

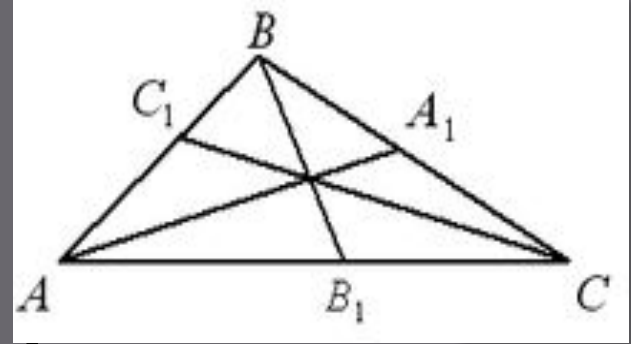
# ТЕОРЕМЫ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ

Подготовила  
Ученица 8 класса «Б»  
Шебанкова Марина

# Биография ученого

Чева (Джованни) — итальянский математик. Умер в 1734 г. Главными предметами его занятий были геометрия и механика. Он написал много сочинений. Самым замечательным из них было первое "*De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*" (Милан, 1678); . В первой его части автор доказывает теорему Менелая и ряд сходных с нею теорем при помощи статического метода, основанного на свойствах центра тяжести системы точек.

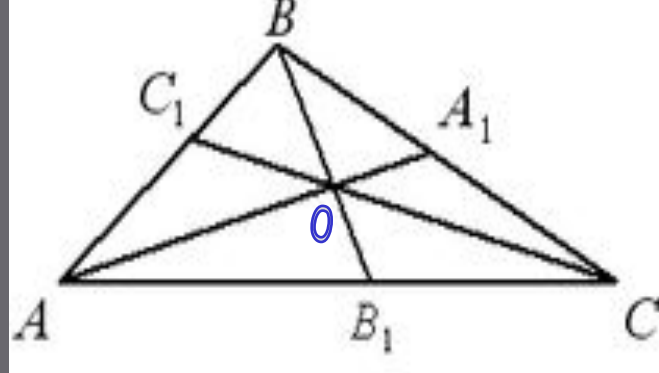
# Теорема Чебы



- Если на сторонах АВ, ВС и СА треугольника АВС взяты соответственно точки С1, А1 и В1, то отрезки АА1, ВВ1 и СС1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

- $$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{AC_1} = 1 \quad (1)$$

# Доказательство. 1.



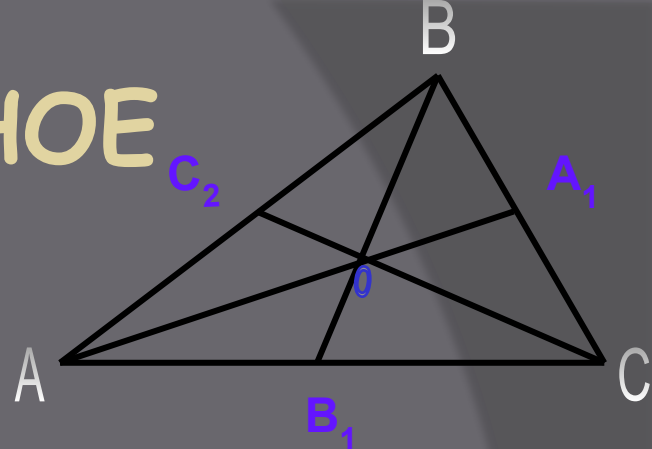
- Пусть отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ . Докажем, что  $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{AC_1} = 1$
- По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике имеем:
- $\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} * \left(1 + \frac{CA_1}{A_1B}\right)$  и  $\frac{AO}{OA_1} = \frac{C_1A}{BC_1} * \left(1 + \frac{A_1B}{CA_1}\right)$
- Левые части этих равенств одинаковы, значит, равны и правые части. Приравнявая их, получаем

$$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{BC}{CA_1} = \frac{C_1A}{BC_1} * \frac{BC}{CA_1}$$

Разделив обе части на правую часть, приходим к равенству (1)

# УТВЕРЖДЕНИЕ ОБРАТНОЕ ТЕОРЕМЕ.

Пусть для точек  $A_1, B_1, C_1$ , взятых на соответствующих сторонах треугольника  $ABC$ ,



Выполняется равенство (1). Докажем, что отрезки  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке. Обозначим точку пересечения отрезков  $AA_1$  и  $BB_1$  через  $O$  и проведем прямую  $CO$ . Она пересекает сторону  $AB$  в точке  $C_2$ . Т.к. отрезки  $AA_1, BB_1$  и  $CC_2$  пересекаются в одной точке, то на основании доказанного в первом пункте

$$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_2}{C_2A} = 1 \quad (2)$$

Итак, имеют место равенства (1) и (2)

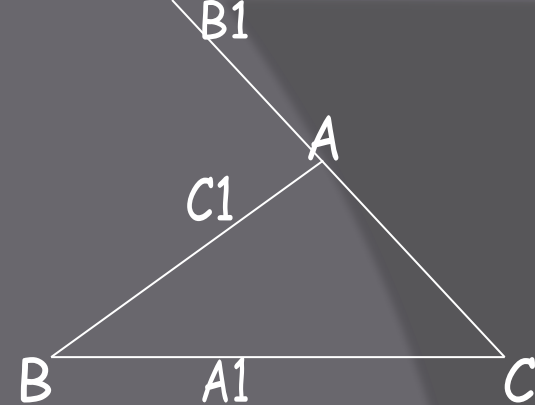
Сопоставляя их, приходим к равенству  $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC_2}{C_2A}$ , которое показывает, что точки  $C_1$  и  $C_2$  совпадают, и, значит, отрезки  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ . Теорема доказана.

# Биография ученого

- **Менелай** Александрийский (Menélaos), древнегреческий астроном и математик (1 в.). Автор работ по сферической тригонометрии: 6 книг о вычислении хорд и 3 книги «Сферики» (сохранились в арабском переводе). Тригонометрия у Менелая отделена от геометрии и астрономии. Арабские авторы упоминают также о книге Менелая по гидростатике.

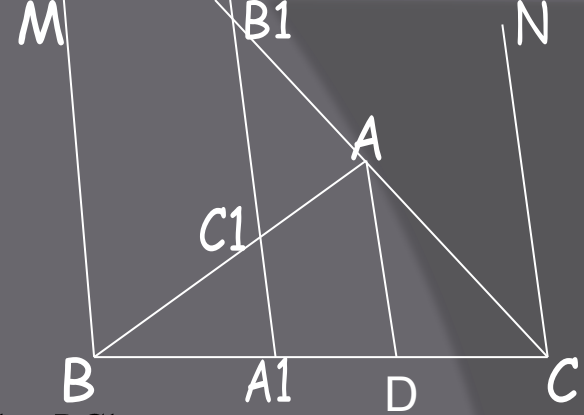
# Теорема Менелая

Если на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и продолжении  $AC$  треугольника  $ABC$  соответственно взяты точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ , то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда



$$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \quad (3)$$

# Доказательство.1.



Пусть точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой. Докажем, что  $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

Проведем прямые  $AD$ ,  $BM$  и  $CN$  параллельно прямой  $B_1A_1$ . Согласно обобщению теоремы Фалеса имеем:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{DA_1}{A_1C} \quad \text{и} \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BA_1}{A_1D}$$

Перемножая левые и правые части этих равенств, получаем:

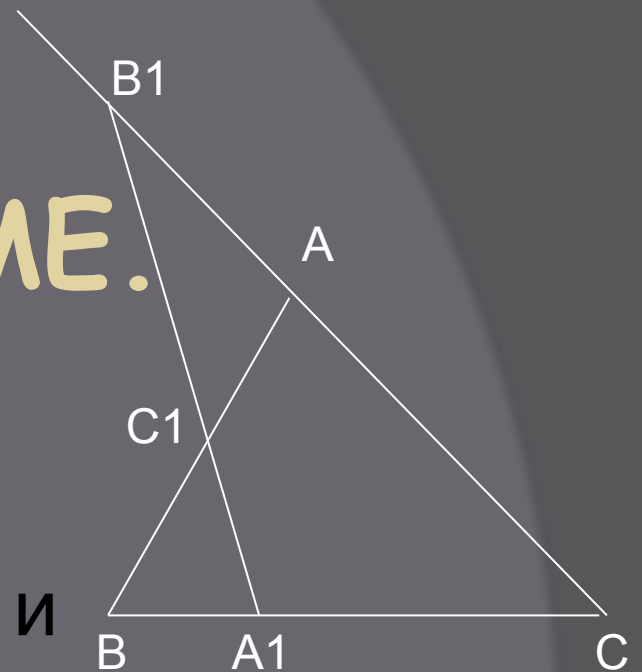
$$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{A_1B}{CA_1}, \quad \text{откуда} \quad \frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$



# УТВЕРЖДЕНИЕ ОБРАТНОЕ ТЕОРЕМЕ.

- Пусть точка  $B_1$  взята на продолжении стороны  $AC$ , а точки  $C_1$  и  $A_1$  на сторонах  $AB$  и  $BC$ , причем так, что выполнено равенство  $\frac{AA_1}{A_1B} * \frac{BA_1}{A_1C} * \frac{AC_1}{C_1B} = 1$ .

Докажем, что точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой.



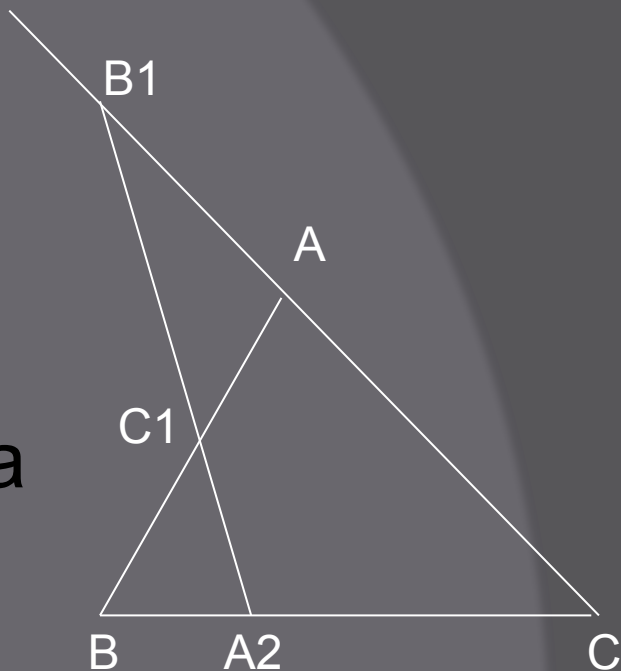
# Доказательство.

Прямая  $B_1C_1$  пересекает сторону  $BC$  в некоторой точке  $A_2$ . Т.к. точки  $B_1, C_1$  и  $A_2$  лежат на одной прямой, то по теореме

Менелая 
$$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_2}{A_2B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \quad (4)$$

Сопоставляя (3) и (4), приходим к равенству  $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA_2}{A_2B}$ , которое показывает, что точки  $A_1$  и  $A_2$

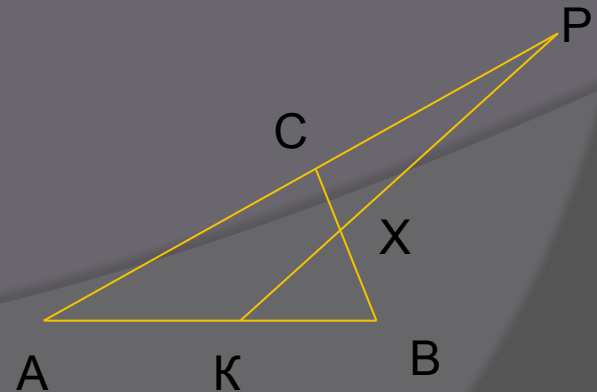
делят сторону  $BC$  в одном и том же отношении. Следовательно, точки  $A_1$  и  $A_2$  совпадают, и, значит, точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой.



# Задача.1

Дано: точка  $K$  делит сторону  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB=AC$ ) в отношении  $2:1$ . Точка  $P$  лежит на продолжении  $AC$  за точку  $C$ , и  $AB=CP$ .

Найти: в каком отношении делит прямая  $PK$  сторону  $BC$ .



# Решение.

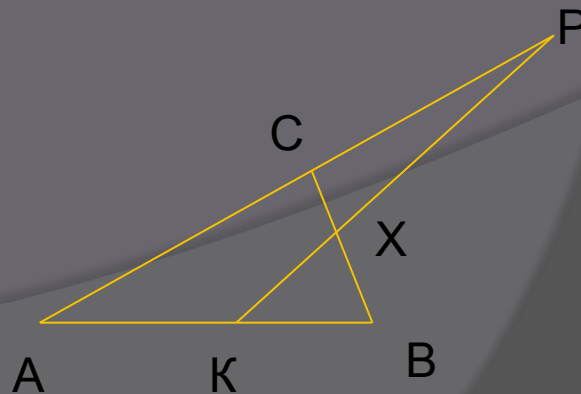
По условию

$$\frac{AK}{KB} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{CP}{PA} = \frac{1}{2}$$

Используя теорему Менелая, мы  
находим

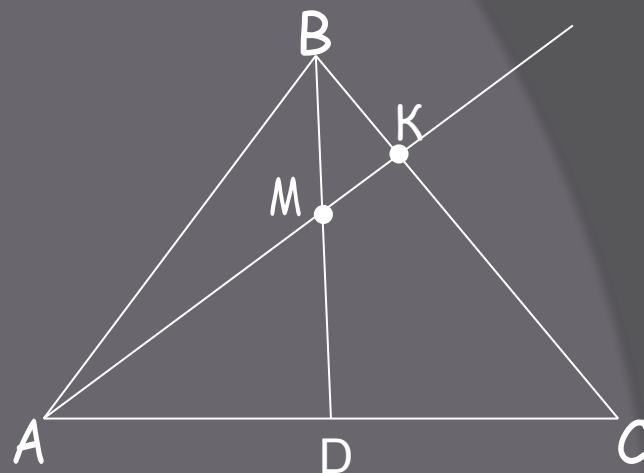
$$\frac{CP}{PA} * \frac{AK}{KB} * \frac{BX}{XC} = 1$$

$$\frac{BX}{XC} = 1$$



## Задача 2.

- На медиане  $BD$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $M$  так, что  $BM:MD=m:n$ . Прямая  $AM$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ . найдите отношение  $BK:KC$ .



# Решение.

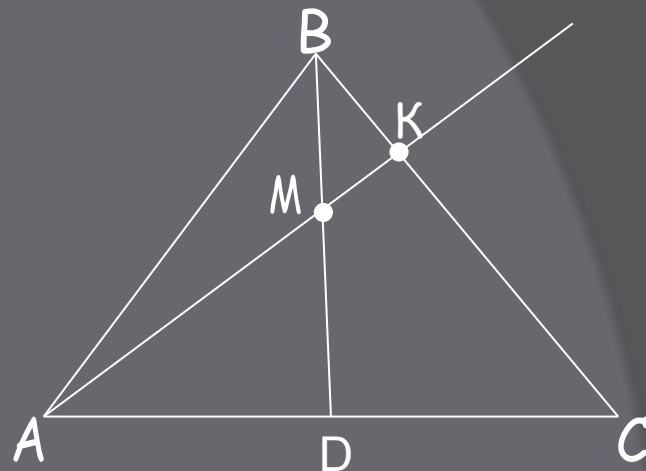
- По теореме Менелая:

$$\frac{AD}{AC} * \frac{CK}{KB} * \frac{BM}{MD} = 1$$

BM-медиана, значит  $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$

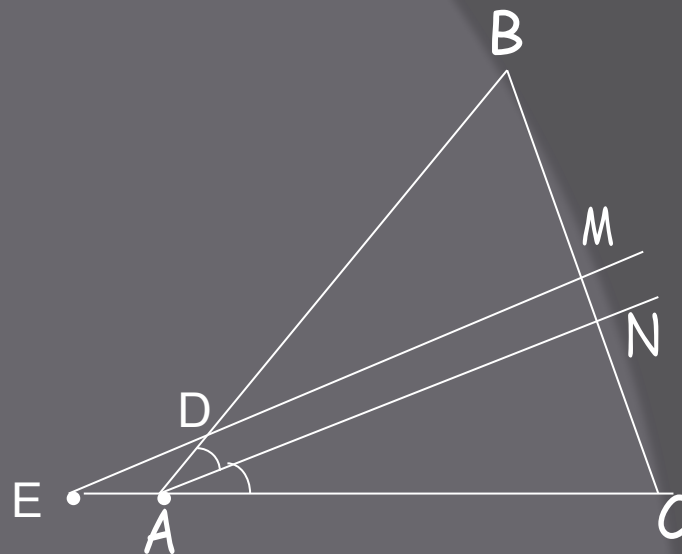
$$\frac{1}{2} * \frac{CK}{KB} * \frac{m}{n} = 1$$

$$\frac{BK}{KC} = \frac{m}{2n}$$



# Задача 3.

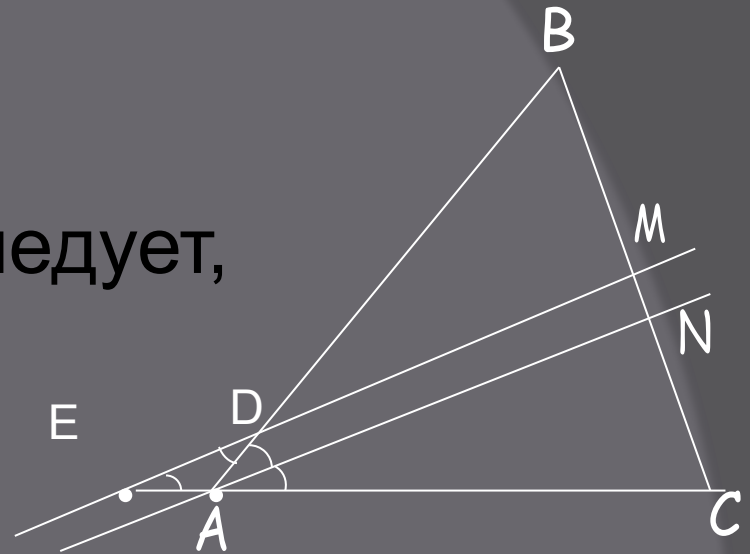
- Через середину  $M$  стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ , в котором  $AB \neq AC$ , проведена прямая, параллельная биссектрисе угла  $A$  и пересекающая прямые  $AB$  и  $AC$  соответственно в точках  $D$  и  $E$ . Докажите, что  $BD = CE$



# Решение .

- По теореме Менелая следует, что

$$\frac{AE}{EC} * \frac{CM}{MB} * \frac{BD}{DA} = 1$$



Т.к. точка М середина стороны ВС, следовательно

$$\frac{CM}{MB} = 1 \text{ . Значит } \frac{AE}{EC} = \frac{DA}{BD} .$$

AE=DA, следовательно EC=BD.