

Теорема Пифагора

Пребудет вечной истина, как скоро
Её познает слабый человек!
И ныне теорема Пифагора
Верна, как и в его далёкий век.

Содержание



- Формулировка теоремы
- Доказательства теоремы
- Значение теоремы Пифагора



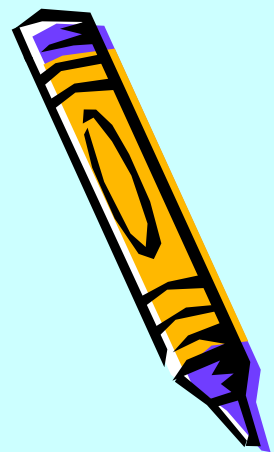
Формулировка теоремы

Во времена Пифагора теорема звучала так:

✓ « Доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах»

или

✓ « Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах».



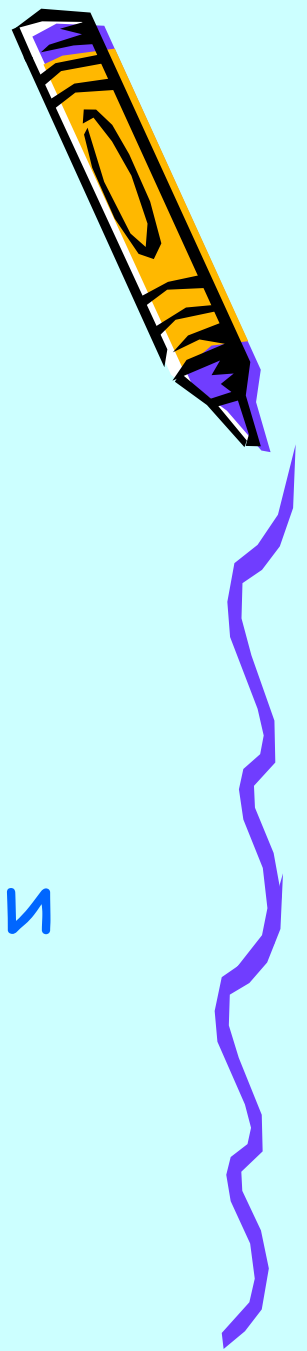
Современная формулировка

« В прямоугольном треугольнике
квадрат гипотенузы равен
сумме квадратов катетов».



Доказательства теоремы

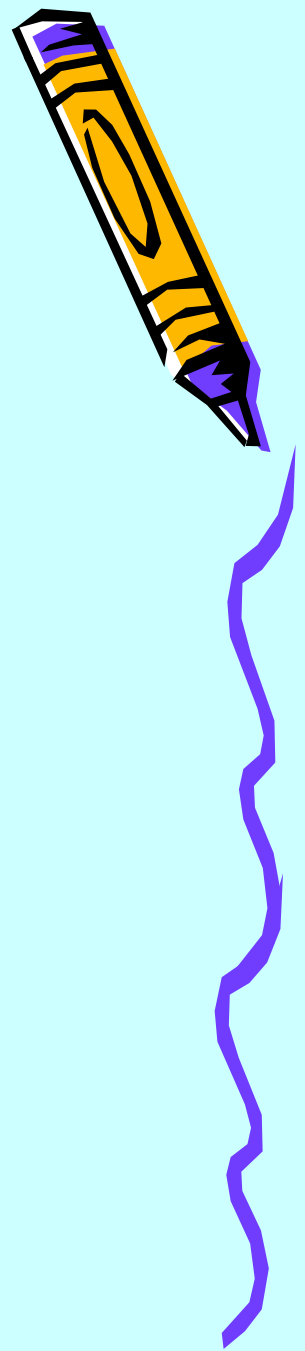
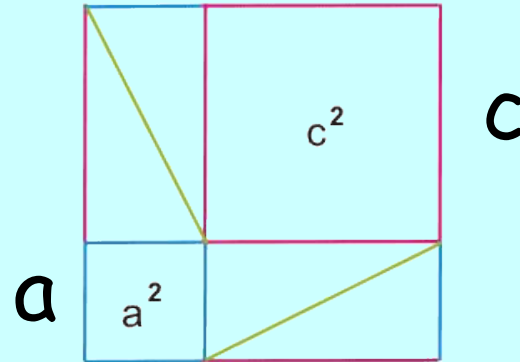
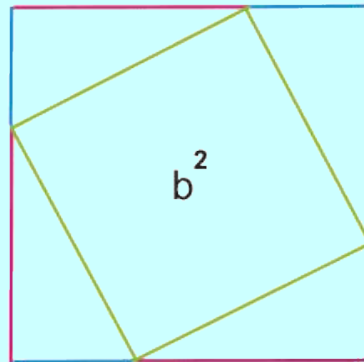
Существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.).

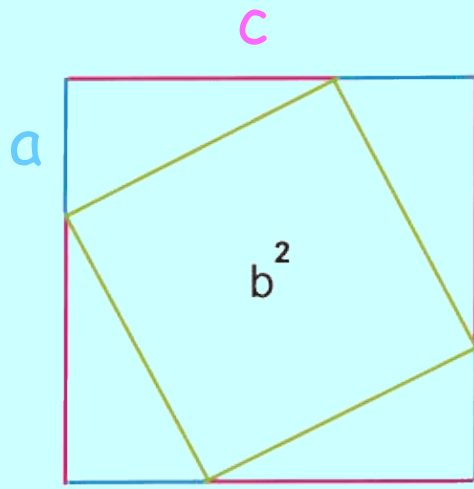


I.

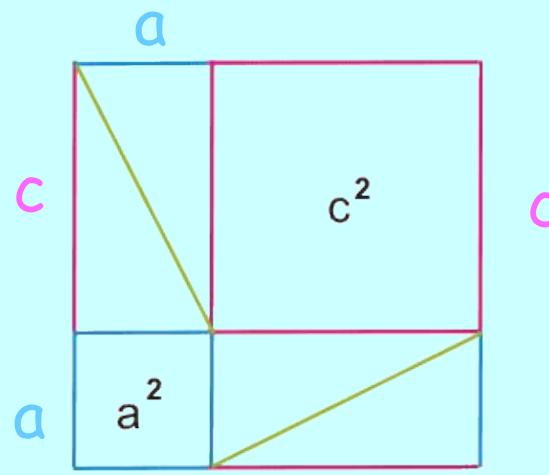
Самое простое доказательство

Рассмотрим квадрат,
показанный на
рисунке.
Сторона квадрата
равна $a + c$.





В одном случае (слева) квадрат разбит на квадрат со стороной b и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и c .



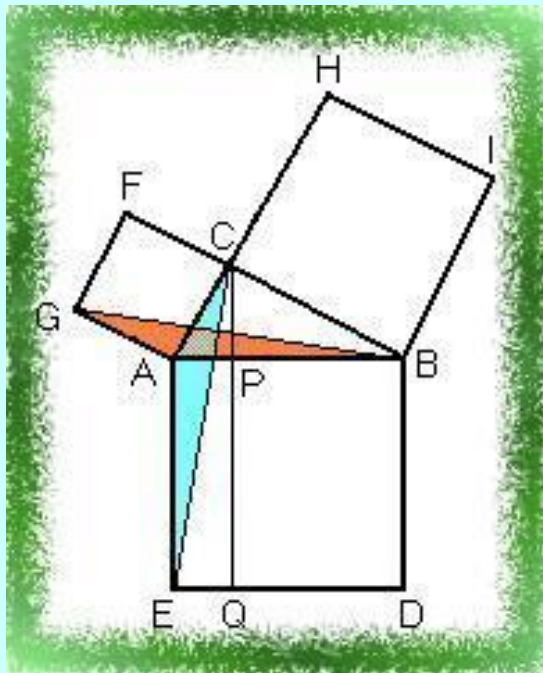
В другом случае (справа) квадрат разбит на два квадрата со сторонами a и c и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и c .

Таким образом, получаем, что площадь квадрата со стороной b равна сумме площадей квадратов со сторонами a и c .



II.

Доказательство Евклида

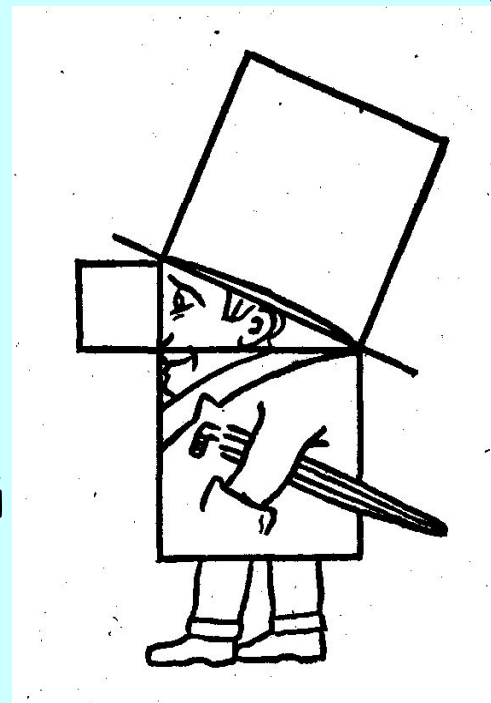


Дано:

ABC -прямоугольный
треугольник

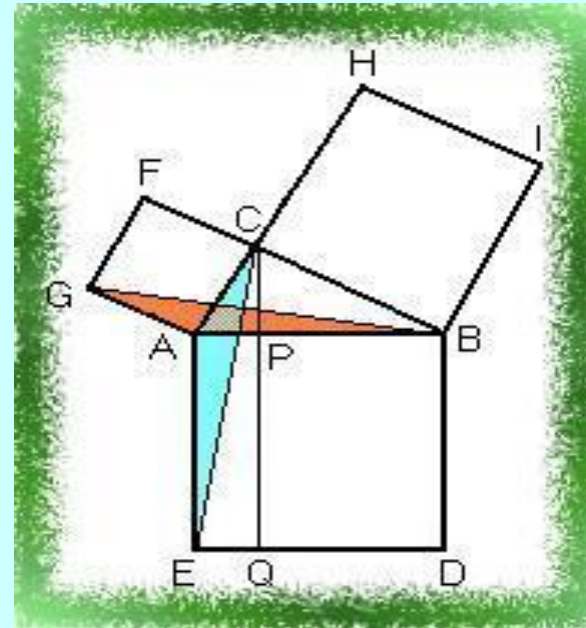
Доказать:

$$S_{ABDE} = S_{ACFG} + S_{BCHI}$$



Доказательство:

Пусть $ABDE$ -квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника ABC , а $ACFG$ и $BCHI$ -квадраты, построенные на его катетах. Опустим из вершины C прямого угла перпендикуляр CP на гипотенузу и продолжим его до пересечения со стороной DE квадрата $ABDE$ в точке Q ; соединим точки C и E , B и G .



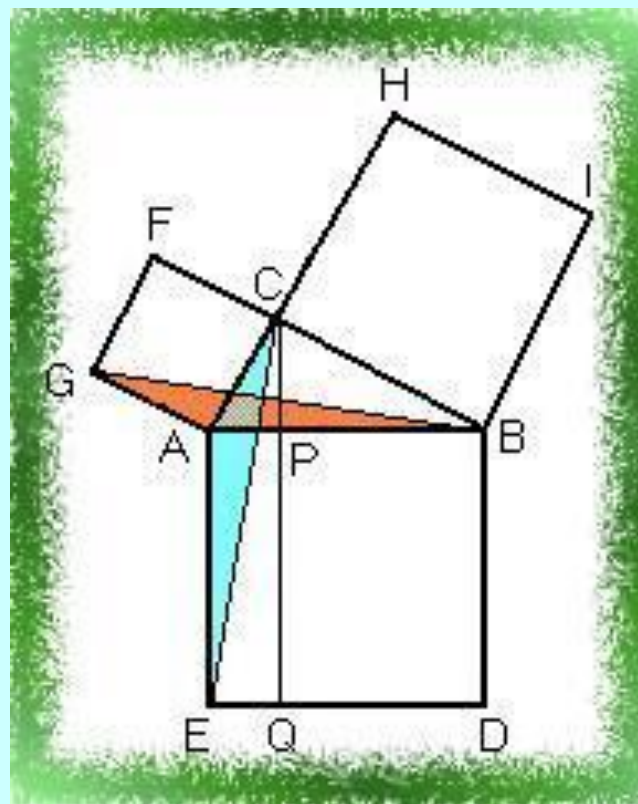
Очевидно, что углы $\angle CAE = \angle GAB (= A + 90^\circ)$; отсюда следует, что треугольники $\triangle ACE$ и $\triangle AGB$ (закрашенные на рисунке) равны между собой (по двум сторонам и углу, заключённому между ними). Сравним далее треугольник $\triangle ACE$ и прямоугольник $PQEA$; они имеют общее основание AE и высоту AP , опущенную на это основание, следовательно

$$S_{PQEA} = 2S_{ACE}$$

Точно так же квадрат $FCAG$ и треугольник $\triangle BAG$ имеют общее основание GA и высоту AC ; значит,

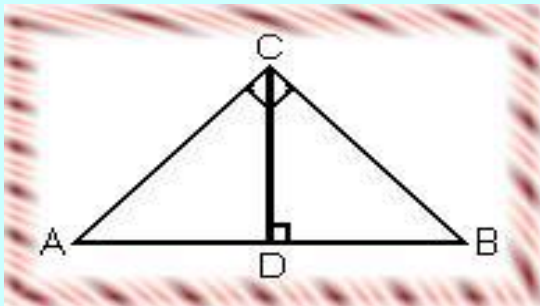
$$S_{FCAG} = 2S_{GAB}$$

Отсюда и из равенства треугольников $\triangle ACE$ и $\triangle GBA$ вытекает равенство прямоугольника $QPBD$ и квадрата $FCGA$; аналогично доказывается и равенство прямоугольника $QPAE$ и квадрата $CHIB$. А отсюда, следует что квадрат $ABDE$ равен сумме квадратов $ACFG$ и $BCHI$, т.е. теорема Пифагора.



III.

Алгебраическое доказательство



Дано: ABC-прямоугольный
треугольник

Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Доказательство:

- 1) Проведем высоту CD из вершины прямого угла C.
- 2) По определению косинуса угла $\cos A = AD/AC = AC/AB$, отсюда следует $AB \cdot AD = AC^2$.
- 3) Аналогично $\cos B = BD/BC = BC/AB$, значит $AB \cdot BD = BC^2$.
- 4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB)$$

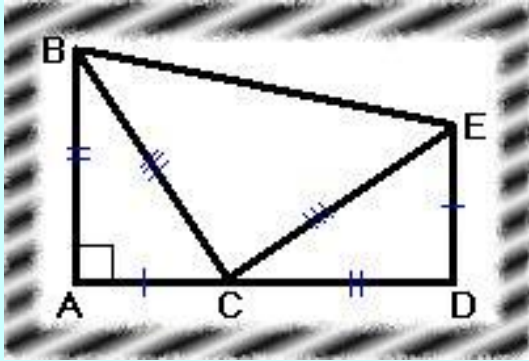
$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Что и требовалось доказать.



IV.

Геометрическое доказательство



Дано: ABC -прямоугольный
треугольник
Доказать: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Доказательство:

- 1) Построим отрезок CD равный отрезку AB на продолжении катета AC прямоугольного треугольника ABC . Затем опустим перпендикуляр ED к отрезку AD , равный отрезку AC , соединим точки B и E .
- 2) Площадь фигуры $ABED$ можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED} = 2 \cdot AB \cdot AC / 2 + BC^2 / 2$$

- 3) Фигура $ABED$ является трапецией, значит, её площадь равна:

$$S_{ABED} = (DE + AB) \cdot AD / 2.$$

- 4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (DE + AB)(CD + AC) / 2$$

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (AC + AB)^2 / 2$$

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = AC^2 / 2 + AB^2 / 2 + AB \cdot AC$$

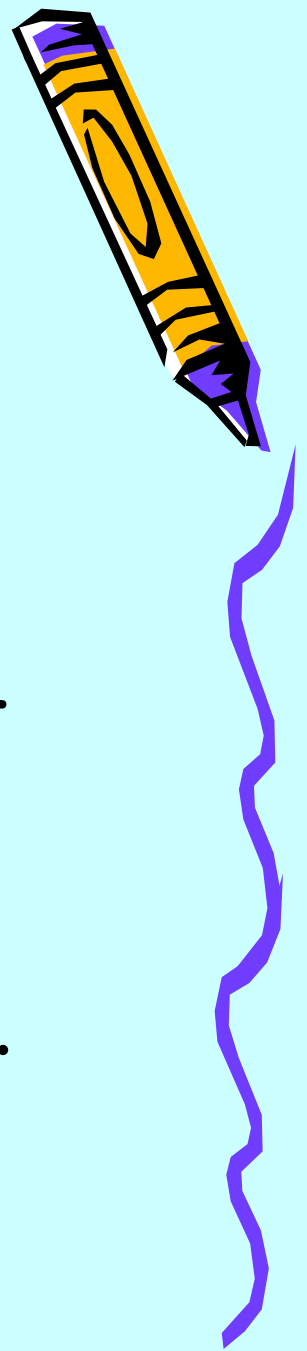
$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Это доказательство было опубликовано в 1882 году Гэрфилдом.



Значение теоремы Пифагора

Теорема Пифагора- это одна из самых важных теорем геометрии. Значение её состоит в том, что из неё или с её помощью можно вывести большинство теорем геометрии.



Доказательство теоремы Пифагора учащиеся средних веков считали очень трудным и называли его **Dons asinorum** - ослиный мост, или **elefuga** - бегство «убогих», так как некоторые «убогие» ученики, не имевшие серьезной математической подготовки, бежали от геометрии. Слабые ученики, заучившие теоремы наизусть, без понимания, и прозванные поэтому «ослами», были не в состоянии преодолеть теорему Пифагора, служившую для них вроде непреодолимого моста. Из-за чертежей, сопровождающих теорему Пифагора, учащиеся называли ее также «ветряной мельницей», составляли стихи, вроде «Пифагоровы штаны на все стороны равны», рисовали карикатуры.

