

## Вершины, ребра и грани

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой  $V$  – число вершин,  $P$  – число ребер,  $\Gamma$  – число граней многогранника.

Название многогранника	$V$	$P$	$\Gamma$
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
$n$ -угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$
$n$ -угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$

# ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

Из приведенной таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство  $V - P + G = 2$ . Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

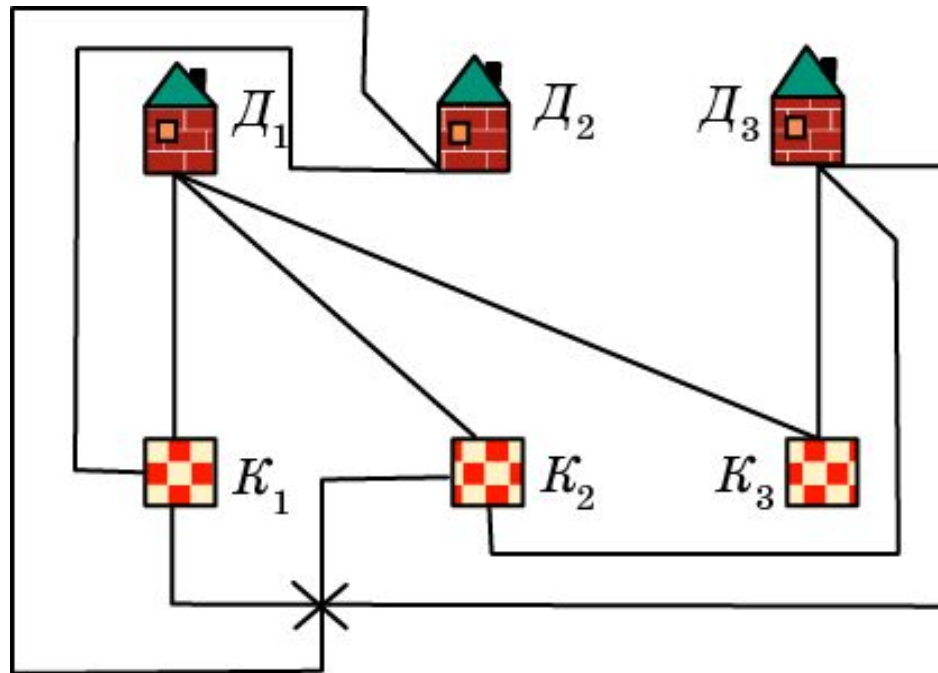
**Теорема Эйлера.** Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство

$$V - P + G = 2,$$

где  $V$  - число вершин,  $P$  - число ребер и  $G$  - число граней данного многогранника.

## Задача о трех домиках и трех колодцах

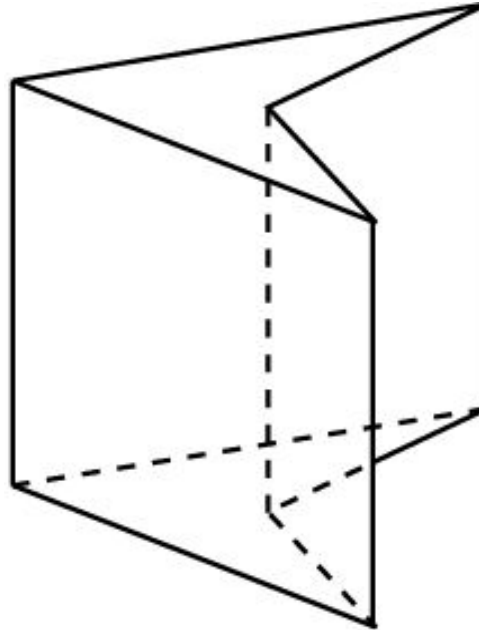
Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



Ответ: Нет.

# Упражнение 1

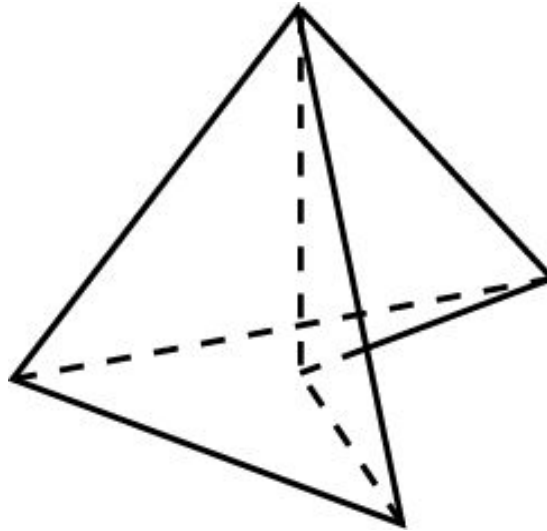
Выполняется ли соотношение Эйлера для невыпуклой призмы?



Ответ: Да.

## Упражнение 2

Выполняется ли соотношение Эйлера для невыпуклой пирамиды?

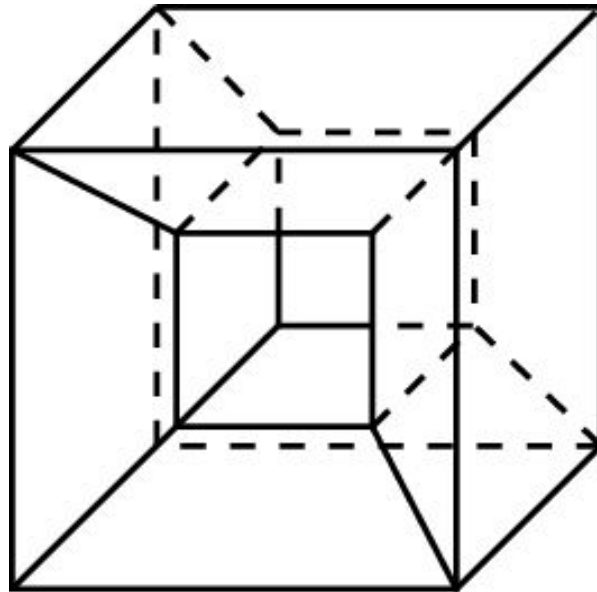


Ответ: Да.

## Упражнение 3

Приведите пример многогранника, для которого не выполняется соотношение Эйлера.

**Ответ:** Например, куб, из которого вырезан прямоугольный параллелепипед.



## Упражнение 4

Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер?

**Ответ:** а)  $V = 6$ ,  $\Gamma = 8$ ; б)  $V = 7$ ,  $\Gamma = 10$ .

## Упражнение 5

Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно: а) 12; б) 15?

**Ответ:** а)  $V = 8, \Gamma = 6$ ; б)  $V = 10, \Gamma = 7$ .



## Упражнение 6

Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если число ребер равно 12? Приведите пример такого многогранника.

Ответ:  $V = 8$ ,  $\Gamma = 6$ , куб.

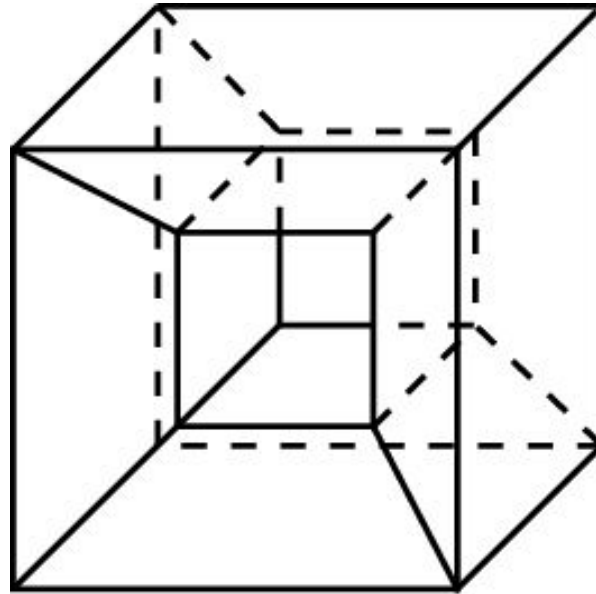
## Упражнение 7

В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Приведите пример такого многогранника.

Ответ:  $V = 6$ ,  $\Gamma = 8$ , октаэдр.

## Упражнение 8

Чему равна эйлерова характеристика многогранника ( $V - P + \Gamma$ , где  $V$  – число вершин,  $P$  – рёбер и  $\Gamma$  – граней многогранника), представленного на рисунке?



Ответ: 0.

## Упражнение 9

Как изменится число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника, если к одной из его граней пристроить пирамиду? Изменится ли  $V - P + G$ ?

**Ответ:** Пусть пристроена  $n$ -угольная пирамида, тогда количество вершин станет  $(V+1)$ , рёбер -  $(P+n)$ , граней -  $(G+n)$ .  $V - P + G$  не изменится.

## Упражнение 10

Как изменится число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника, если от него отсечь один из многогранных углов? Изменится ли  $V - P + \Gamma$ ?

**Ответ:** Пусть отсекли  $m$ -гранный угол, тогда количество вершин будет  $(V+m-1)$ , рёбер -  $(P+m)$ , граней -  $(\Gamma+1)$ .  $V - P + \Gamma$  не изменится.