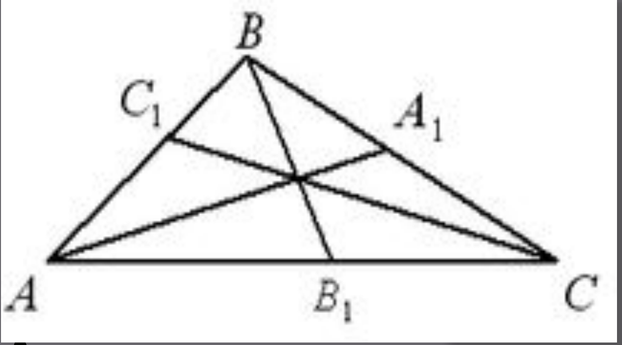
Теоремы Чевы и Менелая

Подготовила
Ученица 8 класса «Б»
Шебанкова Марина

Биография ученого

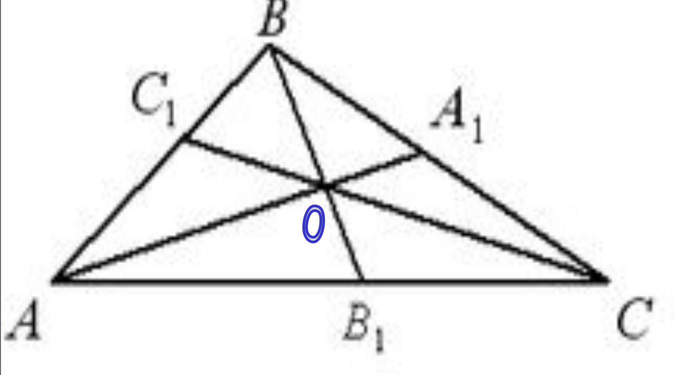
Чева (Джованни) — итальянский математик. Умер в 1734 г. Главными предметами его занятий были геометрия и механика. Он написал много сочинений. Самым замечательным из них было первое *"De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio"* (Милан, 1678); . В первой его части автор доказывает теорему Менелая и ряд сходных с нею теорем при помощи статического метода, основанного на свойствах центра тяжести системы точек.

Теорема Чевы



- Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C1, A1 и B1, то отрезки AA1, BB1 и CC1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда
- $$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{AC_1} = 1 \quad (1)$$

Доказательство.1.

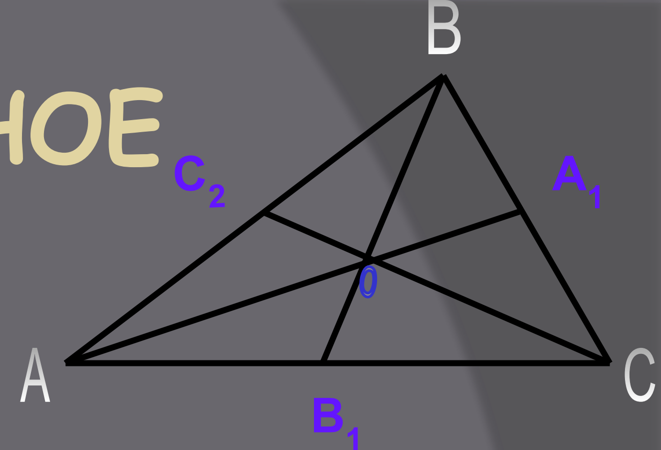


- Пусть отрезки AA1, BB1 и CC1 пересекаются в точке О. Докажем,что $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{AC_1} = 1$
- По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике имеем:
- $$\frac{AO}{OA1} = \frac{AB1}{B1C} * \left(1 + \frac{CA1}{A1B}\right) \quad \text{и} \quad \frac{AO}{OA1} = \frac{C1A}{BC1} * \left(1 + \frac{A1B}{CA1}\right)$$
- Левые части этих равенств одинаковы, значит, равны и правые части. Приравнивая их, получаем

$$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{BC}{A_1B} = \frac{C_1A}{BC_1} * \frac{BC}{CA_1}$$

Разделив обе части на правую часть,приходим к равенству (1)

Утверждение обратное теореме.



Пусть для точек *A1, B1, C1,* взятых на соответствующих сторонах треугольника *ABC,*

Выполняется равенство(1).Докажем, что отрезки *AA1,BB1,CC1* пересекаются в одной точке. Обозначим точку пересечения отрезков *AA1* и *BB1* через *O* и проведем прямую CO. Она пересекает сторону *AB* в точке C2. Т.к. отрезки AA1,BB1 и CC2 пересекаются в одной точке, то на основании доказанного в первом пункте

$$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_2}{C_2A} = 1 \qquad (2)$$

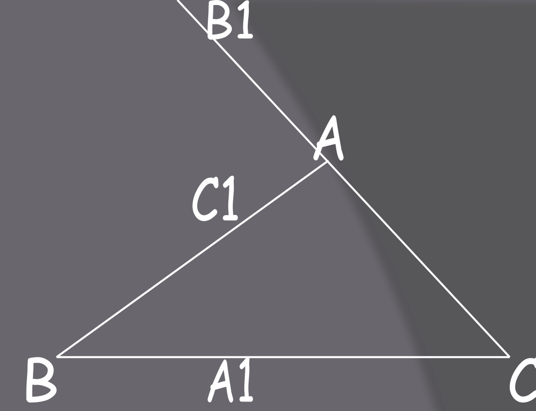
Итак, имеют место равенства (1) и (2)

Сопоставляя их, приходим к равенству $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC_2}{C_2A}$,которое показывает, что точки C1 и C2 совпадают, и, значит, отрезки AA1, BB1 и CC1 пересекаются в точке O. Теорема доказана.

Биография ученого

- **Менелай** Александрийский (Menélaos), древнегреческий астроном и математик (1 в.). Автор работ по сферической тригонометрии: 6 книг о вычислении хорд и 3 книги «Сферики» (сохранились в арабском переводе). Тригонометрия у Менелая отделена от геометрии и астрономии. Арабские авторы упоминают также о книге Менелая по гидростатике.

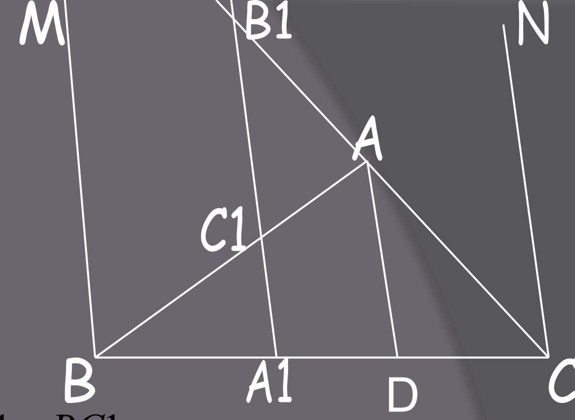
Теорема Менелая



Если на сторонах AB, BC и продолжении AC треугольника ABC соответственно взяты точки C1, A1 и B1, то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB1}{B1C} * \frac{CA1}{A1B} * \frac{BC1}{C1A} = 1 \qquad (3)$$

Доказательство.1.



Пусть точки A1, B1 и C1 лежат на одной прямой. Докажем, что $\frac{AB1}{B1C} * \frac{CA1}{A1B} * \frac{BC1}{C1A} = 1$

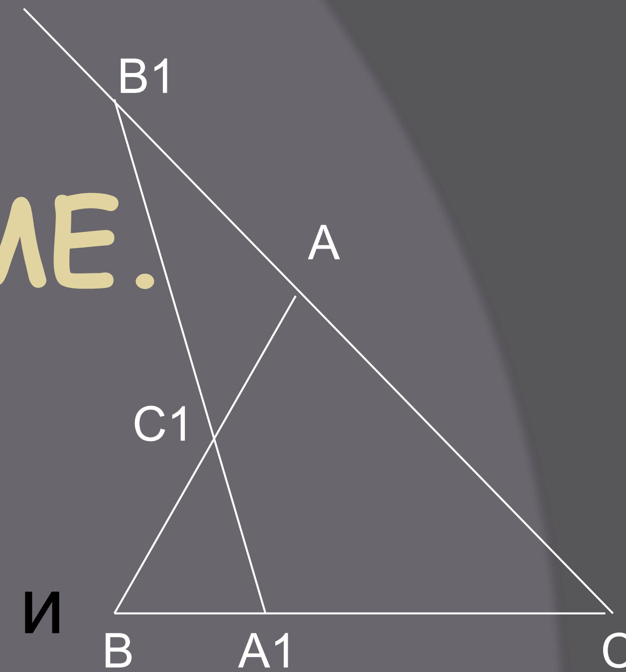
Проведем прямые AD,BM и CN параллельно прямой B1A1. Согласно обобщению теоремы Фалеса имеем:

$$\frac{AB1}{B1C} = \frac{DA1}{A1C} \quad \text{и} \quad \frac{BC1}{C1A} = \frac{BA1}{A1D}$$

Перемножая левые и правые части этих равенств, получаем:

$$\frac{AB1}{B1C} * \frac{BC1}{C1A} = \frac{A1B}{CA1}$$, откуда $$\frac{AB1}{B1C} * \frac{CA1}{A1B} * \frac{BC1}{C1A} = 1$$

Утверждение обратное теореме.



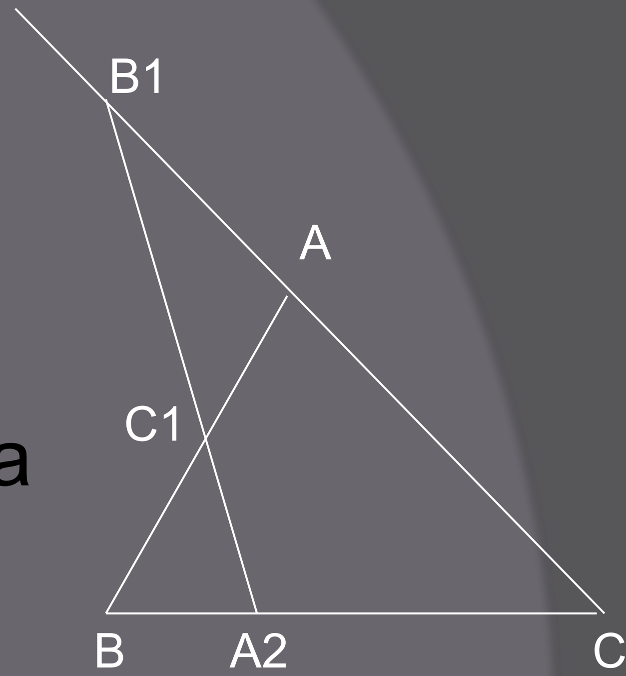
- Пусть точка B1 взята на продолжении стороны AC, а точки C1 и A1-на сторонах AB и BC, причем так, что выполнено равенство $\frac{AB1}{B1C} * \frac{CA1}{A1B} * \frac{BC1}{C1A} = 1.$

Докажем, что точки A1, B1 и C1 лежат на одной прямой.

Доказательство.

Прямая B1C1 пересекает сторону BC в некоторой точке A2.Т.к точки B1,C1 и A2 лежат на одной прямой, то по теореме Менелая $\frac{AB1}{B1C} * \frac{CA2}{A2B} * \frac{BC1}{C1A} = 1$ (4)

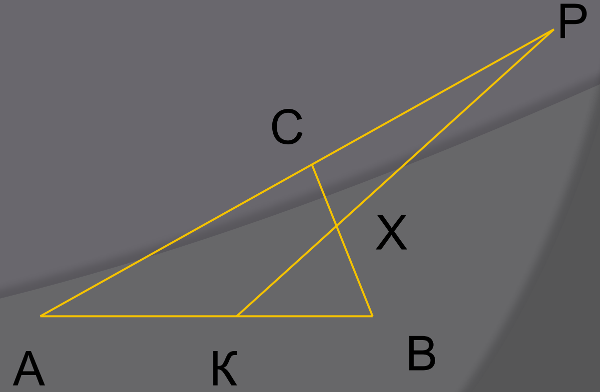
Сопоставляя (3) и (4),приходим к равенству $\frac{CA1}{A1B} = \frac{CA2}{A2B}$,которое показывает, что точки A1 и A2 делят сторону BC в одном и том же отношении.Следовательно, точки A1 и A2 совпадают, и, значит, точки A1, B1 и C1 лежат на одной прямой.



Задача.1

Дано: точка К делит сторону АВ равнобедренного треугольника АВС (АВ=АС) в отношении 2:1. Точка Р лежит на продолжении АС за точку С, и АВ=СР.

Найти: в каком отношении делит прямая РК сторону ВС.



Решение.

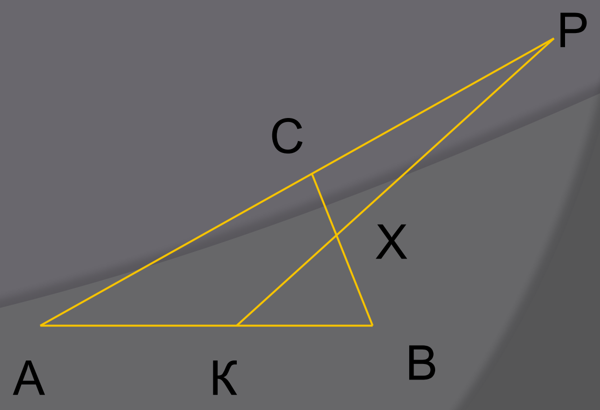
По условию

$$\frac{AK}{KB} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{CP}{PA} = \frac{1}{2}$$

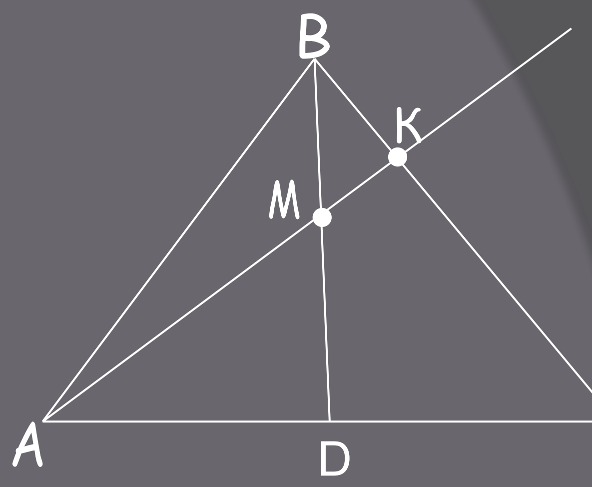
Используя теорему Менелая, мы находим

$$\frac{CP}{PA} * \frac{AK}{KB} * \frac{BX}{XC} = 1$$

$$\frac{BX}{XC} = 1$$

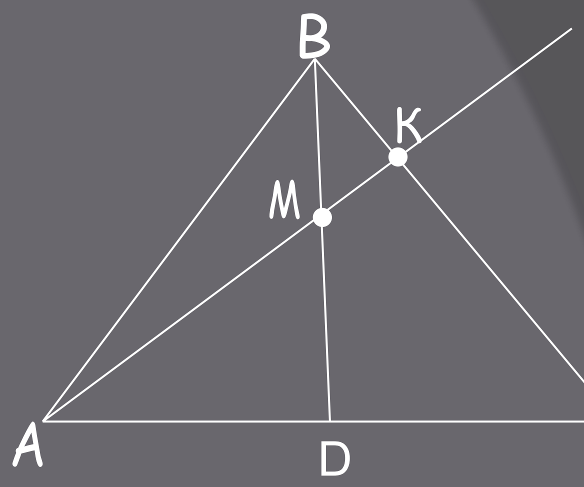


Задача 2.



- На медиане BD треугольника ABC отмечена точка M так, что BM:MD=m:n. Прямая AM пересекает сторону BC в точке K. найдите отношение BK: KC.

Решение.



- По теореме Менелая:

$$\frac{AD}{AC} * \frac{CK}{KB} * \frac{BM}{MD} = 1$$

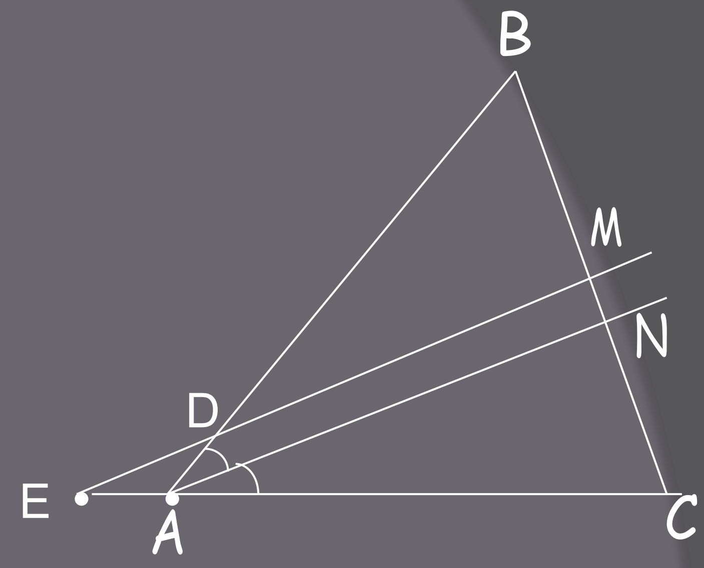
BM-медиана, значит $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} * \frac{CK}{KB} * \frac{m}{n} = 1$$

$$\frac{BK}{KC} = \frac{m}{2n}$$

Задача 3.

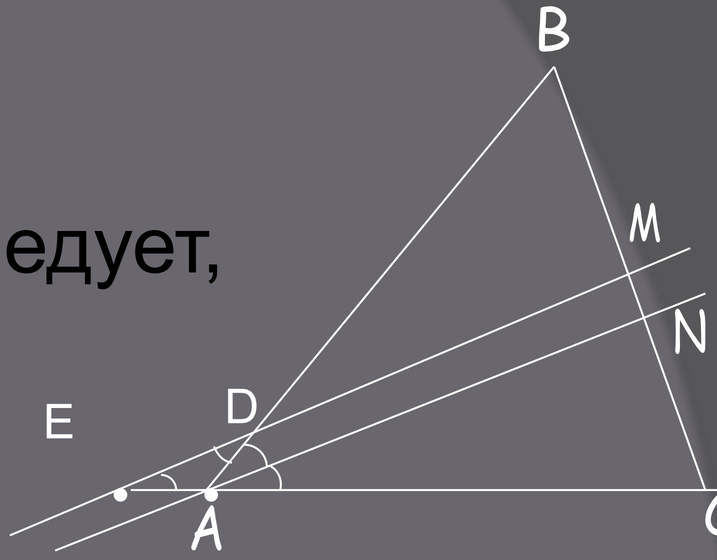
- Через середину M стороны BC треугольника ABC, в котором AB≠AC, проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A и пересекающая прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что BD=CE



Решение .

- По теореме Менелая следует, что

$$\frac{AE}{EC} * \frac{CM}{MB} * \frac{BD}{DA} = 1$$



Т.к. точка М середина стороны ВС, следовательно

$\frac{CM}{MB} = 1$.Значит $\frac{AE}{EC} = \frac{DA}{BD}$.

AE=DA,следовательно EC=BD.