Теорема косинусов. Следствия из теоремы косинусов.

Проверка домашнего задания.

№1

Определите вид треугольника заданного своим сторонами 17, 8,15.

Решение:

Наибольший угол лежит против стороны, равной 17, то по следствию из теоремы косинусов:

$$\cos \mathcal{L} = \frac{8^2 + 15^2 - 17^2}{2 \cdot 8 \cdot 15} = 0$$

Треугольник прямоугольный.

Ответ: треугольник прямоугольный.

№ 2

Найдите сторону AB в треугольнике ABC, если AC=0,6, $BC=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\angle C=150^{\circ}$.

Решение :

По теореме косинусов:

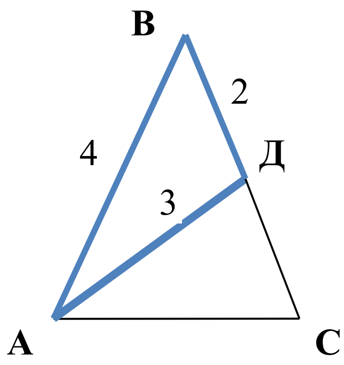
$AB^2=0,6^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 - 2\cdot 0,6\cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \cos 150^{\circ}$,

$AB^2=0,9975$

$AB=\sqrt{0,9975}$

Ответ : $\sqrt{0,9975}$

Проверка домашнего задания.



№3

Найдите сторону АС равнобедренного треугольника АВС , если АВ=ВС=4 и медиана АД равна 3.

Решение:

ΔАВД:

Следствие из т. косинусов:

$$\cos B = \frac{4^2 + 2^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{11}{16}$$

ΔАВС:

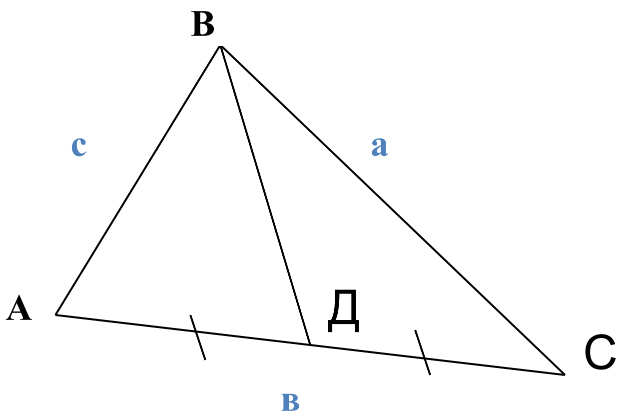
Т. косинусов :

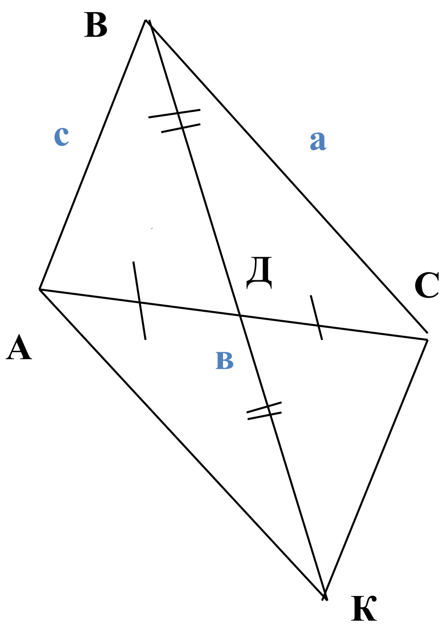
$AC^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{11}{16} = 10$

АС= $\sqrt{10}$

Ответ: $\sqrt{10}$

Найдите медиану треугольникаАВС с известными сторонами а, в, с.





Отложим отрезок ДК=ВД на продолжении медианы. АВСК – параллелограмм (по признаку). Применим следствие из теоремы косинусов для параллелограмма АВСК:

$BK^2+AC^2=2AB^2+2BC^2$

Значит, $(2m_в)^2+в^2=2c^2+2a^2$ или

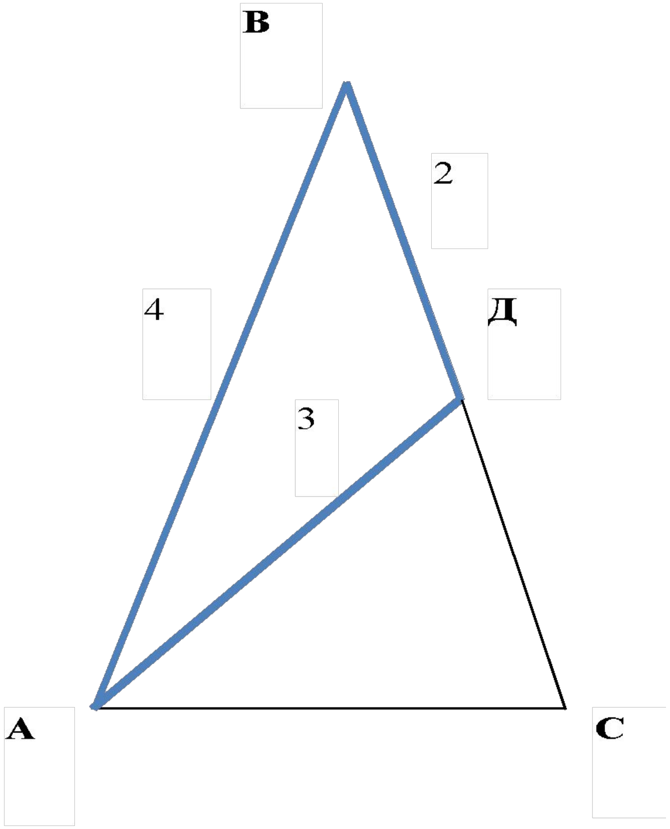
$4m_в^2=2c^2+2a^2-в^2$

$$m_в=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-в^2}$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2в^2+2a^2-c^2}$$

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2в^2-a^2}$$

Найдите сторону АС равнобедренного треугольника АВС , если АВ=ВС=4 и медиана АД равна 3.



$АД^2 = \frac{1}{4}(2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AC^2 - BC^2)$

$3^2 = \frac{1}{4}(2 \cdot 4^2 + 2 \cdot AC^2 - 4^2)$

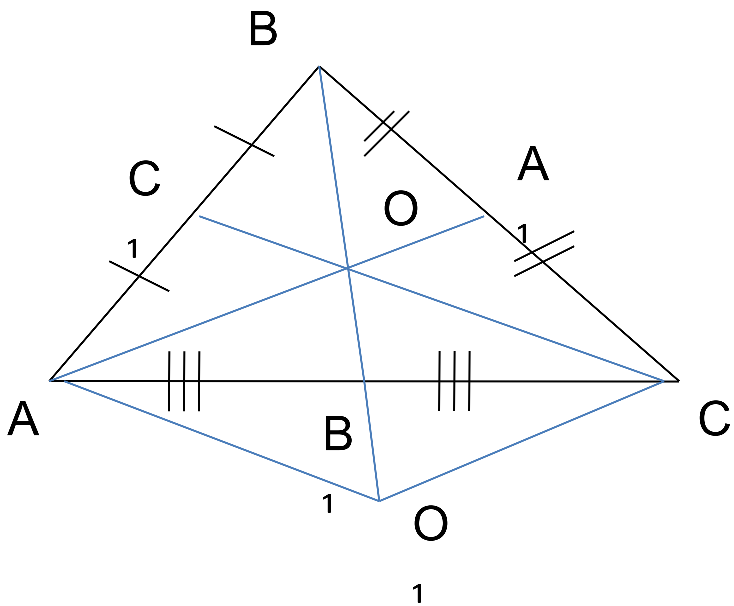
$36=32-16+2\ AC^2$

$AC^2=10$

$AC=\sqrt{10}$

Ответ : $\sqrt{10}$

Найдите сторону треугольника с известными медианами.



Применим следствие из теоремы косинусов для параллелограмма $AOCO_1$:

$OO_1^2+AC^2=2AO^2+2OC^2$

$\left(\frac{2}{3}m_{в}\right)^2$ … $\frac{2}{3}$ … $\frac{2}{3}$ … $)^2$

$в=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_c^2-m_в^2}$

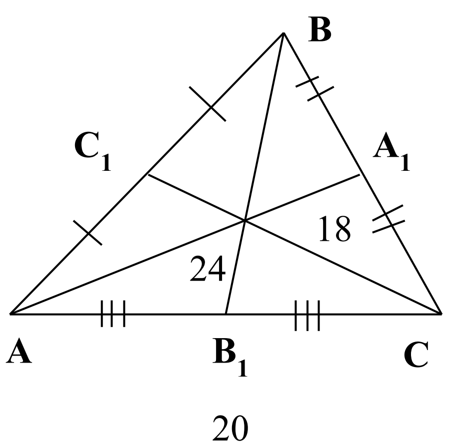
Отложим отрезок $O_1B_1 = OB_1$

$AOCO_1$ - параллелограмм (по признаку).

$a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_в^2+2m_c^2-m_a^2}$

$c=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_в^2-m_c^2}$

Сторона треугольника равна 20, а медианы , проведенные к другим сторонам равны 18 и 24 соответственно. Найдите третью медиану треугольника.



Дано:
$AC=20$
AA_1 и BB_1 и CC_1 - медианы
$AA_1=24$
$CC_1=18$
Найти: BB_1.

$AC^2=\frac{4}{9}(2AA_1^2+2CC_1^2-BB_1^2)$

$400=\frac{4}{9}(2\cdot3^2 6^2+2\cdot4^2 6^2-BB_1^2)$

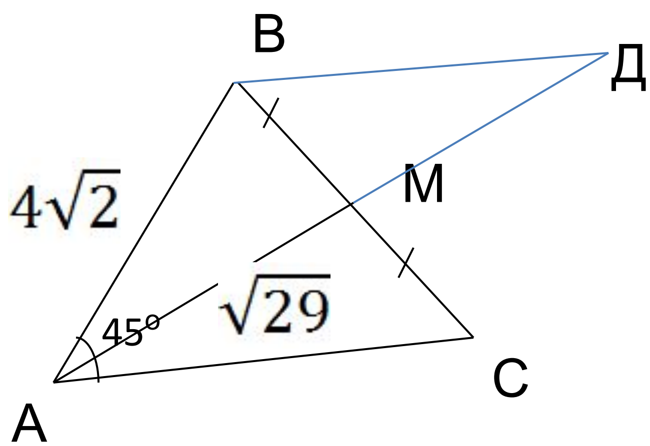
$BB_1^2=2\cdot6^2(9+16)-900=$

$=2\cdot30^2-900=900$

$BB_1=30$

Ответ: 30.

Найдите площадь остроугольного треугольника АВС, если известно, что угол ВАС = 45°, АВ=4$\sqrt{2}$, а медиана АМ=$\sqrt{29}$.



Дано:
ΔАВС
АВ=4$\sqrt{2}$
АМ=$\sqrt{29}$
Угол А=45°
Найти: S.

Решение:
Отложим отрезок МД=АМ и достроим до параллелограмма.
АВДС параллелограмм по признаку.
$\angle$АВД=135°,
ΔАВД:
$АД^2=АВ^2+ВД^2-2АВ\,ВД\cos 135^\circ$ (по теореме косинусов)
$116=32+ВД^2+8ВД$
$ВД^2+8ВД-84=0$
ВД=6
ВД=АС

S= $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ =12.

Ответ: 12.

Домашнее задание.

- Найдите площадь треугольника, если две стороны его соответственно равны 27 и 29, а медиана проведенная к третьей стороне равна 26.
- Найдите площадь остроугольного треугольника АВС, если известно, что $\sqrt{2}$ АВ=6 , а м $\sqrt{58}$ $\angle \mathrm{BAC} = 45^{\circ}$.
- Докажите, что

$$\frac{m_{\text{а}}^2 + m_{\text{в}}^2 + m_{\text{с}}^2}{\text{а}^2 + \text{в}^2 + \text{с}^2} = \frac{3}{4}$$

- Математика, правильно понятая, обладает не только истинной, но и величайшей красотой.

Бертран Рёссель