

*Теорема косинусов.
Следствия из теоремы
косинусов.*

Проверка домашнего задания.

№1

Определите вид треугольника заданного своим сторонами 17, 8,15.

Решение:

Наибольший угол лежит против стороны, равной 17, то по следствию из теоремы косинусов:

$$\cos \mathcal{L} = \frac{8^2 + 15^2 - 17^2}{2 \cdot 8 \cdot 15} = 0$$

Треугольник прямоугольный.

Ответ: треугольник прямоугольный.

№ 2

Найдите сторону АВ в треугольнике ABC, если $AC=0,6, \frac{\sqrt{3}}{4}C=$, $\angle C=150^\circ$.

Решение :

По теореме косинусов:

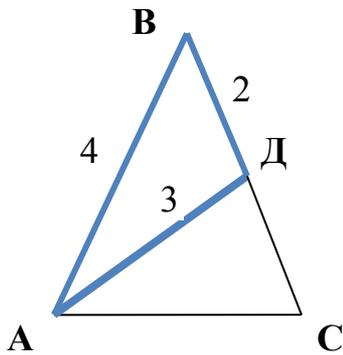
$$AB^2 = 0,6^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 - 2 \cdot 0,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \cos 150^\circ ,$$

$$AB^2 = 0,9975$$

$$AB = \sqrt{0,9975}$$

Ответ : $\sqrt{0,9975}$

Проверка домашнего задания.



№3

Найдите сторону AC равнобедренного треугольника ABC, если $AB=BC=4$ и медиана AD равна 3.

Решение:

$\triangle ABD$:

Следствие из т. косинусов:

$$\cos B = \frac{4^2 + 2^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{11}{16}$$

$\triangle ABC$:

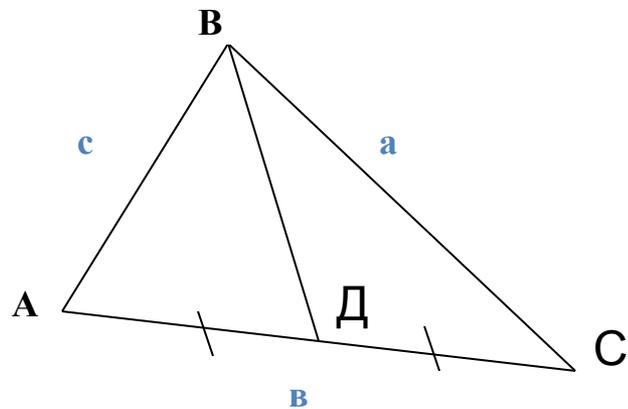
Т. косинусов : $\frac{11}{16}$

$$AC^2 - \frac{11}{16} + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{11}{16} = 10$$

$$AC = \sqrt{10}$$

Ответ: $\sqrt{10}$

Найдите медиану треугольника ABC с известными сторонами a, b, c.



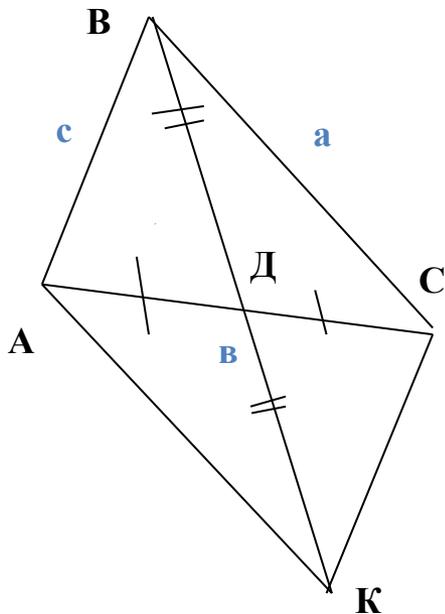
Отложим отрезок $DK=BD$ на продолжении медианы. $ABCK$ – параллелограмм (по признаку).
Применим следствие из теоремы косинусов для параллелограмма $ABCK$:

$$BK^2 + AC^2 = 2AB^2 + 2BC^2$$

Значит, $(2m_B)^2 + b^2 = 2c^2 + 2a^2$ или

$$4m_B^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$$

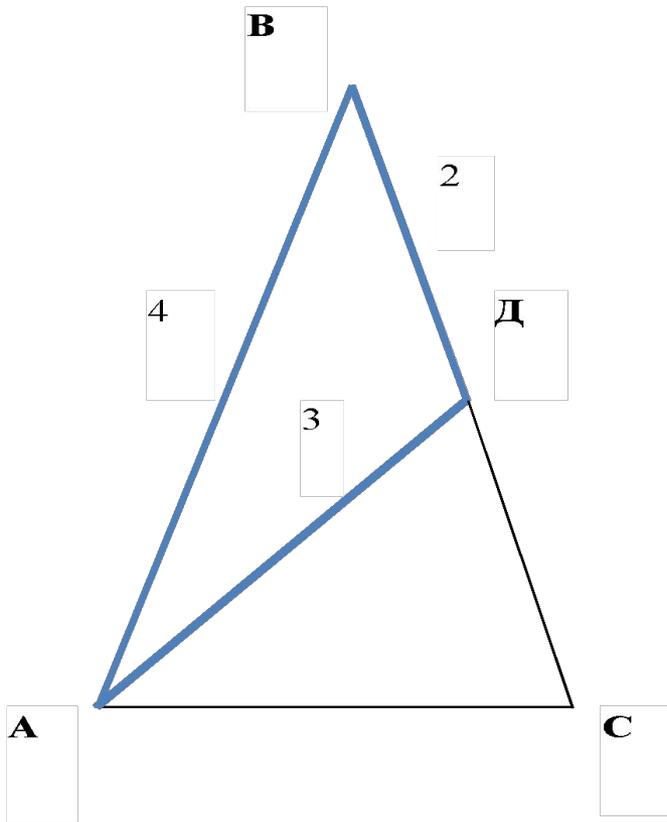
$$m_B = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$$



$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$$

Найдите сторону AC равнобедренного треугольника ABC, если AB=BC=4 и медиана АД равна 3.



$$AD^2 = \frac{1}{4}(2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AC^2 - BC^2)$$

$$3^2 = \frac{1}{4}(2 \cdot 4^2 + 2 \cdot AC^2 - 4^2)$$

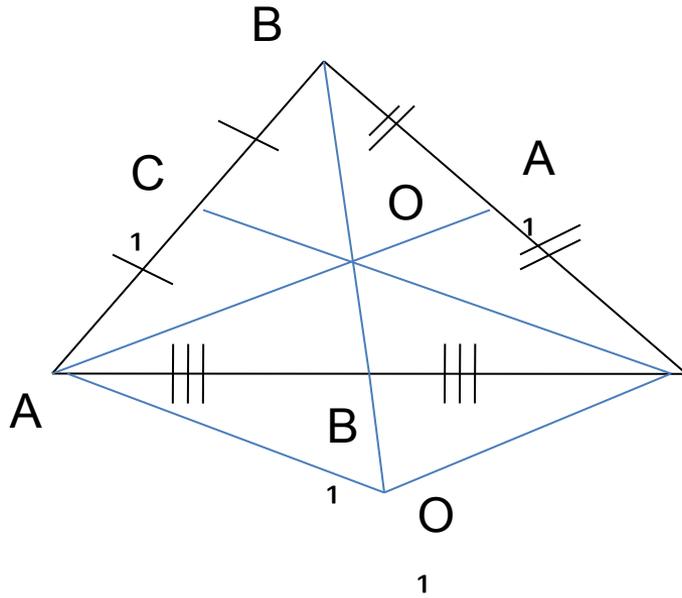
$$36 = 32 - 16 + 2 AC^2$$

$$AC^2 = 10$$

$$AC = \sqrt{10}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{10}$$

Найдите сторону треугольника с известными медианами.



Применим следствие из теоремы косинусов для параллелограмма $AOCO_1$:

$$AO^2 + CO^2 = 2AO^2 + 2CO^2$$

$$\left(\frac{2}{3} m_b \right)^2 + \left(\frac{2}{3} m_c \right)^2 = 2 \left(\frac{2}{3} m_a \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{3} m_c \right)^2$$

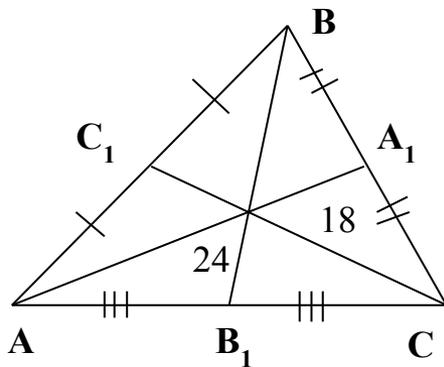
$$b = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$$

Отложим отрезок $O_1B_1 = OB_1$
 $AOCO_1$ - параллелограмм
 (по признаку).

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$$

$$c = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}$$

Сторона треугольника равна 20, а медианы, проведенные к другим сторонам равны 18 и 24 соответственно. Найдите третью медиану треугольника.



Дано:

$$AC=20$$

AA_1 и BB_1 и CC_1 -

медианы

$$AA_1=24$$

$$CC_1=18$$

Найти: BB_1 .

$$AC^2 = \frac{4}{9} (2AA_1^2 + 2CC_1^2 - BB_1^2)$$

$$400 = \frac{4}{9} (2 \cdot 3^2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 - BB_1^2)$$

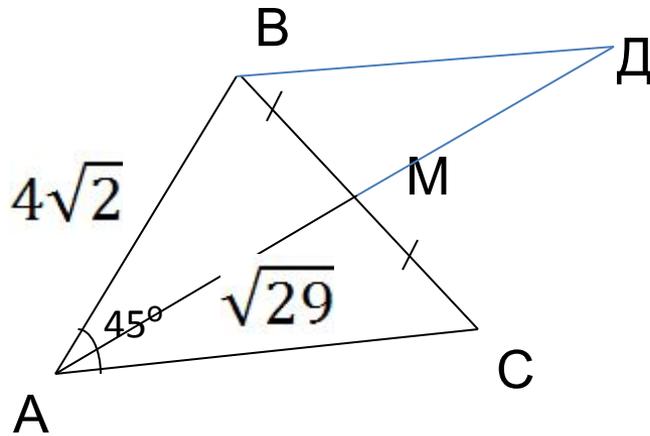
$$BB_1^2 = 2 \cdot 6^2 (9 + 16) - 900 =$$

$$= 2 \cdot 30^2 - 900 = 900$$

$$BB_1 = 30$$

Ответ: 30.

Найдите площадь остроугольного треугольника ABC, если известно, что угол $BAC = 45^\circ$, $AB = 4\sqrt{2}$, а медиана $AM = \sqrt{29}$.



Дано:

$\triangle ABC$

$AB = 4\sqrt{2}$

$AM = \sqrt{29}$

Угол $A = 45^\circ$

Найти: S .

Решение:

Отложим отрезок $MD = AM$ и построим до параллелограмма.

$ABDC$ параллелограмм по признаку.

$\angle ABD = 135^\circ$,

$\triangle ABD$:

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos 135^\circ$ (по теореме косинусов)

$$116 = 32 + BD^2 + 8BD$$

$$BD^2 + 8BD - 84 = 0$$

$$BD = 6$$

$$BD = AC$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 12.$$

Ответ: 12.

Домашнее задание.

- Найдите площадь треугольника, если две стороны его соответственно равны 27 и 29, а медиана проведенная к третьей стороне равна 26.
- Найдите площадь остроугольного треугольника ABC, если известно, что $AB=6$, $m_{\sqrt{58}}$, $\angle BAC = 45^\circ$.
- Докажите, что

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$$

- Математика, правильно понятая, обладает не только истинной, но и величайшей красотой.

Бертран Рёссель