

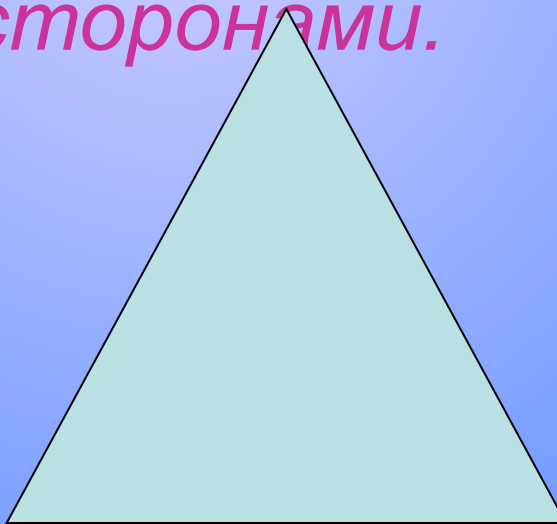
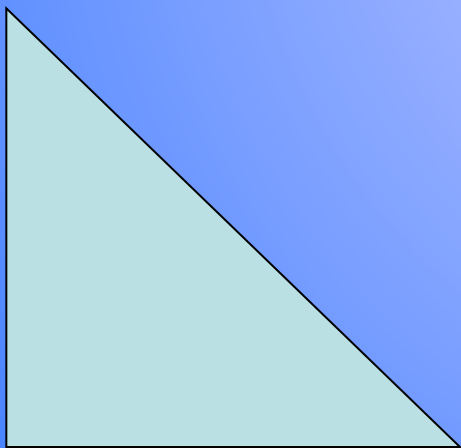
Треугольник

Работа ученицы 9Б класса
Медведевой Ларисы.
Руководитель: Малышева Р.
Н.

Треугольники

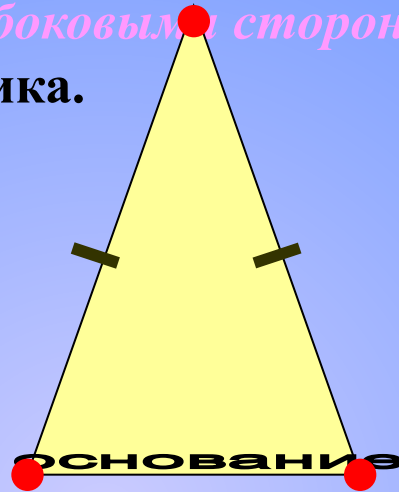


Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки -- его *сторонами*.

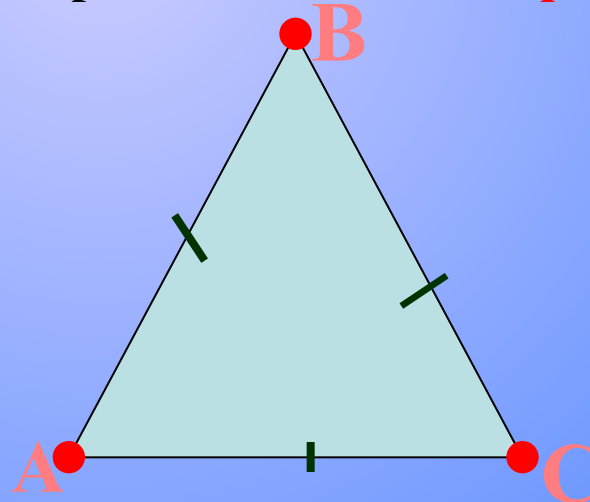


Виды треугольников

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием* треугольника.

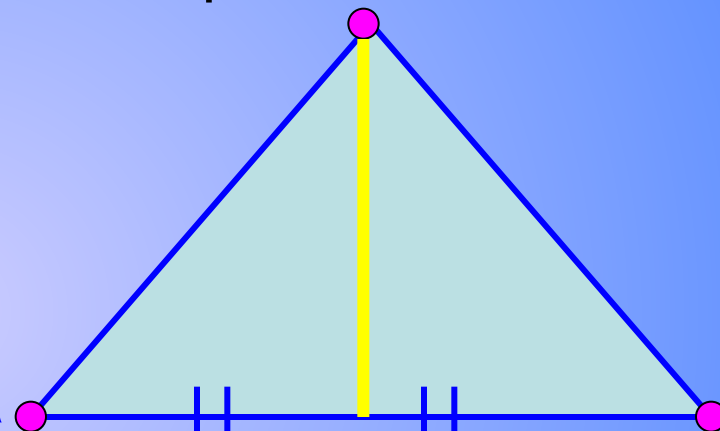


Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним* или *правильным*.



Медиана

- **Медиана** треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны этого треугольника.

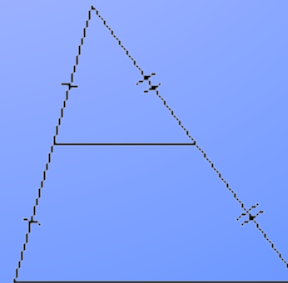
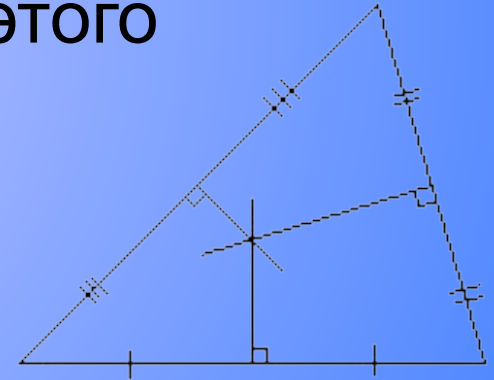
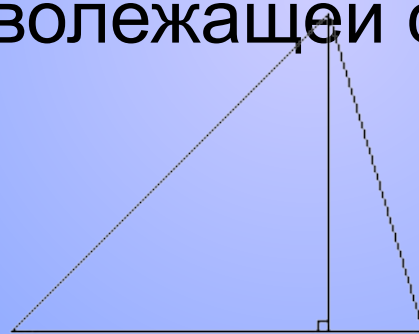
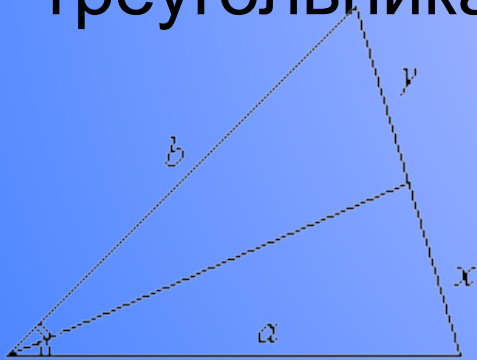


Свойства медиан треугольника

1. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.
2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется **центром тяжести** треугольника.
3. Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

Биссектриса

Биссектриса угла — это луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит данный угол пополам. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположащей стороне этого треугольника.

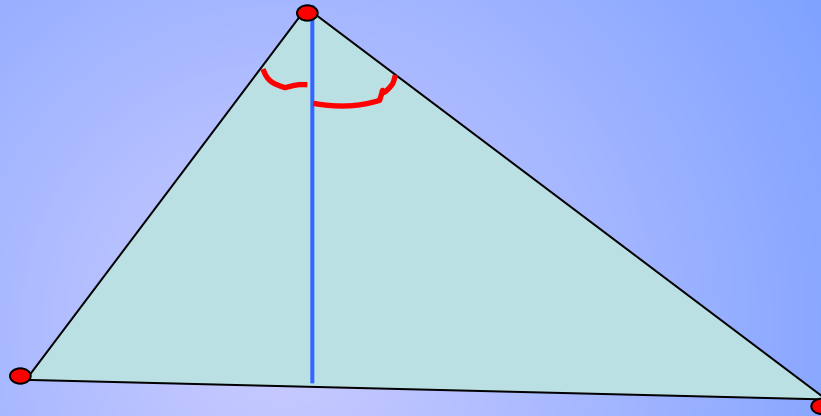


Свойства биссектрис треугольника

- Биссектриса угла — это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.
- Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:
 -
- Точка пересечения биссектрис треугольника является центром окружности, вписанной в этот треугольник.

Высота

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника.



Свойства высот треугольника

- В прямоугольном треугольнике В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.
- В остроугольном треугольнике В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные

Срединный перпендикуляр

- Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют *срединным перпендикуляром* к отрезку.

Свойства срединных перпендикуляров треугольника

- Каждая точка срединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на срединном перпендикуляре к нему.
- Точка пересечения срединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром описанной около этого треугольника.

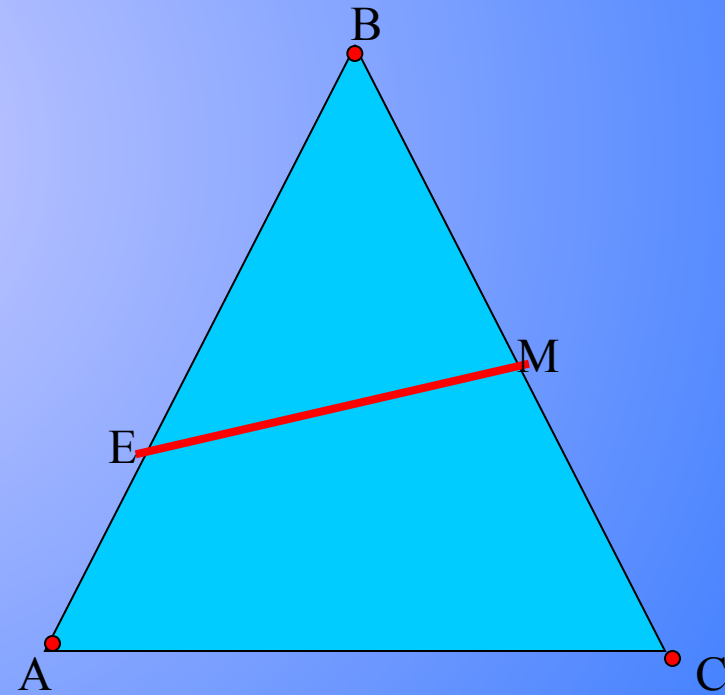
Средняя линия

Средней линией

треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Свойство средней линии треугольника

- Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



Признаки равенства треугольников

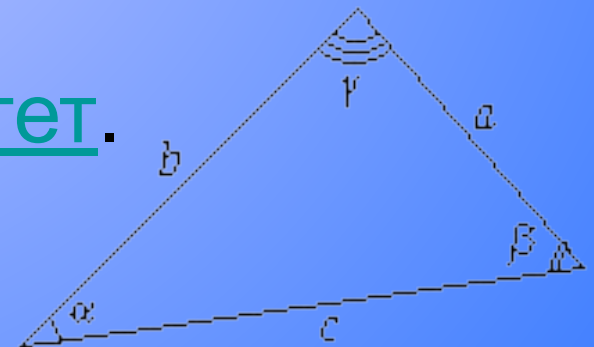
Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

- две стороны и угол между ними;
- два угла и прилежащая к ним сторона;
- три стороны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

Два прямоугольных треугольника равны, если у них соответственно равны:

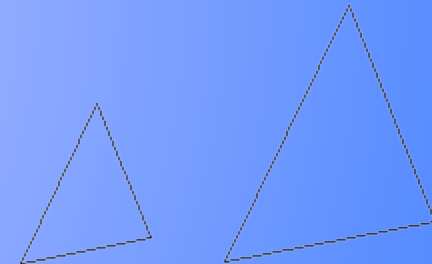
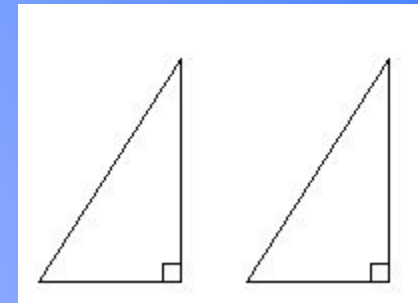
- гипотенуза и острый угол;
- катет и противолежащий угол;
- катет и прилежащий угол;
- два катета;
- гипотенуза гипотенуза и катет.



Подобие треугольников

Два треугольника *подобны*, если выполняется одно из следующих условий, называемых *признаками подобия*:

- два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;
- две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны;
- три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника.
- В подобных треугольниках соответствующие линии (высоты в подобных треугольниках соответствующие линии (высоты, медианы в подобных треугольниках соответствующие линии (высоты, медианы, биссектрисы и т. п.) пропорциональны.



Теорема синусов

- Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, причем коэффициент пропорциональности равен диаметру описанной окружности $2R$.

Теорема косинусов

- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

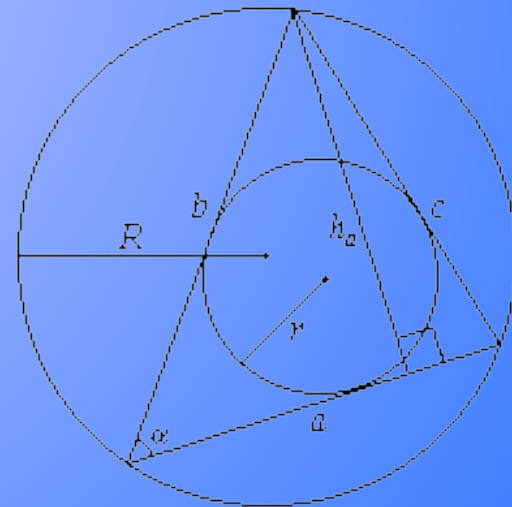
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

Произвольный треугольник

- a, b, c — стороны; α — угол между сторонами a и b ; p — полупериметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a . $S = \frac{1}{2} a h_a$

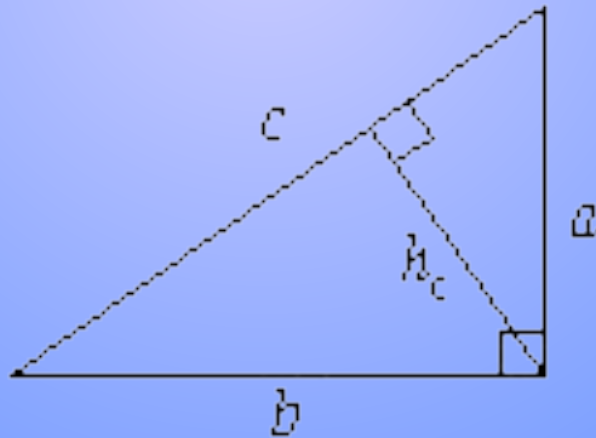
$$S = ab \sin \alpha$$

$$S = pr$$



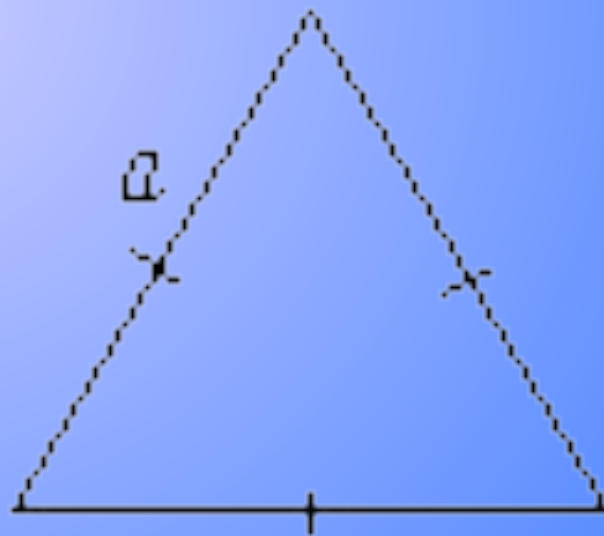
Прямоугольный треугольник

- a, b — катеты; c — гипотенуза; h_c — высота, проведенная к стороне c .
- $S = ab$
- $S = ch_c$



1. Равносторонний треугольник

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$



Теорема 4.3.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

- Доказательство
- Пусть $\triangle ABC$ – равнобедренный с основанием AB . Рассмотрим $\triangle BAC$. По первому признаку эти треугольники равны. Действительно, $AC = BC$; $BC = AC$; $C = C$. Отсюда следует $A = B$ как соответствующие углы равных треугольников. Теорема доказана.

Теорема 4.3. Свойство медианы равнобедренного треугольника.

В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

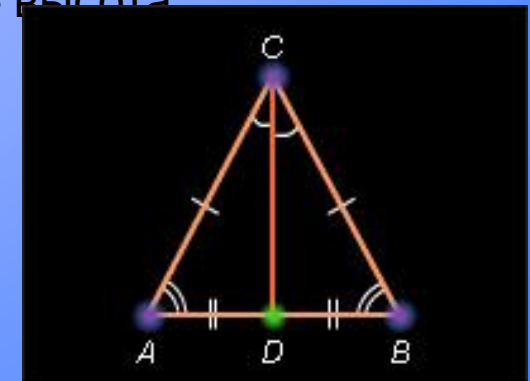
Рисунок 4.3.1.

Доказательство

Пусть $\triangle ABC$ – равнобедренный с основанием AB , и CD – медиана, проведенная к основанию. В треугольниках CAD и CBD углы CAD и CBD равны, как углы при основании равнобедренного треугольника (по теореме 4.3), стороны AC и BC равны по определению равнобедренного треугольника, стороны AD и BD равны, потому что D – середина отрезка AB . Отсюда получаем, что $\triangle ACD = \triangle BCD$.

Из равенства треугольников следует равенство соответствующих углов: $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Из первого равенства следует, что CD – биссектриса. Углы $\angle ADC$ и $\angle BDC$ смежные, и в силу второго равенства они прямые, поэтому CD – высота треугольника. Теорема доказана.

Признаки равнобедренного треугольника.



Теорема 4.5.

Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Доказательство

Пусть $\triangle ABC$ – треугольник, в котором $\angle A = \angle B$.
 $\triangle ABC$ равен $\triangle BAC$ по второму признаку равенства треугольников. Действительно:
 $\angle A = \angle B$; $\angle B = \angle A$; $\angle C = \angle C$. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих его сторон: $AC = BC$.
Тогда, по определению, $\triangle ABC$ – равнобедренный. Теорема доказана.