Треугольник

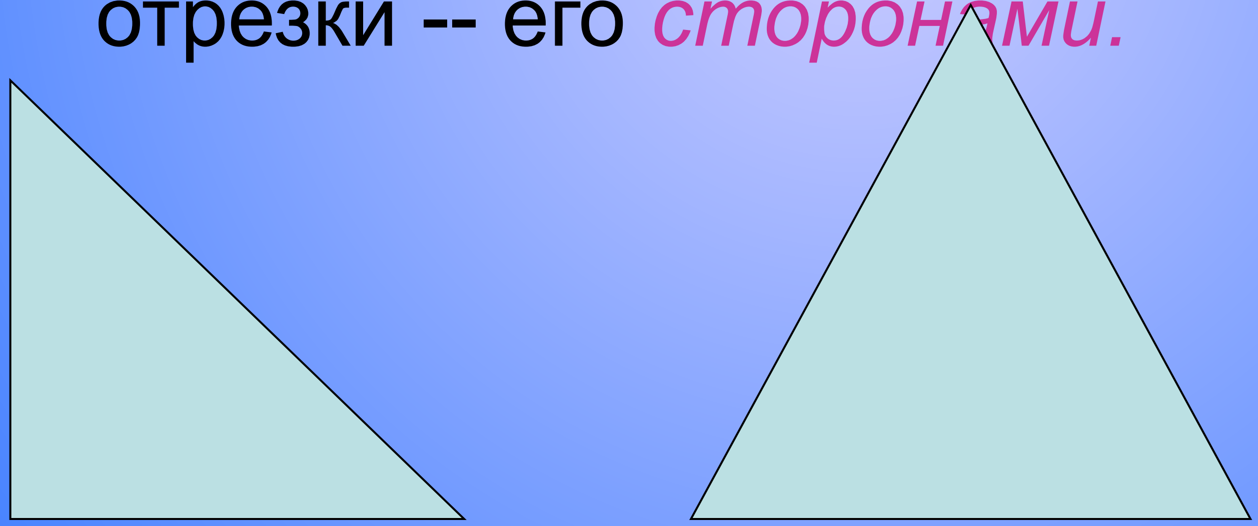
Работа ученицы 9Б класса

Медведевой Ларисы.

Руководитель: Малышева Р. Н.

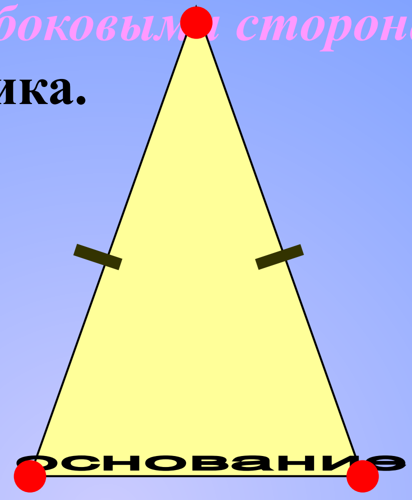
Треугольники

Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки -- его *сторонами.*

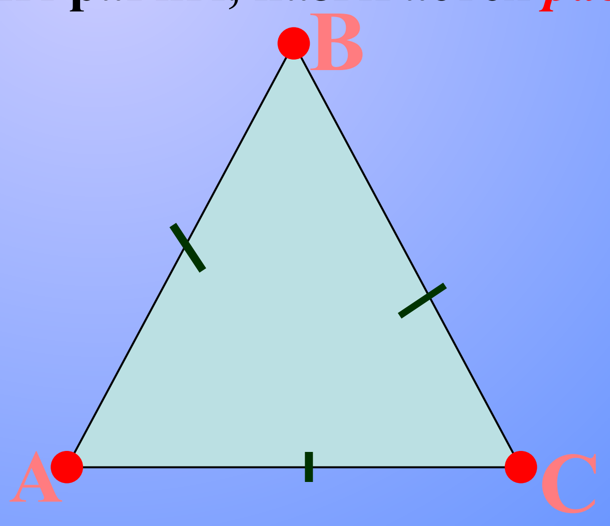


Виды треугольников

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием* треугольника.

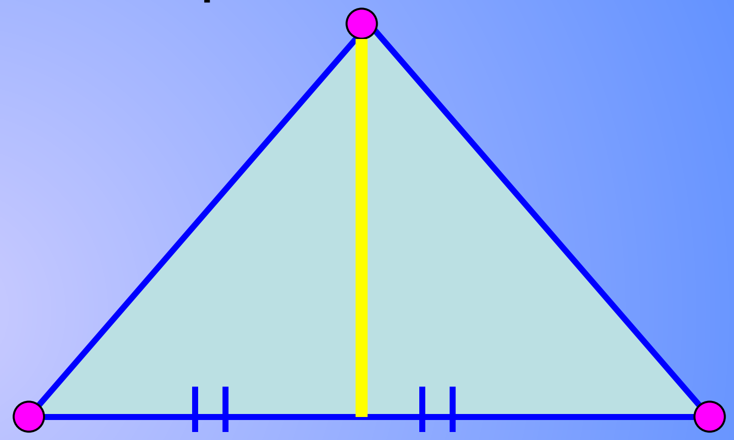


Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним* или *правильным.*



Медиана

- ***Медиана*** треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны этого треугольника.

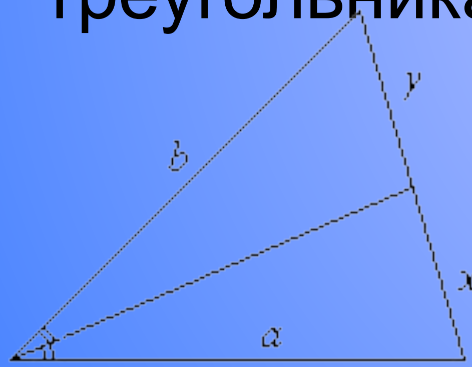


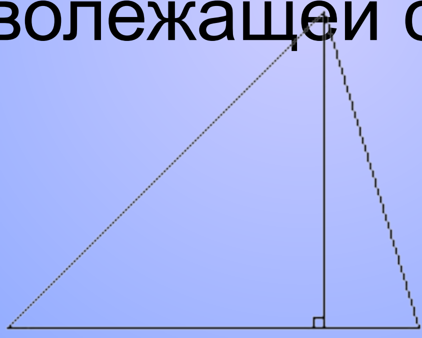
Свойства медиан треугольника

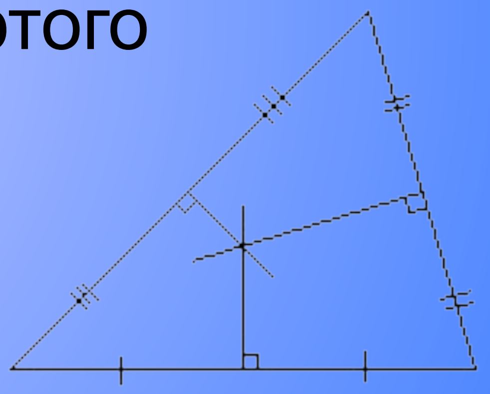
1. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.
2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется *центром тяжести* треугольника.
3. Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

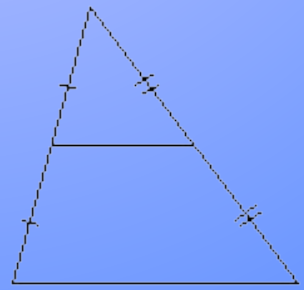
Биссектриса

Биссектриса угла — это луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит данный угол пополам. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне этого треугольника.







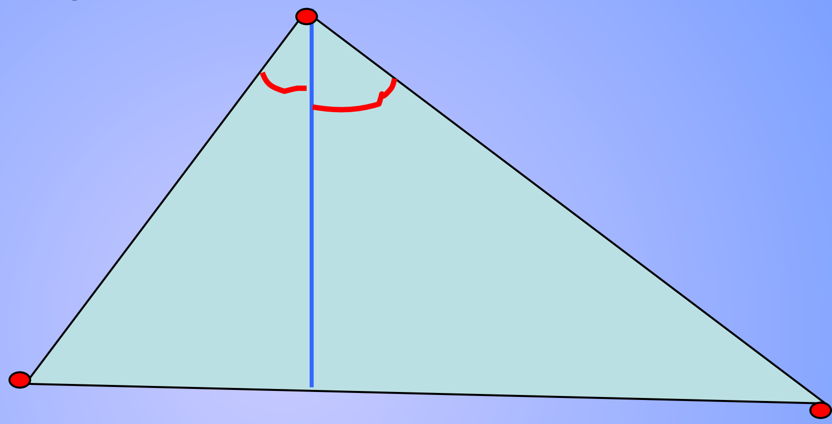


Свойства биссектрис треугольника

- Биссектриса угла — это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.
- Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилегажащим сторонам: .
- Точка пересечения биссектрис треугольника является центром окружности, вписанной в этот треугольник.

Высота

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника.



Свойства высот треугольника

- В прямоугольном треугольникеВ прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.
- В остроугольном треугольникеВ остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные

Срединный перпендикуляр

- Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют *серединным перпендикуляром* к отрезку*.*

Свойства серединных перпендикуляров треугольника

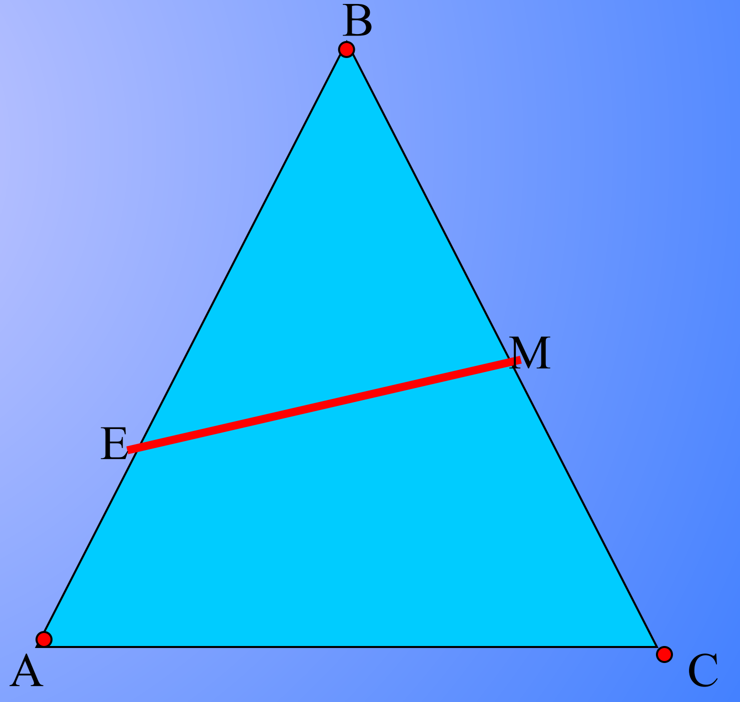
- Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.
- Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром окружности, описанной около этого треугольника.

Средняя линия

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Свойство средней линии треугольника

- Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



Признаки равенства треугольников

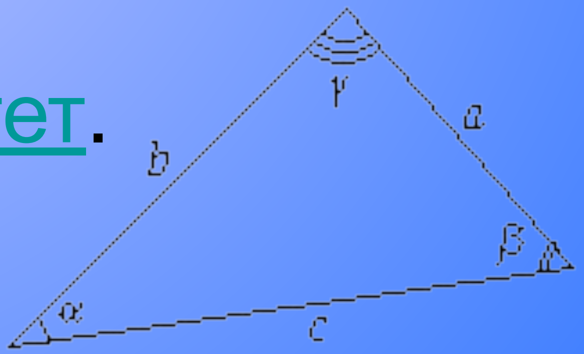
Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

- две стороны и угол между ними;
- два угла и прилежащая к ним сторона;
- три стороны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

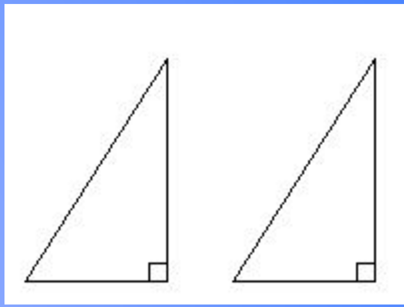
Два прямоугольных треугольника равны, если у них соответственно равны:

- гипотенуза и острый угол;
- катет и противолежащий угол;
- катет и прилежащий угол;
- два катета;
- гипотенузагипотенуза и катет.

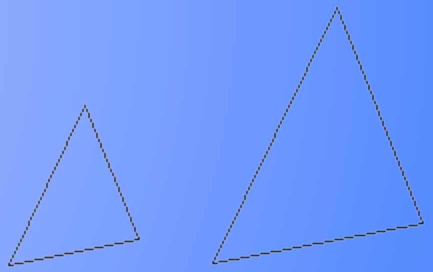


Подобие треугольников

Два треугольника *подобны,* если выполняется одно из следующих условий, называемых *признаками подобия:*



- два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;
- две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны;
- три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника.
- В подобных треугольниках соответствующие линии (высотыВ подобных треугольниках соответствующие линии (высоты, медианыВ подобных треугольниках соответствующие линии (высоты, медианы, биссектрисы и т. п.) пропорциональны.



Теорема синусов

- Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, причем коэффициент пропорциональности равен диаметруСтороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, причем коэффициент пропорциональности равен диаметру описанной около треугольника окружности:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Теорема косинусов

- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

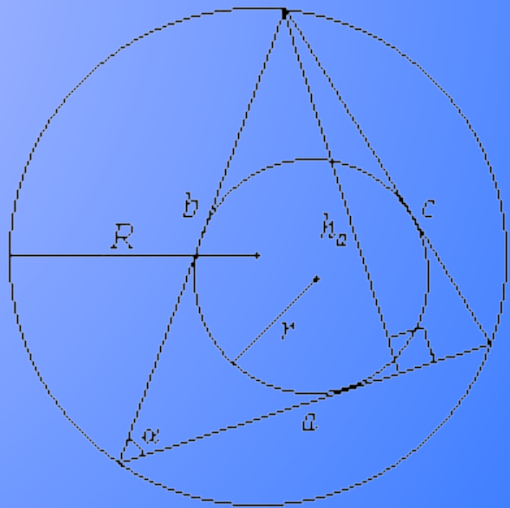
$$a2 = b2 + c2 - 2bc \cos (bc)$$

Произвольный треугольник

- *a, b, c* — стороны; — угол между сторонами *a* и *b*;— полупериметр; *R* — радиус описанной окружности; *r* — радиус вписанной окружности; *S* — площадь; *ha* — высота, проведенная к стороне *a*. *S* = *aha*

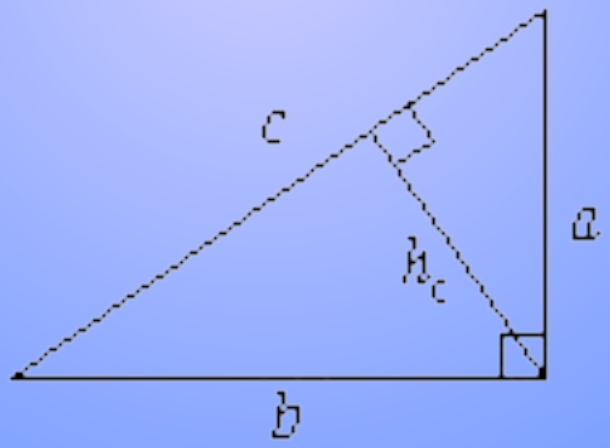
$$S = ab \sin \alpha$$

$$S = pr$$



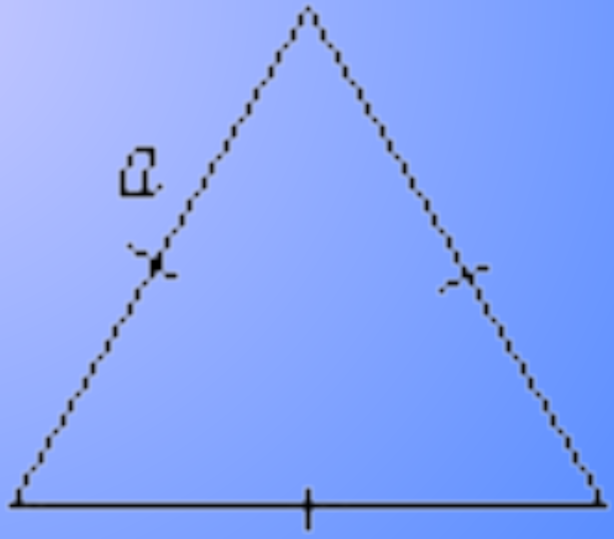
Прямоугольный треугольник

- *a*, *b* — катеты; *c* — гипотенуза; *hc* — высота, проведенная к стороне *c*.
- *S* = *ab*
- *S* = *chc*



1. **Равносторонний треугольник**

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Теорема 4.3.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

- Доказательство
- Пусть Δ ABC – равнобедренный с основанием AB . Рассмотрим Δ BAC . По первому признаку эти треугольники равны. Действительно, AC = BC ; BC = AC ; C = C . Отсюда следует A = B как соответствующие углы равных треугольников. Теорема доказана.

Теорема 4.4. Свойство медианы равнобедренного треугольника.

В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

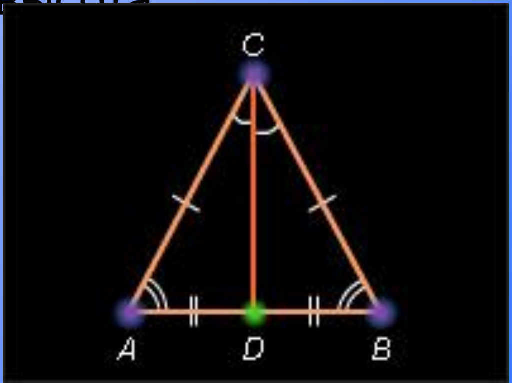
Рисунок 4.3.1.

Доказательство

Пусть ∆ ABC – равнобедренный с основанием AB , и CD – медиана, проведенная к основанию. В треугольниках CAD и CBD углы CAD и CBD равны, как углы при основании равнобедренного треугольника (по теореме 4.3), стороны AC и BC равны по определению равнобедренного треугольника, стороны AD и BD равны, потому что D – середина отрезка AB . Отсюда получаем, что ∆ ACD = ∆ BCD .

Из равенства треугольников следует равенство соответствующих углов: ACD = BCD , ADC = BDC . Из первого равенства следует, что CD – биссектриса. Углы ADC и BDC смежные, и в силу второго равенства они прямые, поэтому CD – высота треугольника. Теорема доказана.

Признаки равнобедренного треугольника.



Теорема 4.5.

Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Доказательство

Пусть Δ ABC – треугольник, в котором A = B . Δ ABC равен Δ BAC по второму признаку равенства треугольников. Действительно: AB = BA ; B = A ; A = B . Из равенства треугольников следует равенство соответствующих его сторон: AC = BC . Тогда, по определению, Δ ABC – равнобедренный. Теорема доказана.