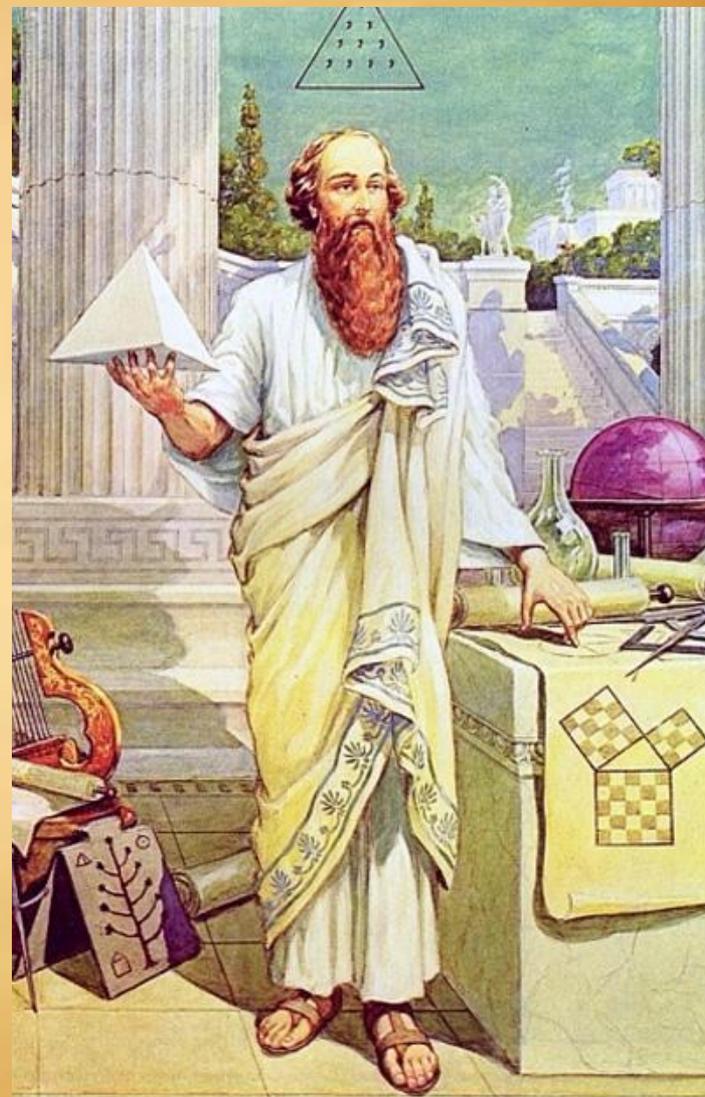


Теорема Пифагора

"Заслугой первых греческих математиков, таких как Фалес, Пифагор и пифагорейцы, является не открытие математики, но ее систематизация и обоснование. В их руках вычислительные рецепты, основанные на смутных представлениях, превратились в точную науку."



Содержание

- История теоремы
- Формулировка теоремы
- Доказательства теоремы
- Значение теоремы Пифагора

История теоремы

- Исторический обзор начнем с **древнего Китая**. Здесь особое внимание привлекает математическая книга Чупей. В этом сочинении так говорится о пифагоровом треугольнике со сторонами 3, 4 и 5:
- *"Если прямой угол разложить на составные части, то линия, соединяющая концы его сторон, будет 5, когда основание есть 3, а высота 4"*.
- В этой же книге предложен рисунок, который совпадает с одним из чертежей индусской геометрии Басхары.

Кантор (крупнейший немецкий историк математики) считает, что равенство

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

было известно уже египтянам еще около 2300 г. до н. э., во времена царя **Аменемхета I** (согласно папирусу 6619 Берлинского музея).

По мнению Кантора *гарпедонапты*, или "натягиватели веревок", строили прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5.

Очень легко можно воспроизвести их способ построения. Возьмем веревку длиной в 12 м. и привяжем к ней по цветной полоске на расстоянии 3 м. от одного конца и 4 метра от другого . Прямой угол окажется заключенным между сторонами длиной в 3 и 4 метра.

Гарпедонаптам можно было бы возразить, что их способ построения становится излишним, если воспользоваться, например, деревянным угольником, применяемым всеми плотниками. И действительно, известны египетские рисунки, на которых встречается такой инструмент, например рисунки, изображающие столярную мастерскую.



- Несколько больше известно о теореме Пифагора у вавилонян. В одном тексте, относимом ко времени Хаммураби, т. е. к 2000 г. до н. э., приводится приближенное вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника. Отсюда можно сделать вывод, что в Двуречье умели производить вычисления с прямоугольными треугольниками, по крайней мере в некоторых случаях. Основываясь, с одной стороны, на сегодняшнем уровне знаний о египетской и вавилонской математике, а с другой - на критическом изучении греческих источников, Ван-дер-Варден (голландский математик) сделал следующий вывод:

Формулировка теоремы

Во времена Пифагора теорема звучала так:

✓ « Доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах»

или

✓ « Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах».

Современная формулировка

« В прямоугольном треугольнике
квадрат гипотенузы равен
сумме квадратов катетов».

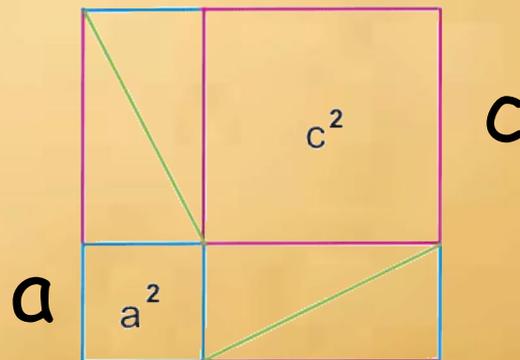
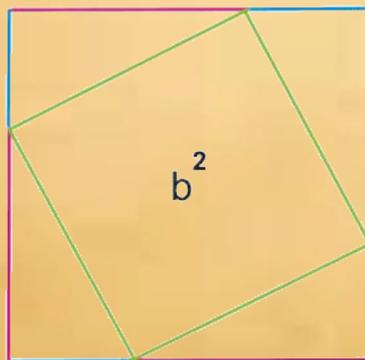
Доказательства теоремы

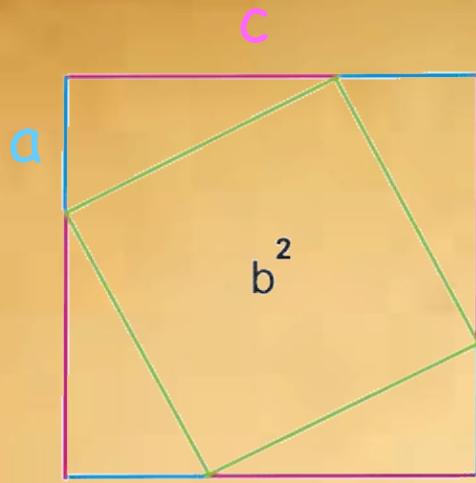
Существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.).

I.

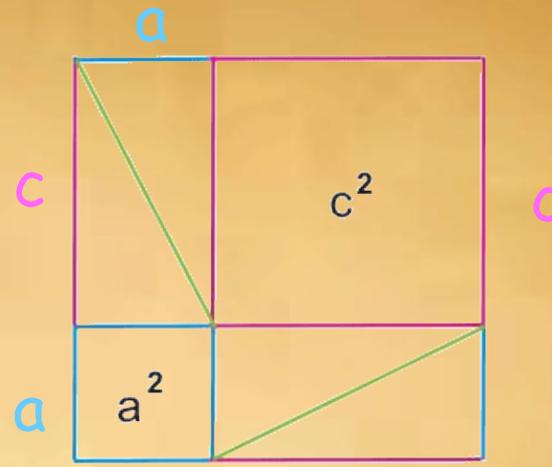
Самое простое доказательство

Рассмотрим квадрат,
показанный на
рисунке.
Сторона квадрата
равна $a + c$.





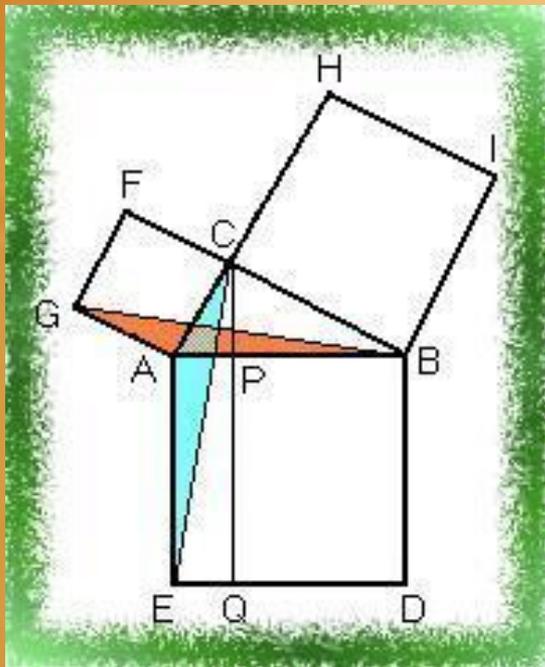
В одном случае (слева) квадрат разбит на квадрат со стороной b и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и c .



В другом случае (справа) квадрат разбит на два квадрата со сторонами a и c и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и c .

Таким образом, получаем, что площадь квадрата со стороной b равна сумме площадей квадратов со сторонами a и c .

II. Доказательство Евклида

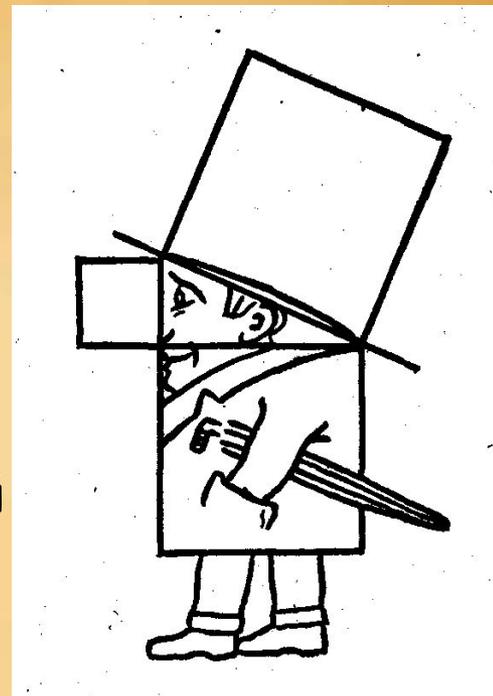


Дано:

ABC -прямоугольный
треугольник

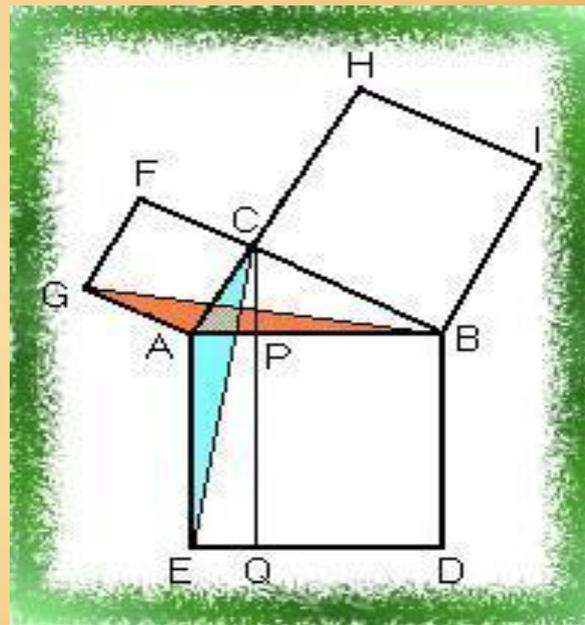
Доказать:

$$S_{ABDE} = S_{ACFG} + S_{BCHI}$$



Доказательство:

Пусть $ABDE$ -квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника ABC , а $ACFG$ и $BCHI$ -квадраты, построенные на его катетах. Опустим из вершины C прямого угла перпендикуляр CP на гипотенузу и продолжим его до пересечения со стороной DE квадрата $ABDE$ в точке Q ; соединим точки C и E , B и G .

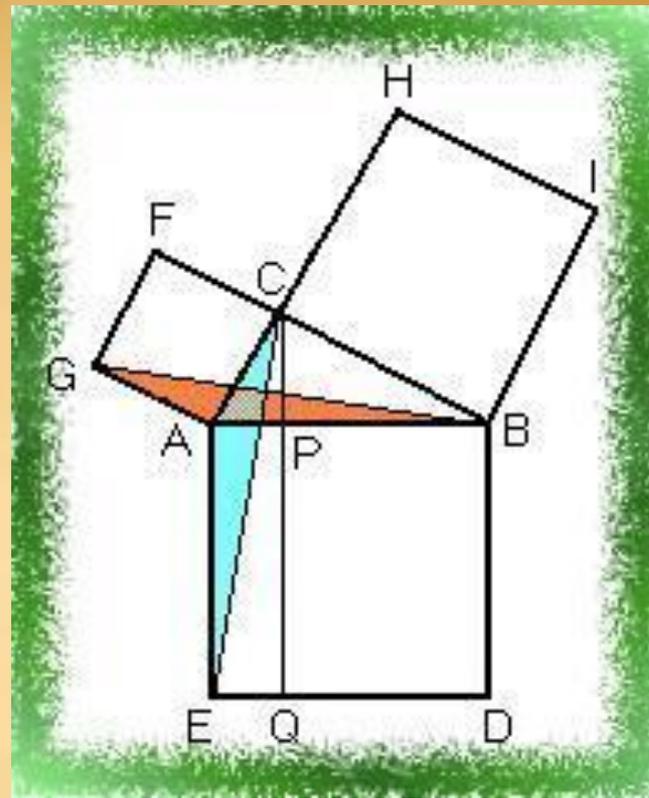


Очевидно, что углы $\angle CAE = \angle GAB (= A + 90^\circ)$; отсюда следует, что треугольники $\triangle ACE$ и $\triangle AGB$ (закрашенные на рисунке) равны между собой (по двум сторонам и углу, заключённому между ними). Сравним далее треугольник $\triangle ACE$ и прямоугольник $PQEA$; они имеют общее основание AE и высоту AP , опущенную на это основание, следовательно

$$S_{PQEA} = 2S_{ACE}$$

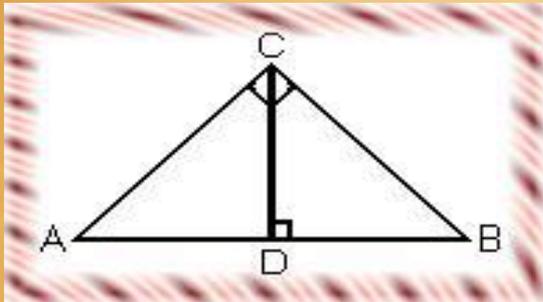
Точно так же квадрат $FCAG$ и треугольник $\triangle BAG$ имеют общее основание GA и высоту AC ; значит,

$$S_{FCAG} = 2S_{GAB}$$



Отсюда и из равенства треугольников $\triangle ACE$ и $\triangle GBA$ вытекает равновеликость прямоугольника $QPBD$ и квадрата $FCGA$; аналогично доказывается и равновеликость прямоугольника $QPAE$ и квадрата $CHIB$. А отсюда, следует что квадрат $ABDE$ равновелик сумме квадратов $ACFG$ и $BCHI$, т.е. теорема Пифагора.

III. Алгебраическое доказательство



Дано: ABC -прямоугольный
треугольник

Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Доказательство:

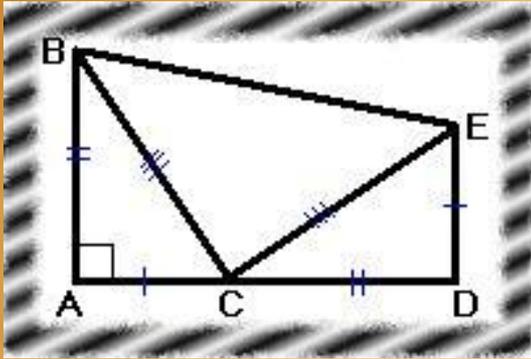
- 1) Проведем высоту CD из вершины прямого угла C .
- 2) По определению косинуса угла $\cos A = AD/AC = AC/AB$, отсюда следует $AB \cdot AD = AC^2$.
- 3) Аналогично $\cos B = BD/BC = BC/AB$, значит $AB \cdot BD = BC^2$.
- 4) Сложив полученные равенства почленно, получим:
 $AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB)$
 $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Что и требовалось доказать.

IV.

Геометрическое

доказательство



Дано: ABC -прямоугольный
треугольник

Доказать: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Доказательство:

1) Построим отрезок CD равный отрезку AB на продолжении катета AC прямоугольного треугольника ABC . Затем опустим перпендикуляр ED к отрезку AD , равный отрезку AC , соединим точки B и E .

2) Площадь фигуры $ABED$ можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED} = 2 \cdot AB \cdot AC / 2 + BC^2 / 2$$

3) Фигура $ABED$ является трапецией, значит, её площадь равна:

$$S_{ABED} = (DE + AB) \cdot AD / 2.$$

4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (DE + AB)(CD + AC) / 2$$

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (AC + AB)^2 / 2$$

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = AC^2 / 2 + AB^2 / 2 + AB \cdot AC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Это доказательство было опубликовано в 1882 году Гэрфилдом.

Значение теоремы Пифагора

Теорема Пифагора- это одна из самых важных теорем геометрии. Значение её состоит в том, что из неё или с её помощью можно вывести большинство теорем геометрии.

В средние века теорема Пифагора, *magister matheseos*, определяла границу если не наибольших возможных, то по крайней мере хороших математических знаний. Характерный чертёж теоремы Пифагора, который ныне иногда превращается школьниками, например, в облаченного в мантию профессора (рис. 7, 8) или в человечка в цилиндре (рис. 9) и т.п., в те времена всеобщей страсти к символам нередко употреблялся как символ математики. Столь же часто мы встречаемся с «Пифагором» в средневековой живописи, мозаике, геральдике.

