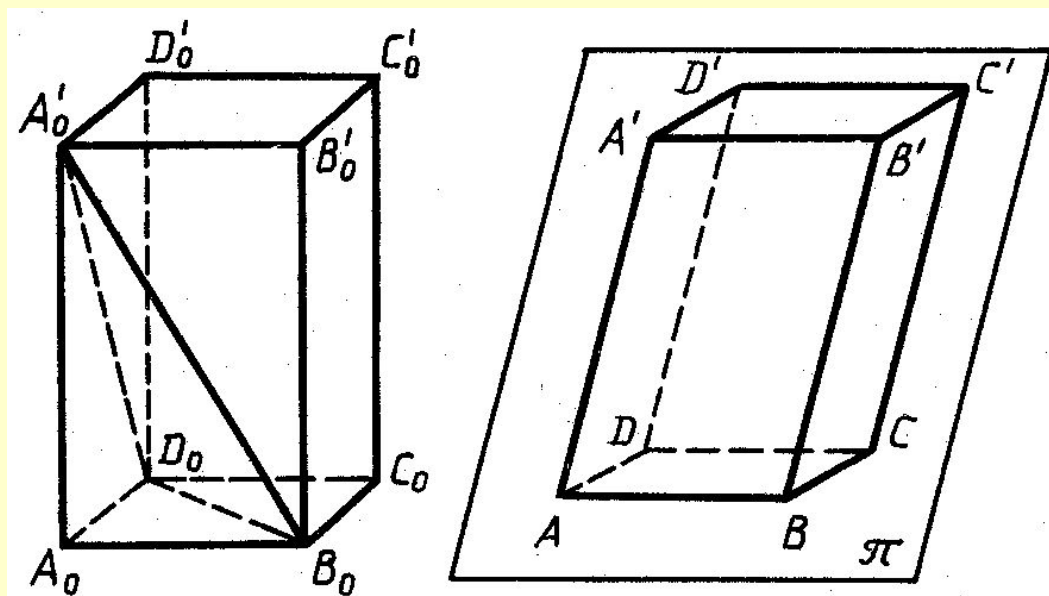


Другими словами, любые три отрезка  $AB$ ,  $CD$  и  $AA'$  плоскости изображения с общим концом  $A$ , ни какие два из которых не лежат на одной прямой, можно считать изображением рёбер  $A_0B_0$ ,  $A_0D_0$  и  $A_0A'_0$  параллелепипеда.



*Таким образом параллелепипед  $ABCD A'B'C'D'$  является изображением параллелепипеда  $A_0B_0C_0D_0 A'_0B'_0C'_0D'_0$ .*

---



Но тогда изображения остальных рёбер строятся однозначно, так как все грани параллелепипеда являются параллелограммами, и, следовательно, их изображения также будут параллелограммами.

**Куб — прямоугольный параллелепипед, все грани которого квадраты.  $a=b=c$**

---

**Число граней — 6,  
форма граней — квадраты,  
число ребер — 12, число вершин — 8.**



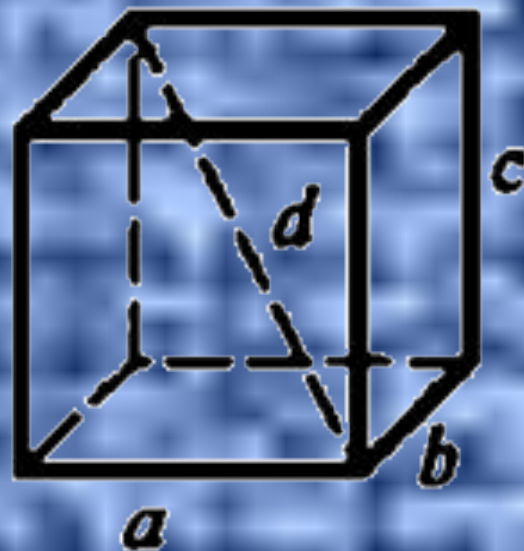
$$V = a^3$$

(отсюда и название третьей степени — «куб»),

$d$  — диагональ

$$S = 6a^2$$

$$d^2 = 3a^2$$

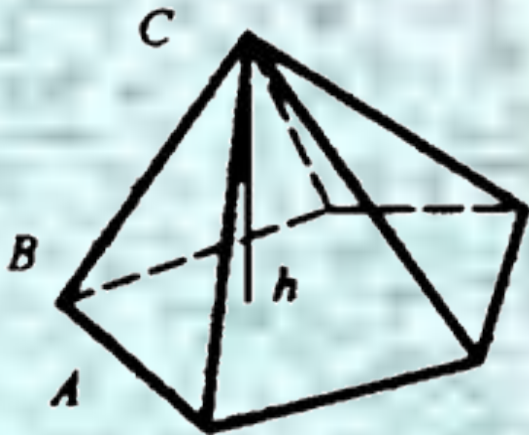
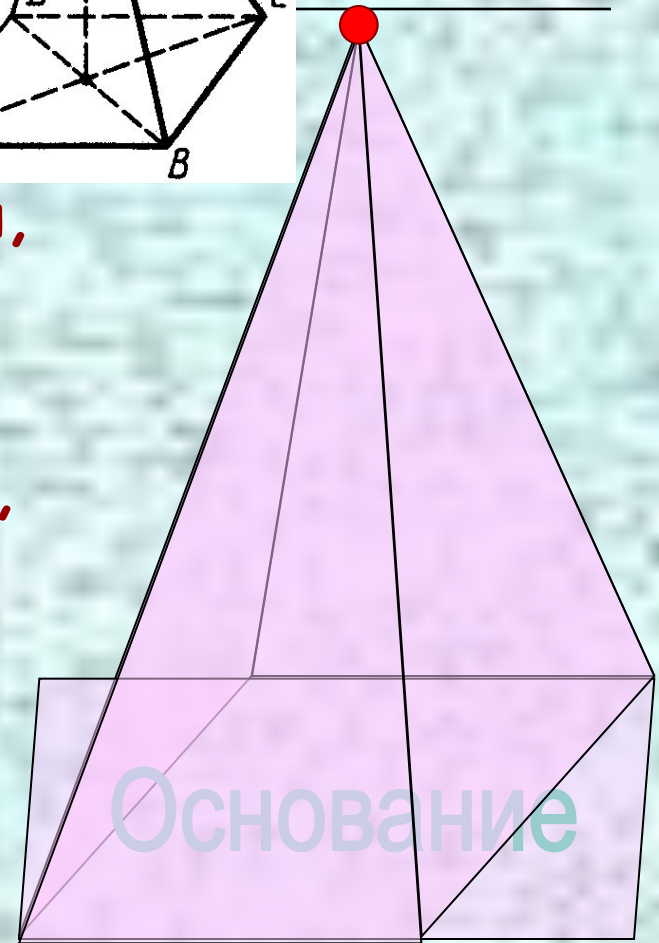
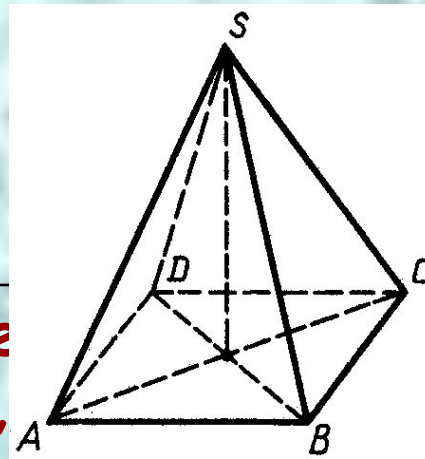


# Пирамида -

многогранник, основание которого многоугольник,

а остальные грани - треугольники, имеющие общую вершину.

По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т.д.



$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

# Тетраэдр -

это один из пяти типов правильных многогранников;

правильная треугольная пирамида;

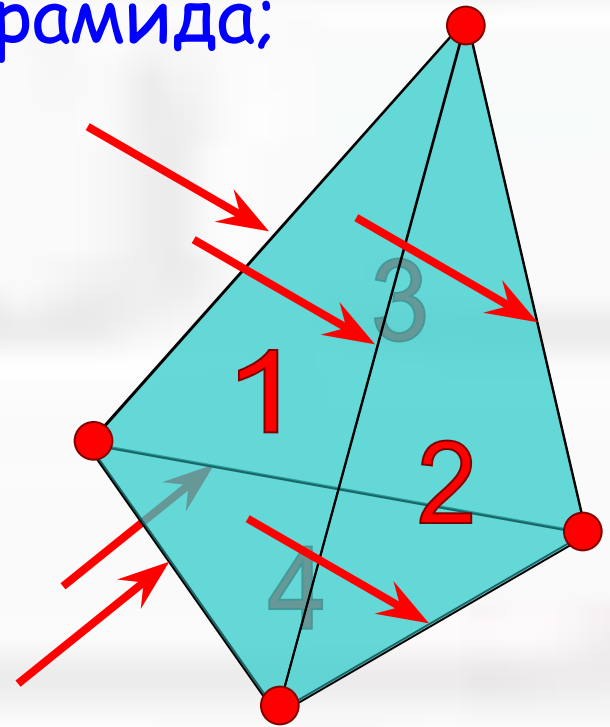
форма граней – треугольники,

Число граней – 4,

число ребер – 6,

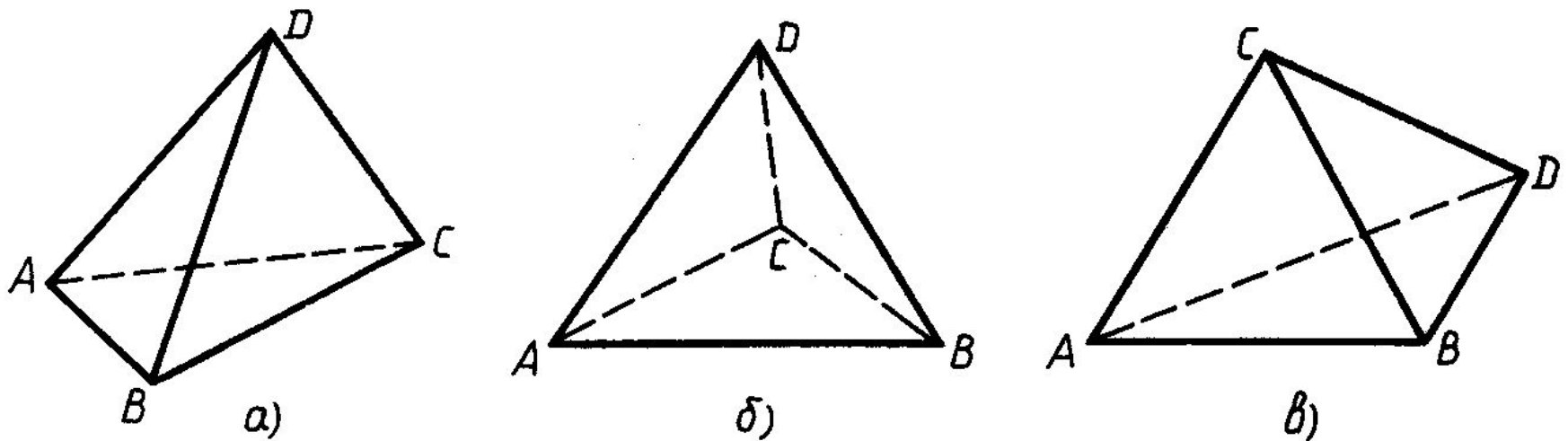
число вершин – 4.

- Под изображением многогранника следует понимать фигуру, состоящую из проекций всех его рёбер.



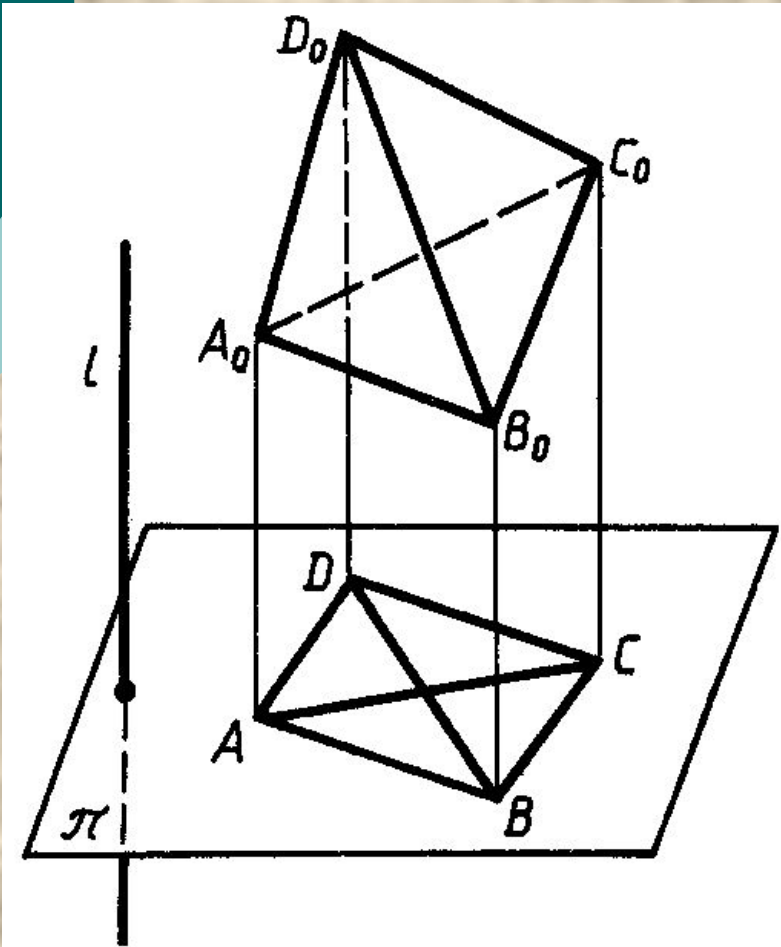


Фигура, состоящая из сторон и диагоналей любого (выпуклого или невыпуклого) четырёхугольника, является изображением тетраэдра при соответствующем выборе плоскости изображений и направления проектирования.



На этих рисунках невидимые рёбра изображены штриховыми линиями.

**Пусть  $A_0B_0C_0D_0$  – произвольный тетраэдр,  
 $A, B, C$  и  $D$  – параллельные проекции  
его вершин на плоскость изображений ( $\pi$ ).**

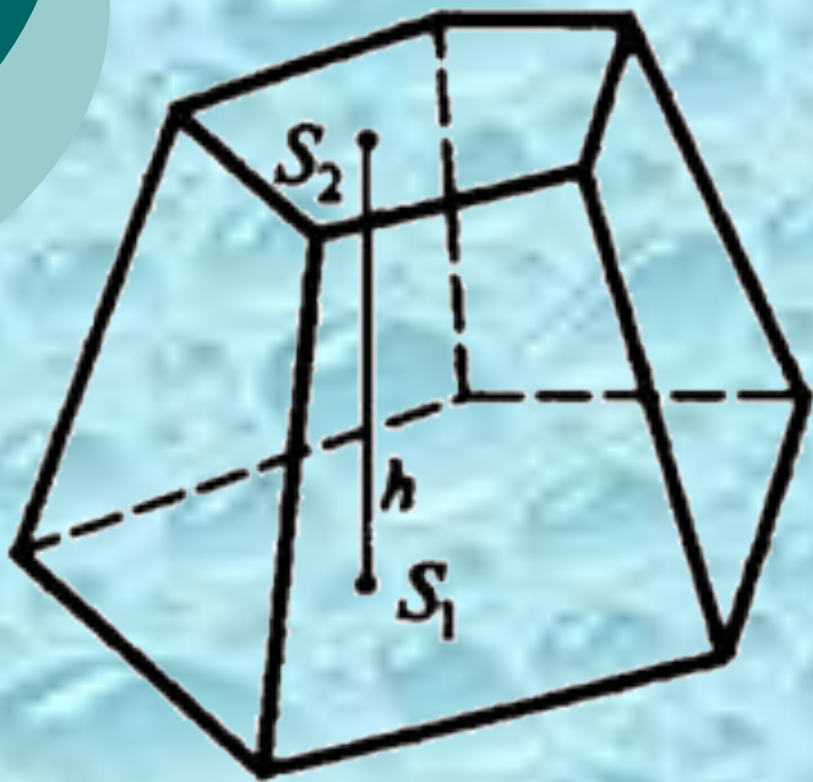


*Отрезки  $AB, BC, CA, AD, BD, CD$  служат сторонами и диагоналями четырёхугольника  $ABCD$ .  
Фигура, образованная из этих отрезков (или любая другая фигура, подобная ей), является изображением тетраэдра  $A_0B_0C_0D_0$ .*



Усеченная пирамида – плоскость сечения которой параллельна плоскости основания.

---



$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$$

# ВИДЫ МНОГОГРАННИКОВ

## Октаэдр

- Число граней – 8,  
форма граней – треугольники,  
число ребер – 12,  
число вершин – 6.

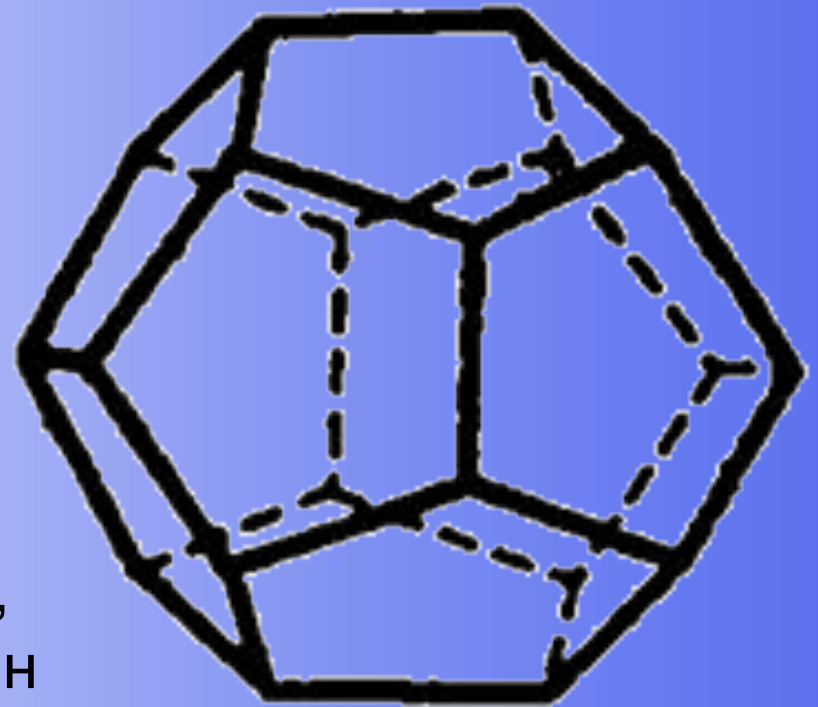


# ВИДЫ МНОГОГРАННИКОВ

---

## Додекаэдр

- Число граней – 12,  
форма граней – пятиугольники,  
число ребер – 30, число вершин  
– 20.



# ВИДЫ МНОГОГРАННИКОВ

---

## Икосаэдр

Число граней – 20,  
форма граней – треугольники,  
число ребер – 30,  
число вершин – 12.



# ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ



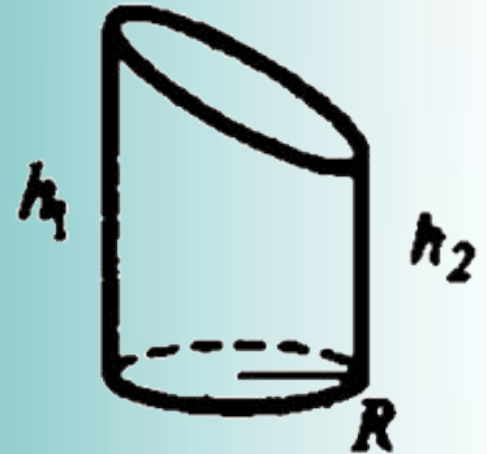
$h$

## Цилиндры.

- Круглый прямой.
- Круглый усеченный

$S$  – площадь боковой поверхности.

$V$  – объем.



$$S = 2\pi \cdot R \cdot h$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$$

$$S = \pi \cdot R \cdot (h_1 + h_2)$$

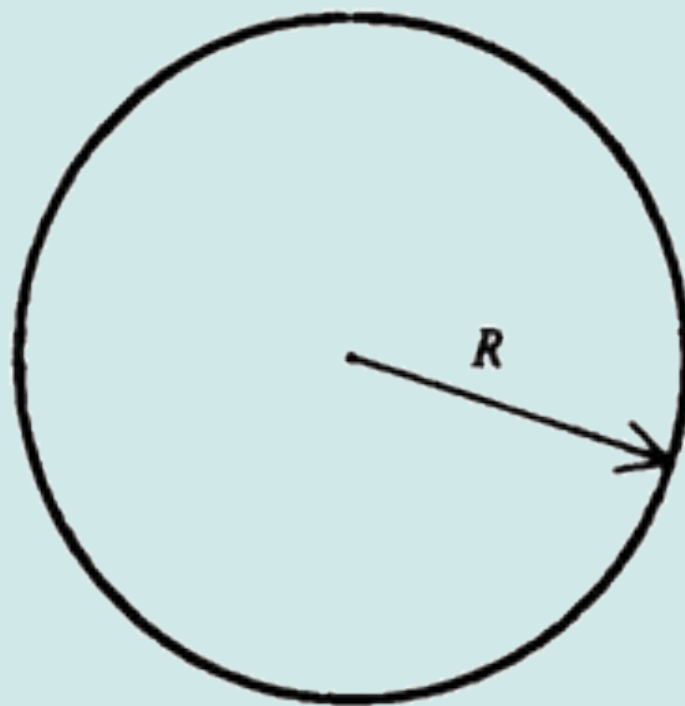
$$V = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{(h_1 + h_2)}{2}$$

# ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Сфера – поверхность шара

$$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$$





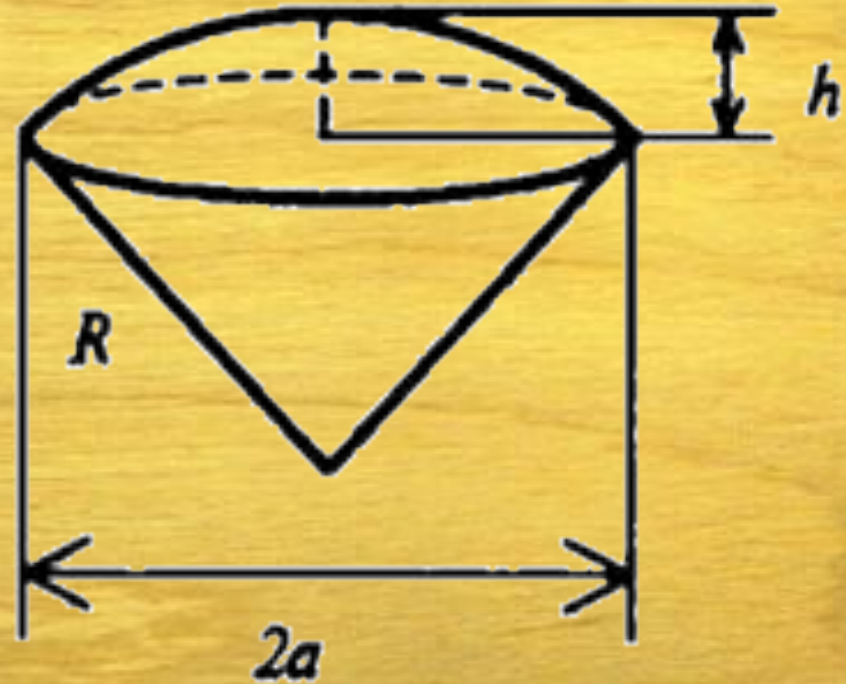
# ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

## Шаровой сектор.

$R$  — радиус шара;  
 $a$  — радиус окружности сечения;  
 $h$  — высота отсекаемой шляпки

$$S = \pi \cdot R^2 (2h + a)$$

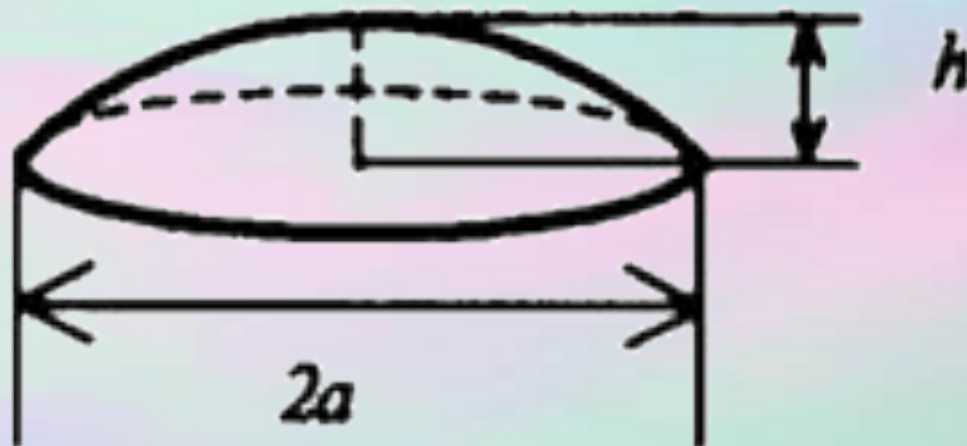
$$V = \frac{2}{3} \pi \cdot R^3 h$$



# ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

## Шаровой сегмент

$R$  — радиус шара;  
 $a$  — радиус  
окружности  
сечения;  
 $h$  — высота  
отсекаемой шляпки



# ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

## Шаровой слой

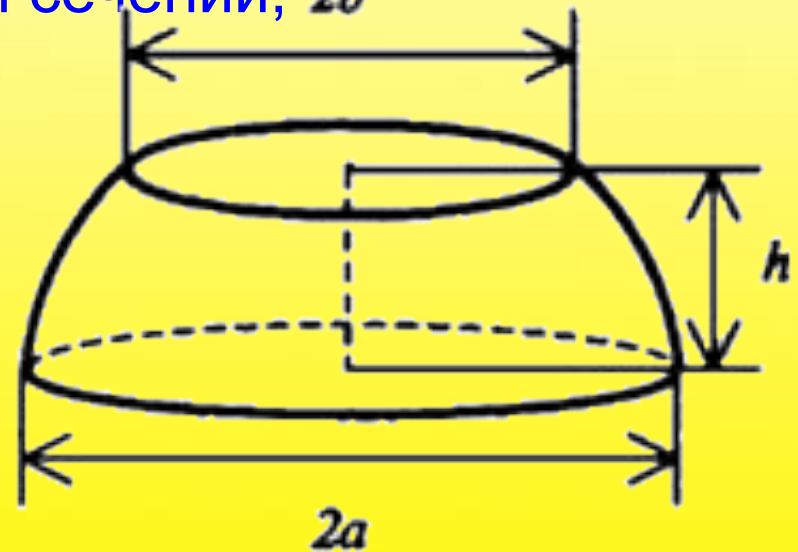
$R$  — радиус шара,

$a$ ,  $b$  — радиусы окружностей сечений,  $2b$

$h$  — высота слоя

$$S = \pi(2Rh + a^2 + b^2)$$

$$V = \frac{1}{6} \pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$$



## При решении стереометрических задач высоки

требования к качеству чертежа, его  
наглядности.

---

**Нельзя научиться решать сколько-нибудь содержательные стереометрические задачи, не освоив принципы и технику построения пространственного чертежа.**

- Сюда входит: выбор оптимального положения изображаемого тела (в частности, выбор ориентации - верх и низ, право и лево),
- выбор ракурса и проекции, умение минимизировать количество изображенных линий (напомним, что видимые и невидимые линии должны изображаться различным образом),
- умение строить сечения и проекции на плоскость, умение выделить на пространственном чертеже
- и соответственно изобразить плоскую конфигурацию, дающую ключ к решению задачи, умение перевести условие задачи на графический язык.



