

# Теорема Пифагора

Пребудет вечной истина, как скоро  
Её познает слабый человек!  
И ныне теорема Пифагора  
Верна, как и в его далёкий век.

# Содержание



- Формулировка теоремы
- Доказательства теоремы
- Значение теоремы Пифагора



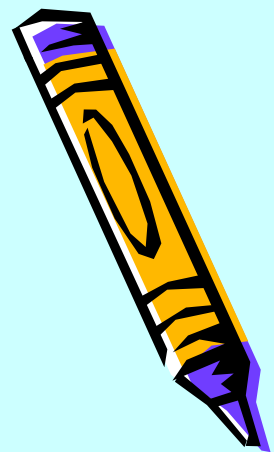
# Формулировка теоремы

Во времена Пифагора теорема звучала так:

✓ « Доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах»

или

✓ « Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах».



# Современная формулировка

« В прямоугольном треугольнике  
квадрат гипотенузы равен  
сумме квадратов катетов».



# Доказательства теоремы

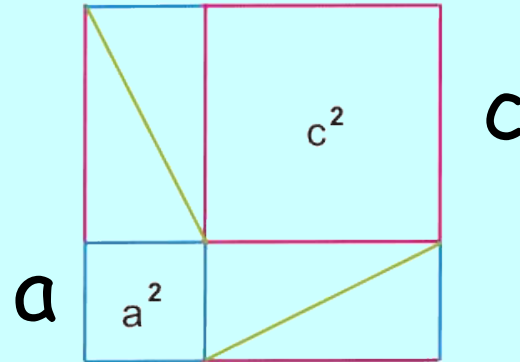
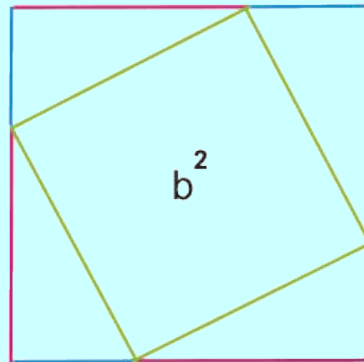
Существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.).

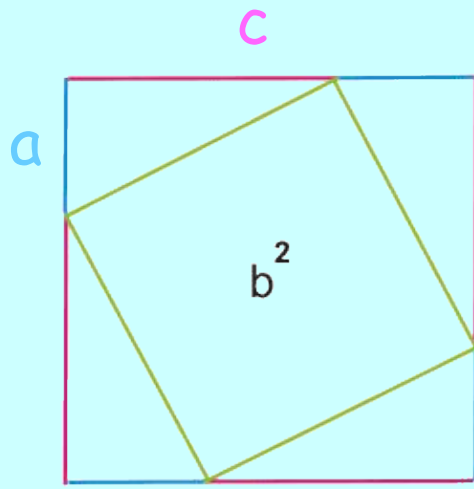


I.

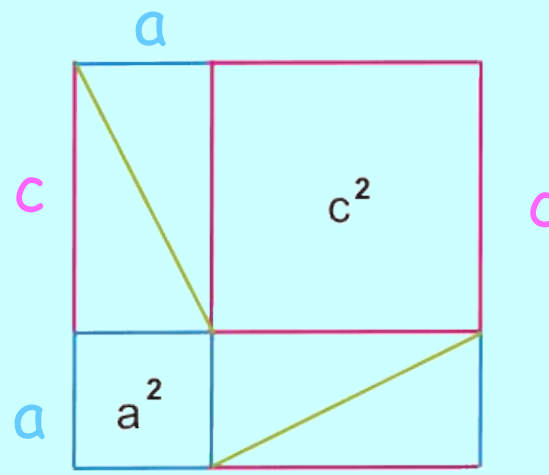
# Самое простое доказательство

Рассмотрим квадрат,  
показанный на  
рисунке.  
Сторона квадрата  
равна  $a + c$ .





В одном случае (слева) квадрат разбит на квадрат со стороной  $b$  и четыре прямоугольных треугольника с катетами  $a$  и  $c$ .



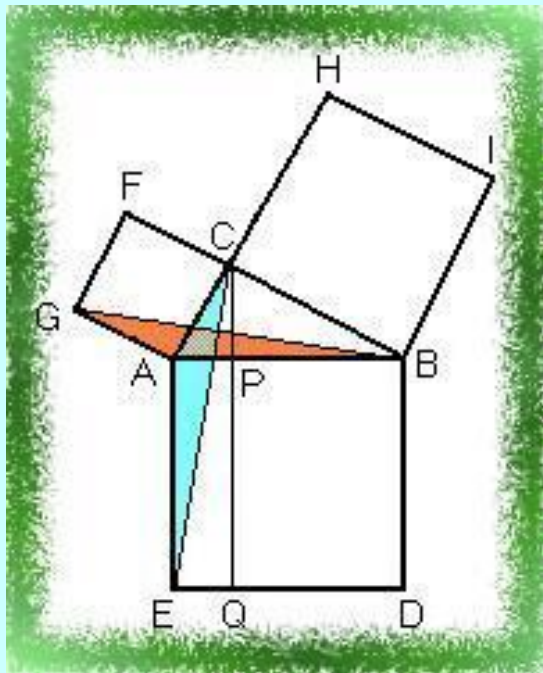
В другом случае (справа) квадрат разбит на два квадрата со сторонами  $a$  и  $c$  и четыре прямоугольных треугольника с катетами  $a$  и  $c$ .

Таким образом, получаем, что площадь квадрата со стороной  $b$  равна сумме площадей квадратов со сторонами  $a$  и  $c$ .



# II.

# Доказательство Евклида

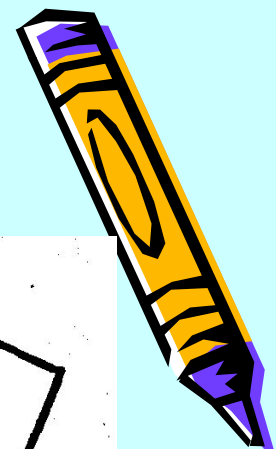
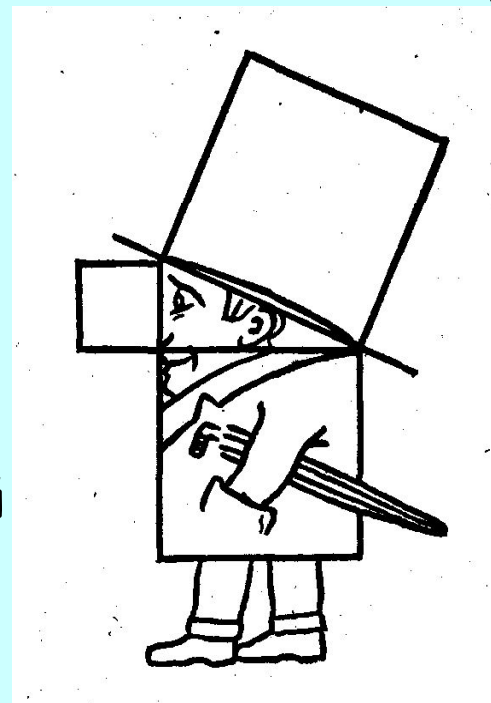


Дано:

$ABC$ -прямоугольный  
треугольник

Доказать:

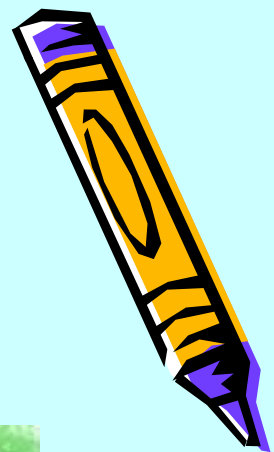
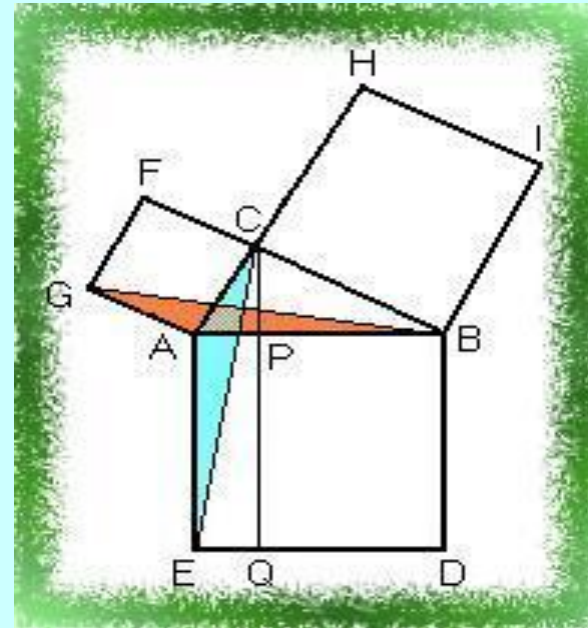
$$S_{ABDE} = S_{ACFG} + S_{BCHI}$$





# Доказательство:

Пусть  $ABDE$ -квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника  $ABC$ , а  $ACFG$  и  $BCHI$ -квадраты, построенные на его катетах. Опустим из вершины  $C$  прямого угла перпендикуляр  $CP$  на гипотенузу и продолжим его до пересечения со стороной  $DE$  квадрата  $ABDE$  в точке  $Q$ ; соединим точки  $C$  и  $E$ ,  $B$  и  $G$ .



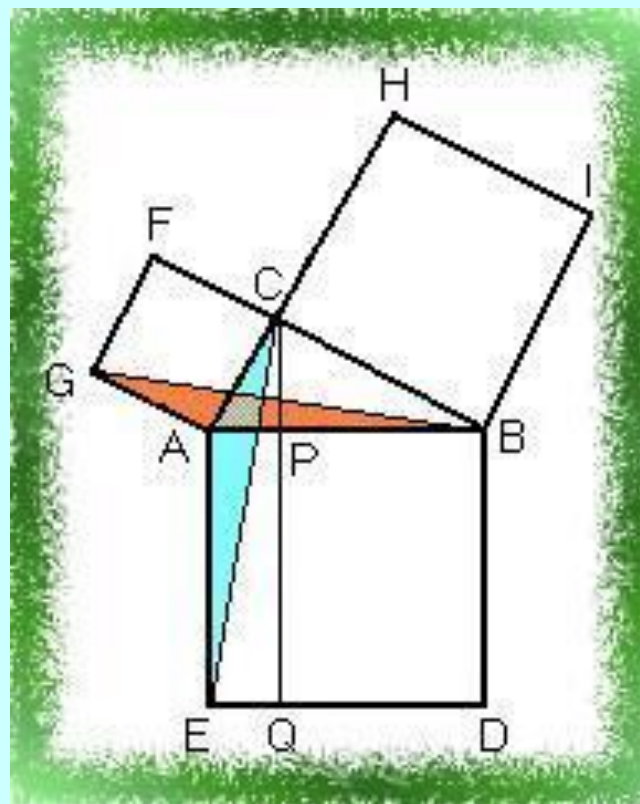
Очевидно, что углы  $\angle CAE = \angle GAB (= A + 90^\circ)$ ; отсюда следует, что треугольники  $ACE$  и  $AGB$  (закрашенные на рисунке) равны между собой (по двум сторонам и углу, заключённому между ними). Сравним далее треугольник  $ACE$  и прямоугольник  $PQEA$ ; они имеют общее основание  $AE$  и высоту  $AP$ , опущенную на это основание, следовательно

$$S_{PQEA} = 2S_{ACE}$$

Точно так же квадрат  $FCAG$  и треугольник  $BAG$  имеют общее основание  $GA$  и высоту  $AC$ ; значит,

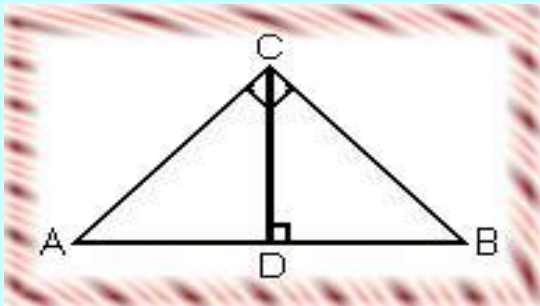
$$S_{FCAG} = 2S_{GAB}$$

Отсюда и из равенства треугольников  $ACE$  и  $GBA$  вытекает равенство прямоугольника  $QPBD$  и квадрата  $FCGA$ ; аналогично доказывается и равенство прямоугольника  $QPAE$  и квадрата  $CHIB$ . А отсюда, следует что квадрат  $ABDE$  равен сумме квадратов  $ACFG$  и  $BCHI$ , т.е. теорема Пифагора.



# III.

# Алгебраическое доказательство



**Дано:** ABC-прямоугольный  
треугольник

**Доказать:**  $AB^2 = AC^2 + BC^2$

**Доказательство:**

- 1) Проведем высоту CD из вершины прямого угла C.
- 2) По определению косинуса угла  $\cos A = AD/AC = AC/AB$ , отсюда следует  $AB \cdot AD = AC^2$ .
- 3) Аналогично  $\cos B = BD/BC = BC/AB$ , значит  $AB \cdot BD = BC^2$ .
- 4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB)$$

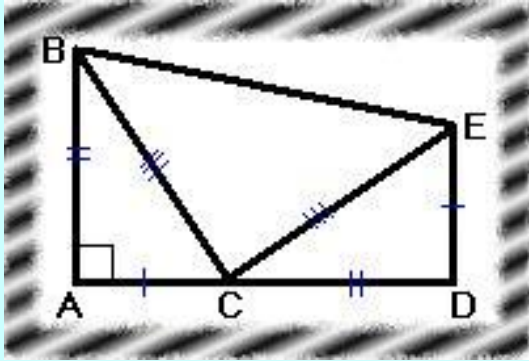
$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

*Что и требовалось доказать.*



# IV.

# Геометрическое доказательство



Дано:  $ABC$ -прямоугольный  
треугольник  
Доказать:  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Доказательство:

- 1) Построим отрезок  $CD$  равный отрезку  $AB$  на продолжении катета  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Затем опустим перпендикуляр  $ED$  к отрезку  $AD$ , равный отрезку  $AC$ , соединим точки  $B$  и  $E$ .
- 2) Площадь фигуры  $ABED$  можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED} = 2 \cdot AB \cdot AC / 2 + BC^2 / 2$$

- 3) Фигура  $ABED$  является трапецией, значит, её площадь равна:

$$S_{ABED} = (DE + AB) \cdot AD / 2.$$

- 4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (DE + AB)(CD + AC) / 2$$

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (AC + AB)^2 / 2$$

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = AC^2 / 2 + AB^2 / 2 + AB \cdot AC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Это доказательство было опубликовано в 1882 году Гэрфилдом.



# Значение теоремы Пифагора

Теорема Пифагора- это одна из самых важных теорем геометрии. Значение её состоит в том, что из неё или с её помощью можно вывести большинство теорем геометрии.



Доказательство теоремы Пифагора учащиеся средних веков считали очень трудным и называли его **Dons asinorum** - ослиный мост, или **elefuga** - бегство «убогих», так как некоторые «убогие» ученики, не имевшие серьезной математической подготовки, бежали от геометрии. Слабые ученики, заучившие теоремы наизусть, без понимания, и прозванные поэтому «ослами», были не в состоянии преодолеть теорему Пифагора, служившую для них вроде непреодолимого моста. Из-за чертежей, сопровождающих теорему Пифагора, учащиеся называли ее также «ветряной мельницей», составляли стихи, вроде «Пифагоровы штаны на все стороны равны», рисовали карикатуры.

