Теорема Пифагора

История,
доказательства,
применение.

Содержание

Введение

Трудно найти человека, у которого имя Пифагора не ассоциировалось бы с теоремой Пифагора. В самом деле, теорема Пифагора проста, но не очевидна. Это сочетание двух противоречивых начал и придает ей особую притягательную силу, делает ее красивой. Но, кроме того, теорема Пифагора имеет огромное значение: она применяется в геометрии буквально на каждом шагу, и тот факт, что существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.), свидетельствует о гигантском числе ее конкретных реализаций. Открытие теоремы Пифагором окружено ореолом красивых легенд. Сегодня теорема Пифагора обнаружена в различных частных задачах и чертежах: и в египетском треугольнике в папирусе времен фараона Аменемхета первого (ок. 2000 до н.э.), и в вавилонских клинописных табличках эпохи царя Хаммурапи (XVIII в. до н.э.), и в древнеиндийском геометрическо-теологическом трактате VI - V вв. до н.э. «Сульва сутра» («Правила веревки»). В древнейшем китайском трактате «Чжоуби суань цзинь», время создания которого точно не известно, утверждается, что в XII в. до н. э. китайцы знали свойства египетского треугольника, а к VI в. до н.э.— и общий вид теоремы. Несмотря на все это, имя Пифагора столь прочно сплавилось.

Мыслитель,

математик,

философ.

ПИФАГОР
(от 570 – 500 г.г. до н. э.)

Письменных документов о Пифагоре Самосском не осталось, а по более поздним свидетельствам трудно восстановить картину его жизни и достижений. Известно, что Пифагор покинул свой родной остров Самос в Эгейском море у берегов Малой Азии в знак протеста против тирании правителя и уже в зрелом возрасте (по преданию 40 лет) появился в греческом городе Кротоне на юге Италии. Пифагор и его последователи – пифагорейцы – образовали тайный союз, игравший немалую роль в жизни греческих колоний в Италии. Пифагорейцы узнавали друг друга по звёздному пятиугольнику – пентаграмме.

На учение Пифагора большое влияние оказала философия и религия Востока. Он путешествовал по странам Востока: был в Египте и в Вавилоне. Там Пифагор познакомился и с восточной математикой. Математика стала частью его учения, и важнейшей частью. Пифагор впервые разделил числа на чётные и нечётные, простые и составные, ввёл понятия фигурного числа. В его школе били подробно рассмотрены пифагоровы тройки натуральных чисел, у которого квадрат равнялся сумме квадратов двух других. К числам (а он имел в виду лишь натуральные) он хотел свести весь мир, и математику в частности. Но в самой школе Пифагора было сделано открытие, нарушавшее эту гармонию. Было токазоно, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом, то есть не выражается через натуральные числа.

Естественно, что геометрия у Пифагора была подчинена арифметике, это ярко проявлялось в теореме, носящей его имя и ставшей в дальнейшем основой применения численных методов в геометрии.

Пифагор
Фрагмент фрески
Рафаэля
«Афинская школа».

1511 г.

История теоремы

Исторический обзор начинается с древнего Китая. Здесь особое внимание привлекает математическая книга Чупей. В этом сочинении так говорится о пифагоровым треугольнике со сторонами 3, 4 и 5: *«Если прямой угол разложить на составные части, то линия, соединяющая концы его сторон, будет 5, когда основание есть 3, а высота 4».* В этой же книге предложен рисунок, который совпадает с одним из чертежей индусской геометрии Басхары. *Кантор* (крупнейший немецкий историк математики) считает, что равенство 32+42=52 было известно уже египтянам еще около 2300 г. до н. э. во времена царя *Аменемхета I* (согласно папирусу 6619 Берлинского музея). По мнению Кантора гарпедонапты, или «натягиватели веревок», строили прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5. Несколько больше известно о теореме Пифагора у вавилонян. В одном тексте, относимом ко времени *Хаммураби,* т. е. к 2000 г. до н.э., приводится приближенное вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника. Отсюда можно сделать вывод, что в Двуречье умели производить вычисления с прямоугольными треугольниками, по крайней мере, в некоторых случаях. Основываясь, с одной стороны, на сегодняшнем уровне знаний о египетской и вавилонской математике, а с другой на критическом изучении греческих источников, Вандер-Варден (голландский математик) сделал следующий вывод: *«Заслугой первых греческих математиков, таких как Фалес, Пифагор и пифагорейцы, является не открытие математики, но ее систематизация и обоснование. В их руках вычислительные рецепты, основанные на смутных представлениях, превратились в точную науку».* Геометрия, у индусов, как и у египтян и вавилонян, была тесно связана с культом. Весьма вероятно, что теорема о квадрате гипотенузы была известна в Индии уже около 18 века до н. э. В первом русском переводе евклидовых «Начал», сделанном Ф. И. Петрушевским, теорема Пифагора изложена так: *«В прямоугольных треугольниках квадрат из стороны, противолежащей прямому углу, равен сумме квадратов из сторон, содержащих прямой угол».*

В настоящее время известно, что эта теорема не была открыта Пифагором. Однако одни полагают, что Пифагор первым дал ее полноценное доказательство, а другие отказывают ему и в этой заслуге.

Неалгебраические доказательства
1.1 С помощью мозаики

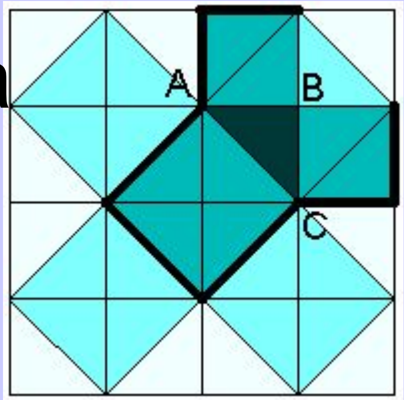


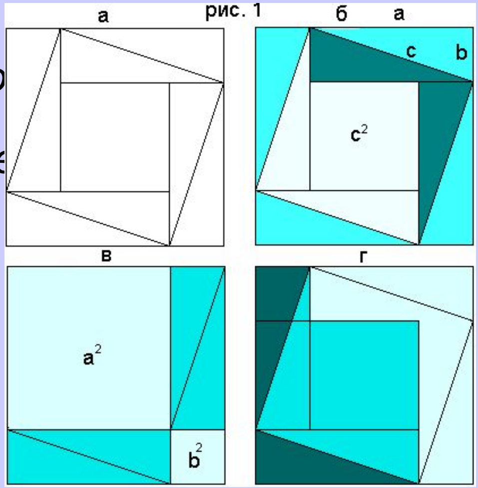
рис. 1

«Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах».

Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Вероятно, с него и начиналась теорема. Достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников *{рис. 1),* чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для *А АВС:* квадрат, построенный на гипотенузе *АС,* содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах,— по два. Теорема доказана.

Неалгебраические доказательства
1.2. Древнекитайское доказательство

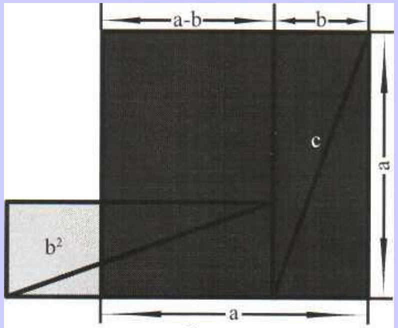
Математические трактаты Древнего Китая дошли до нас в редакции II в. до н.э. Дело в том, что в 213 г. до н.э. китайский император Ши Хуанди, стремясь ликвидировать прежние традиции, приказал сжечь все древние книги. Во II в. до н.э. в Китае была изобретена бумага и одновременно начинается воссоздание древних книг. Так возникла тематика е девяти книгах» — главное из сохранившихся математике — астрономических сочинений в книге «Математики» помещен чертеж {рис. 2а), доказывающий теорему Пифагора. Ключ к этому доказательству подобрать нетрудно. В самом деле, на древнекитайском чертеже четыре равных прямоугольных треугольника с катетами а, Ъ и гипотенузой с уложены так, что их внешний контур образует квадрат со стороной а+b, а внутренний — квадрат со стороной с, построенный на гипотенузе {рис. 26). Если квадрат со стороной с вырезать и оставшиеся 4 затушеванных треугольника уложить в два прямоугольника {рис. 2в), то ясно, что образовавшаяся пустота, с одной стороны, равна с2, а с другой — а2+Ь2, т.е. с2=а2+Ь2. Теорема доказана. При таком доказательстве построения внутри квадрата на гипотенузе, которые видны на древне китайском чертеже (рис. 2а), не используются. По-видимому, древнекитайские математики имели другое доказательство. Именно если в квадрате со стороной с два заштрихованных треугольника (рис. 26) отрезать и приложить гипотенузами к двум другим гипотенузам (рис. 2г), то легко обнаружить, что полученная фигура, которую иногда называют «креслом невесты», состоит из двух квадратов со сторонами а и Ь, т.е. с2=а2+Ь2.



Неалгебраические доказательства
1.3. Древнеиндийское доказательство

Древней Индии заметили, что для доказательства теоремы Пифагора достаточно использовать внутреннюю часть древнекитайского чертежа. В написанном на пальмовых листьях трактате «Сиддханта широмани» («Венец знания») крупнейшего индийского математика XII в. Бхаскары помещен чертеж *(рис. 4а)* с характерным для индийских доказательств, словом «смотри!». Как видим, прямоугольные треугольники уложены здесь гипотенузой наружу и квадрат *с 2* перекладывается в «кресло невесты» *a*a-b*b (рис. 4б).* Заметим, что частные случаи теоремы Пифагора (например, построение квадрата, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата) встречаются в древнеиндийском трактате «Сульва сутра» (VII-V вв. до н.э.).

а)

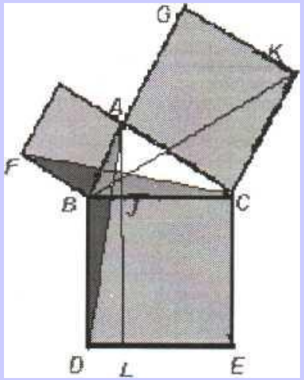


б)

Рис. 4

Неалгебраические доказательства 1.5. Доказательство Евклида

Доказательство Евклида приведено в предложении 47 первой книги «Начал». На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника *ABC* строятся соответствующие квадраты *(рис. 5)* и доказывается, что прямоугольник *BJLD* равновелик квадрату *ABFH,* а прямоугольник *ICEL* — квадрату *АС КС.* Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе. В самом деле, затушеванные на рисунке треугольники *ABD* и *BFC* равны по двум сторонам и углу между ними: *FB=AB, BC=BD* и *∠FBC=d+∠ABC=∠ABD.* Но SABD **= 1/2 *SBJLD***, так как у треугольника *ABD* и прямоугольника *BJLD* общее основание *BD* и общая высота *LD.* Аналогично SFBC=l/2 *SABFH (BF* — общее основание, *АВ* — общая высота). Отсюда учитывая, что *SABD=SFBC,* имеем *SBJLD= SABFH.* Аналогично, используя равенство треугольников *ВСК* и *АСЕ,* доказывается, что *SiCEL=SACKG.* Итак, *SABFH+SACKG=SBJLD+SJCEL= SBCED,* что и требовалось доказать. Доказательство Евклида в сравнении древнекитайским или древнеиндийским выглядит чрезмерно сложным. По этой причине его нередко называли «ходульным» и «надуманным». Но такое мнение поверхностно. Теорема Пифагора у Евклида является заключительным звеном в цепи предложений 1-й книги «Начал». Для того чтобы логически безупречно построить эту цепь, чтобы каждый шаг доказательства был основан на ранее доказанных предложениях, Евклиду нужен был именно выбранный им путь.



Алгебраическое доказательство

Пусть *ABC* — данный прямоугольный *с*

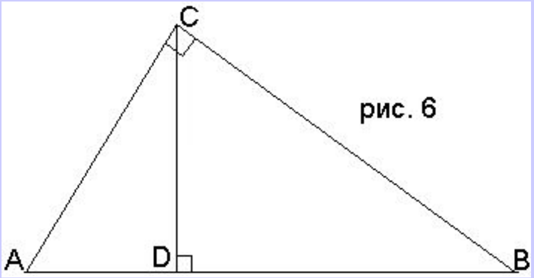
треугольник с прямым углом С. Проведем высоту *CD* из вершины прямого угла С *{рис.* 6).

По определению косинуса угла (косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе) *cosA=AD/AC=AC/AB.* Отсюда *ABxAD=AC* AC.*

Аналогично *cosB=BD/BC=BC/AB.* Отсюда *ABxBD=BC*BC.*

Складывая полученные равенства почленно, и замечая, что *AD+DB=AB,* получим:

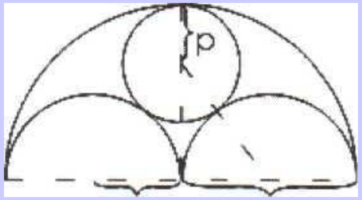
*AC*AC+BC*BC=AB(AD + DB)=AB*AB.* Теорема доказана.



Применение
1.1. Строительство

Окно

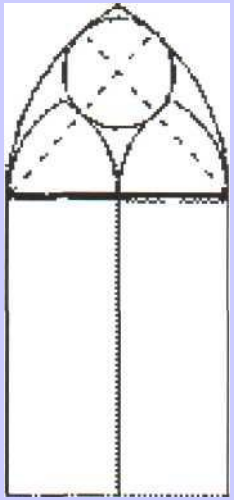
r=b/4   R=b/2В романской архитектуре часто встречается мотив представленный на рисунке. Если *Ь* по-прежнему обозначает, ширину окна, то радиусы полуокружностей будут равны $R=b/2$ и $r=b/4$. Радиусу внутренней окружности можно вычислить из прямоугольного треугольника, изображенного на рис. пунктиром. Гипотенуза этого треугольника, проходящая через точку касания окружностей, равна $b/4+p$, один катет равен $b/4$, а другой $b/2-p$.



По теореме Пифагора имеем: $(b/4+p)=(b/4)+(b/4-p)$ или $b/16+b*p/2+p=b/16+b/4-b*p+p$, откуда $b*p/2=b/4-b*p$.

Разделив на Ъ и приводя подобные члены, получим:

$(3/2)p=b/4, p=b/6$.



В зданиях готического и романского стиля верхние части окон расчленяются каменными ребрами, которые не только играют роль орнамента, но и способствуют прочности окон. На рисунке представлен простой пример такого окна в готическом стиле. Способ построения его очень прост: из рисунка легко найти центры шести дуг окружностей, радиусы которых равны ширине окна *(Ь)* для наружных дуг и половине ширины (Ь/2), для внутренних дуг. Остается еще полная окружность, касающаяся четырех дуг. Так как она заключена между двумя концентрическими окружностями, то ее диаметр равен расстоянию между этими окружностями, т. е. *Ь/2* и, следовательно, радиус равен *Ь/4.* Тогда становится ясным и положение ее центра. В рассмотренном примере радиусы находились без всяких затруднений.

Применение
1.1. Строительство

Крыша

В доме задумано построить двускатную крышу (форма в сечении). Какой длины должны быть стропила, если изготовлены балки *AC=8* м, и *AB=BF.*

Решение:

Треугольник *ADC*— равнобедренный *AB=BC=4* м, *BF=4* м, Если предположить, что *FD=1,5 м,* тогда:

А) Из треугольника *DBC:DB=2,5 м* DC=√4*4-2,5*2,5=√16+6,25=√22,25≈4,7

Б) Из треугольника *ABF:* AF=√l6+16=√32≈5,7

Молниеотвод

Молниеотвод защищает от молнии все предметы, расстояние до которых от его основания не превышает его удвоенной высоты. *Определить оптимальное положение молниеотвода на двускатной крыше, обеспечивающее наименьшую его доступную высоту.*

Решение:

По теореме Пифагора *h*h>a*a+b*b,* значит *h>√(a*a+b*b) Ответ: h>√(a*a+b*b)*

Применение
1.2. Астрономия

Пусть световой луч проходит путь от точки А к точке В. *Какой путь проходит луч?* Поскольку свет идет туда и обратно одинаковый путь, возникает вопрос: чему равна половина пути, который проходит луч? Если обозначить отрезок *АВ* символом /, половину времени как *t,* а также обозначив скорость движения света буквой с, то уравнение примет вид:

c X *t* = *l*

Это произведение затраченного времени на скорость.

Попробуем взглянуть на то же явление из другой системы отсчета, например, из космического корабля, пролетающего мимо бегающего луча со скоростью v. При таком наблюдении скорости всех тел изменятся, причем неподвижные тела станут двигаться со скоростью v в противоположную сторону. Предположим, что корабль движется влево. Тогда две точки, между которыми бегает зайчик, станут двигаться вправо с той же скоростью. Причем, в то время, пока зайчик пробегает свой путь, исходная точка *А* смещается и луч возвращается уже в новую точку С.

Вопрос: на сколько успеет сместиться точка, чтобы превратиться в точку С, пока путешествует световой луч, то есть спросим о половине данного смещения. Если обозначить половину времени путешествия луча буквой *t',* а половину расстояния *АС* буквой *d,* то получим наше уравнение в виде:

v t' = d*

Буквой v обозначена скорость движения космического корабля.

Другой вопрос: какой путь при этом пройдет луч света? Чему равна половина этого пути? Чему равно расстояние до неизвестного объекта? Если обозначить половину длины пути света буквой *s,* получим уравнение:

*c*t'=s*

Здесь *с* — это скорость света, *at'* — это тоже время, которые было рассмотрено формулой выше. Теперь рассмотрим треугольник *ABC.* Это равнобедренный треугольник, высота которого равна /, которое было введено при рассмотрении процесса с неподвижной точки зрения. Поскольку движение происходит перпендикулярно /, то оно не могло повлиять не нее. Треугольник *ABC* составлен из двух половинок — одинаковы прямоугольных треугольников, гипотенузы которых *АВ* и *ВС* должны быть связаны с катетами по теореме Пифагора. Один из катетов — это *d,* который был рассчитан только что, а второй катет — это *s,* который проходит свет, и который тоже рассчитали. Получаем уравнение: *s*s* =l*l + *d*d..*

Применение
1.3. Мобильная связь

В настоящее время на рынке мобильной связи идет большая конкуренция среди операторов. Чем надежнее связь, чем больше зона покрытия, тем больше потребителей у оператора. При строительстве вышки (антенны) часто приходится решать задачу: *какую наибольшую высоту должна иметь антенна, чтобы передачу можно было принимать в определенном радиусе (например, радиусе R=200 км, если известно, что радиус Земли равен 6380 км).*

Решение:

Пусть *AB=x, BC=R=200* км, OC=r=6380 км. *OB=OA+AB,* следовательно: *OB=r+x.*

Используя теорему Пифагора, получим ответ 2,3 км.

Заключение

Важность теоремы состоит, прежде всего, в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии. К сожалению, невозможно привести все или даже самые красивые доказательства теоремы, однако приведенные примеры убедительно свидетельствуют об огромном интересе сегодня, да и вчера, проявляемом по отношению к ней.

Литература

1. Акимова С. Занимательная математика Санкт-Петербург.: «Тригон», 1997.
2. Геометрия 7-9: Учебник для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, СБ. Кадомцев и др.-12-е изд.-М.: «Просвещение», 2002.
3. Глейзер Г.И. История математики в школе. - М.: «Просвещение», 1981.
4. Еленьский Ш. По следам Пифагора, М., 1961.
5. Журнал «Математика в школе» № 4, 1991.
6. Литцман В. Теорема Пифагора. М., 1960.
7. Скопец З.А. Геометрические миниатюры. М., 1990.
8. Энциклопедический словарь юного математика/ Сост. А.П. Савин.- 3-е изд., испр. и доп. - М.: Педагогика-Пресс, 1997.
9. Энциклопедия для детей. Т.П. Математика /Главный редактор М.Д. Аксенова. - М.: «Аванта+»,1998.
10. Я познаю мир: Детская энциклопедия: Математика. - М., 1997.