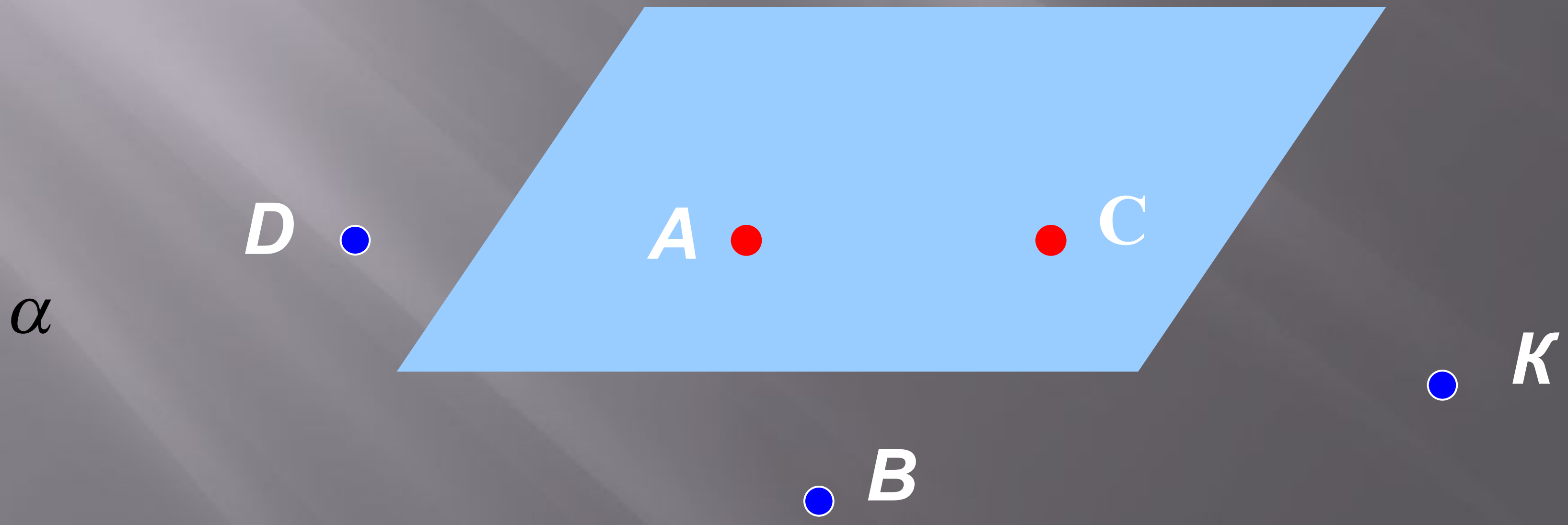
Урок по теме: «Параллельность прямых и плоскостей в пространстве.

Аксиомы группы С.

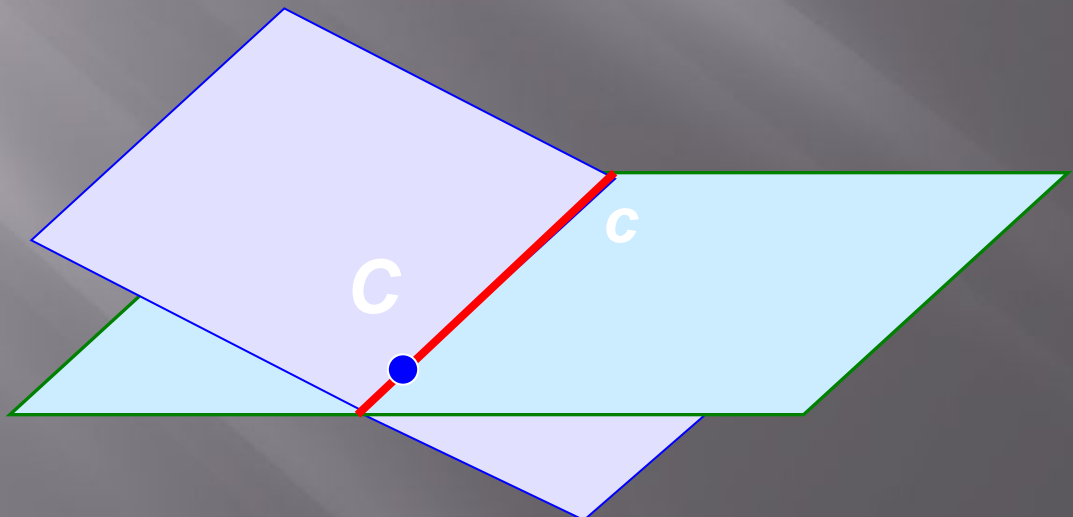
Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.



Аксиомы группы С.

Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

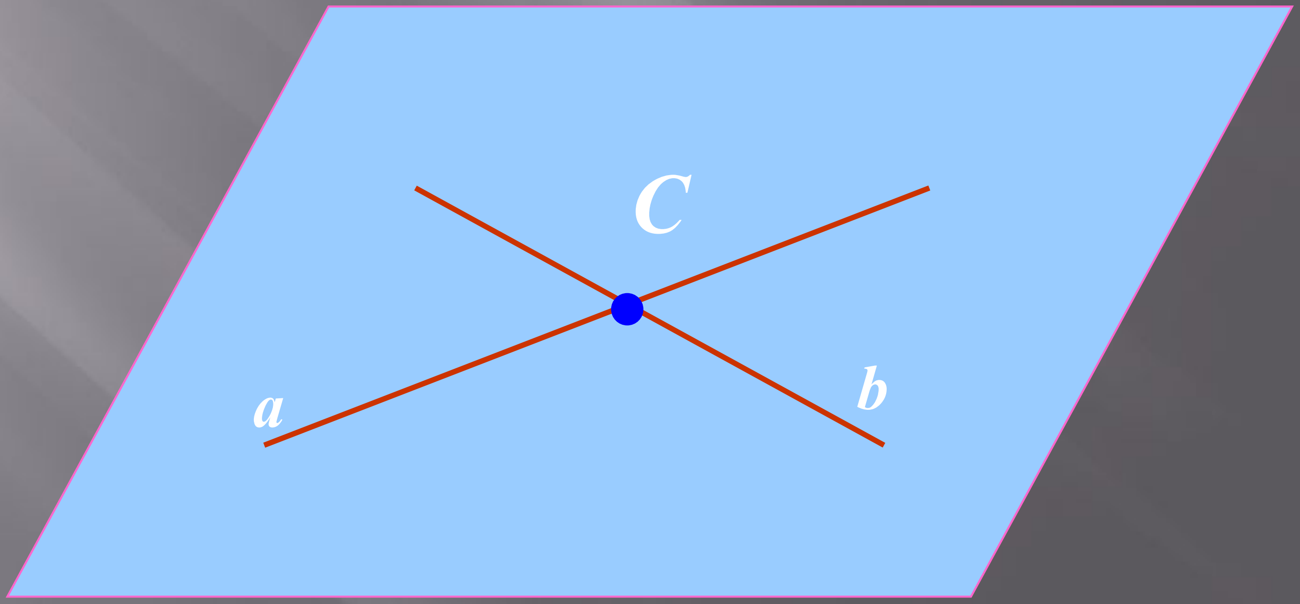
α



β

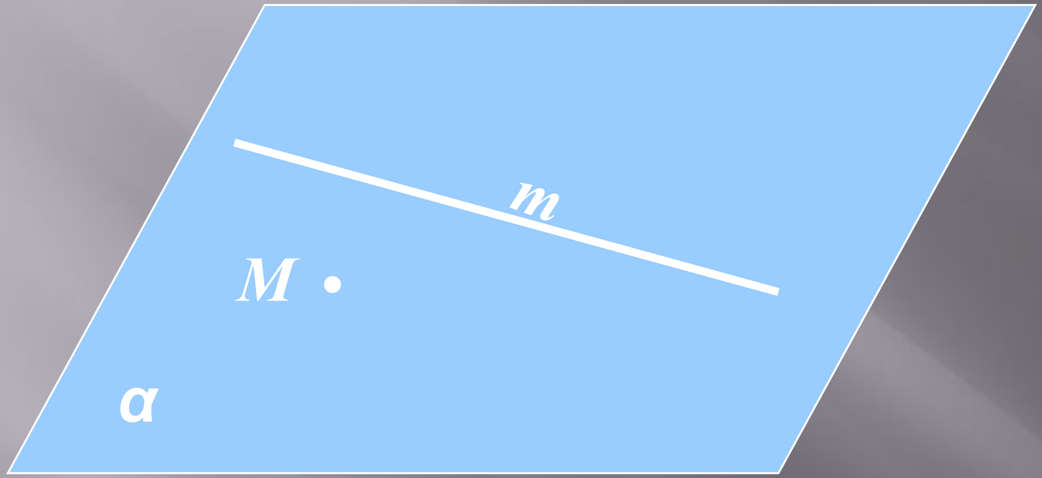
Аксиомы группы С.

Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.



γ

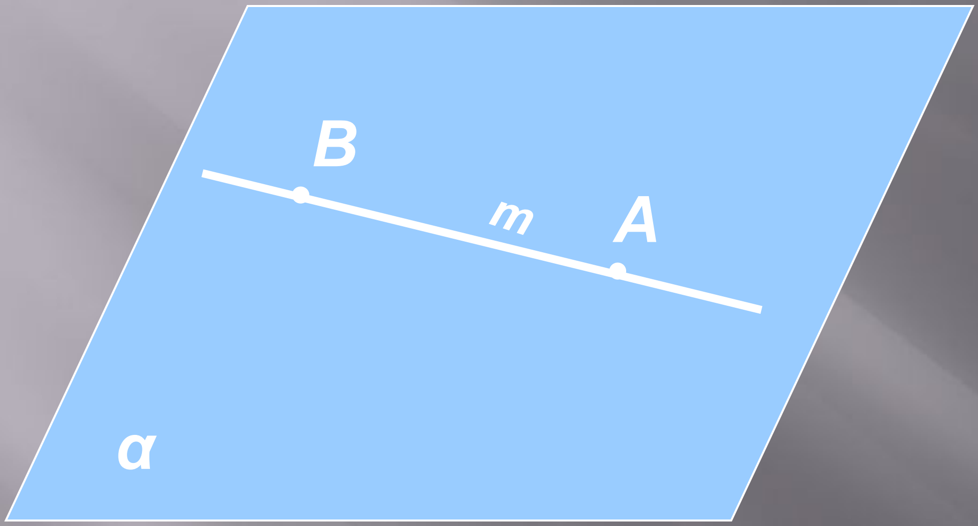
Следствия из аксиом



Через любую прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.

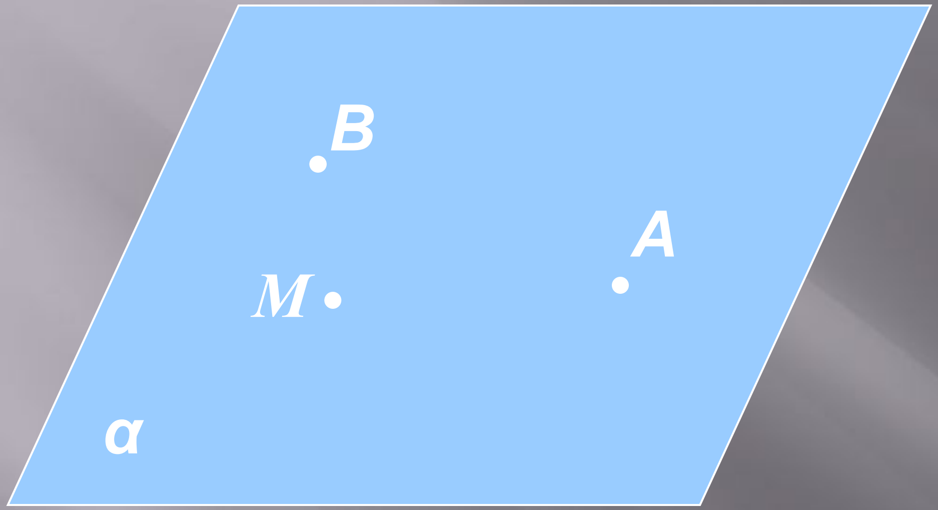
T_1

Следствия из аксиом



Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит плоскости

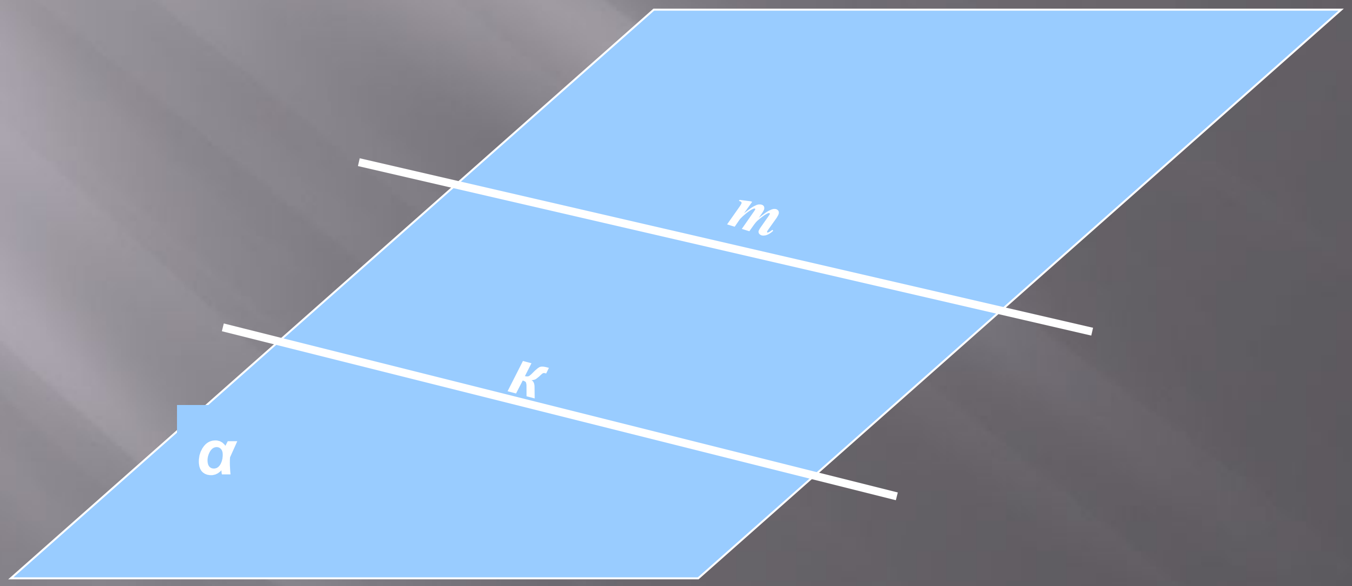
Следствия из аксиом



Через 3 точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

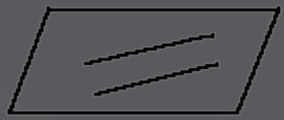
Следствие из T_1

Через две ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ прямые проходит плоскость, и притом только одна.



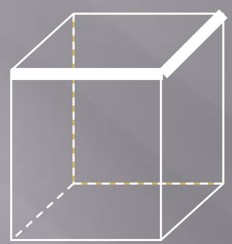
Вывод

Как в пространстве можно однозначно задать плоскость?

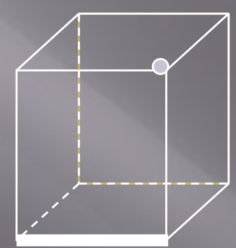
Способы задания плоскостей	*Рисунок*
1. По трем точкам	
2. По прямой и не принадлежащей ей точке.	
3. По двум пересекающимся прямым.	
4. По двум параллельным прямым.	

Ответьте на вопросы

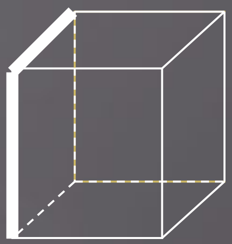
1. Сколько существует способов задания плоскости?
2. Сколько плоскостей можно провести через выделенные элементы?



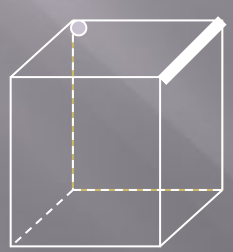
а)



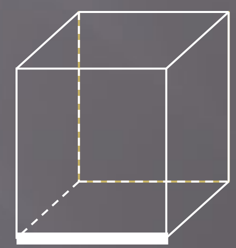
б)



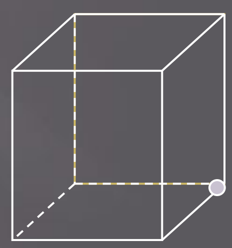
в)



г)



д)



е)

Определите: верно, ли утверждение?

1. Любые три точки лежат в одной плоскости.	Да
2. Любые четыре точки лежат в одной плоскости.	Нет
3. Любые четыре точки не лежат в одной плоскости.	Нет
4. Если прямая пересекает 2 стороны треугольника, то она лежит в плоскости треугольника.	Да
5. 5 точек не лежат в одной плоскости. Могут ли какие–нибудь 4 из них лежать на одной прямой?	Нет
6. Через середины сторон квадрата проведена плоскость. Совпадает ли она с плоскостью квадрата?	Да

Дано: ABCD-параллелограмм

A, B, C $\in \alpha$

Доказать: D $\in \alpha$

Доказательство:

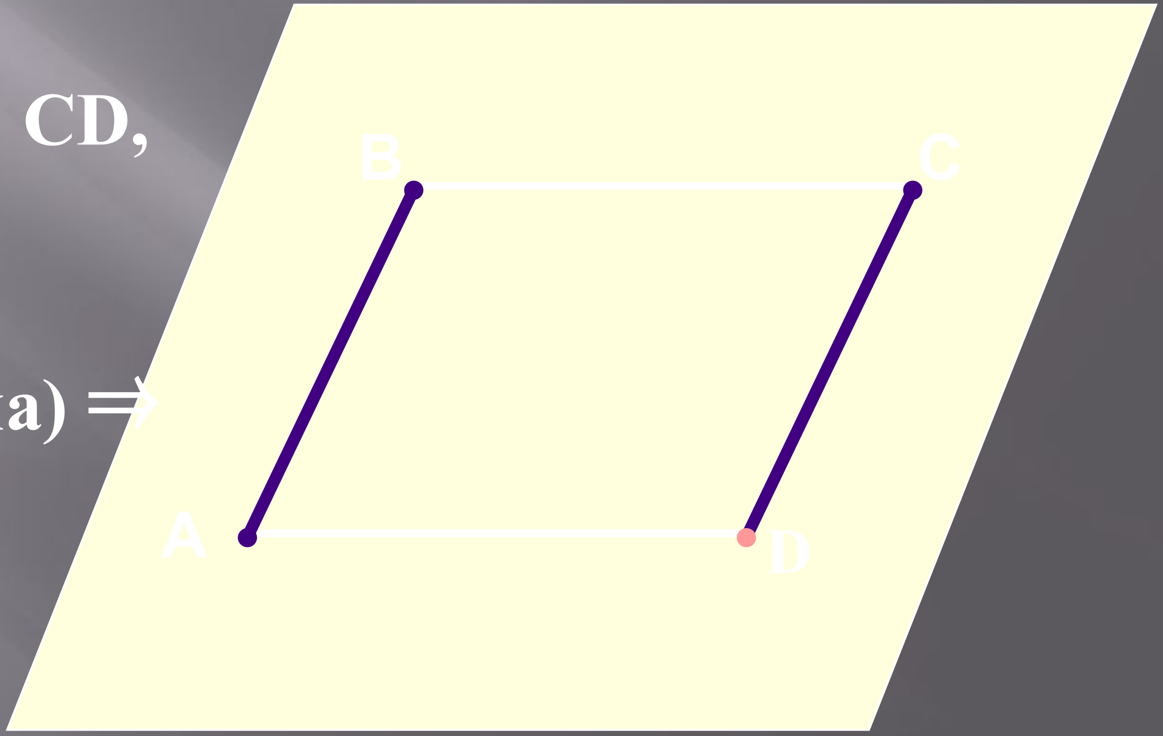
A, B $\in$ AB, C,D $\in$ CD,

AB || CD

(по определению параллелограмма) $\Rightarrow$

AB, CD $\subset \alpha \Rightarrow$

D $\in \alpha$

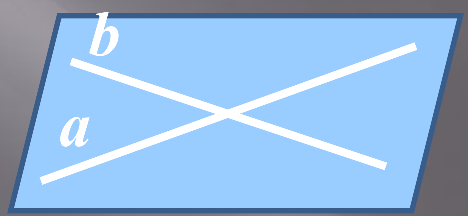


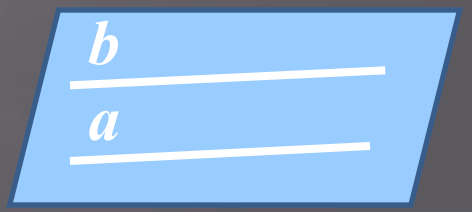
Взаимное расположение прямых в пространстве.

пересекаются

параллельны

Лежат в одной плоскости

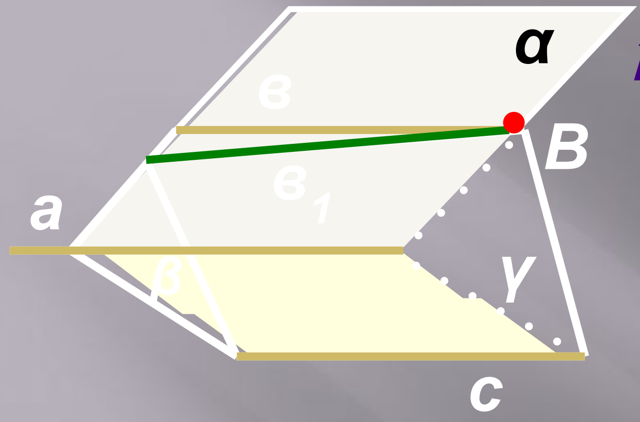




Не лежат в одной плоскости

скрещиваются

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны



Доказательство:

1 случай. $a, \text{в}, c \in \alpha$ **рассмотрен в планиметрии**

2 случай. $a, \text{в} \in \alpha$; $a, c \in \beta$

1. Возьмем т.B, B $\in \text{в}$

Через т.B и c **проведем плоскость** γ $\quad \gamma \cap \alpha = \text{в}_1$

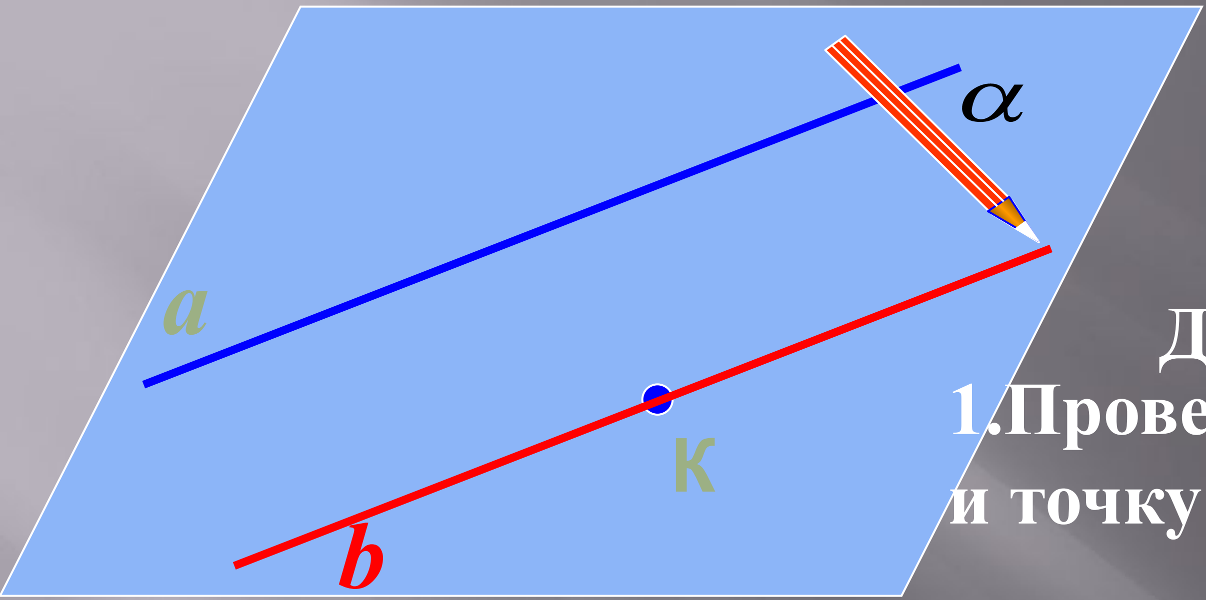
2. Если $\text{в}_1 \cap \beta = X, \Rightarrow \underline{X \in a}, \text{в}_1 \in \alpha,$

но $\underline{X \in c}$, **т.к.** $\text{в}_1 \in \gamma$, **а т.к.** $a \parallel c \Rightarrow \text{в}_1 \cancel{\cap} \beta$

3. $\text{в}_1 \in \alpha, \text{в}_1 \cancel{\cap} a \Rightarrow \text{в}_1 \parallel a \Rightarrow \text{в}_1 = \text{в}$ (*А* **параллельных прямых**)

4. $\Rightarrow \text{в} \parallel c$ **Теорема доказана.**

Теорема о параллельных прямых.



Дано: К $\notin a$

Доказать:

$\exists$! b: К $\in$ b, b $||$ a

Доказательство:

1.Проведем через прямую а и точку К плоскость α.

2.Проведем через т. К$\in$ α прямую b, b $||$ a.(А планиметрии)

<u>Единственность (от противного)</u>

1.Пусть $\exists$ b_1: К $\in$ b_1 , b_1 $||$ a .Через прямые а и b_1 можно провести плоскость α_1.

2. а , К $\in$ α_1; $\Rightarrow$ α_1 и α (Т о точке и прямой в пространстве).

3. $\Rightarrow$ $b = b_1$ (А параллельных прямых). Теорема доказана.

Задание 1 Вставьте пропущенные слова

1) Единственную плоскость можно задать через три точки, при этом они *не лежат* на одной прямой.

2) Если *две* точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.

3) Две различные плоскости могут иметь только одну общую *прямую*

4) Прямые являются *параллельными* в пространстве, если они не пересекаются и *лежат* в одной плоскости.

5) Если прямая a лежит в плоскости α, прямая b не лежит в плоскости α, но пересекает ее в точке B $\notin$ α, то прямые a и b **скрещивающиеся**

Задание 2 Определите: верно, ли утверждение?

1. Если прямая проходит через вершину треугольника, то она лежит в плоскости треугольника.	Нет
2. Если прямые не пересекаются, то они параллельны.	Нет
3. Прямая m параллельна прямой n, прямая m параллельна плоскости α. Прямая n параллельна плоскости α.	Да
4. Все прямые пересекающие стороны треугольника лежат в одной плоскости.	Да
5. Прямая AB и точки C, D не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые AB и CD пересекаться?	Нет

Задание 2 Определите: верно, ли утверждение?

6. Прямые AB и CD пересекаются. Могут ли прямые AC и BD быть скрещивающимися?	Нет
7. Прямые *а* и *в* не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую *с*, параллельную прямым *а* и *в*?	Нет
8. Прямая *а*, параллельная прямой *в*, пересекает плоскость α. Прямая *с* параллельна прямой *в*. Может ли прямая *с* лежать в плоскости α?	Нет
9. Прямая а параллельна плоскости α. Существует ли на плоскости α прямые, непараллельные а?	Да

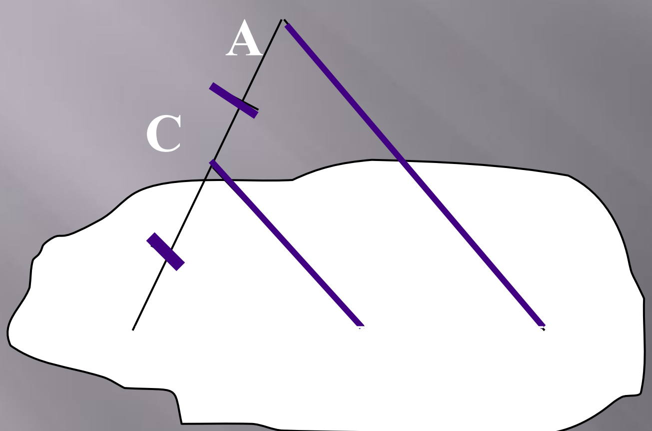
Задание 3

Дано: $BC=AC$,

$CC_1 \parallel AA_1$,

$AA_1=22$ см

Найти: CC_1



Решение:

$AA_1 \parallel CC_1$, $AC = BC$

$\Rightarrow C_1$– середина A_1B

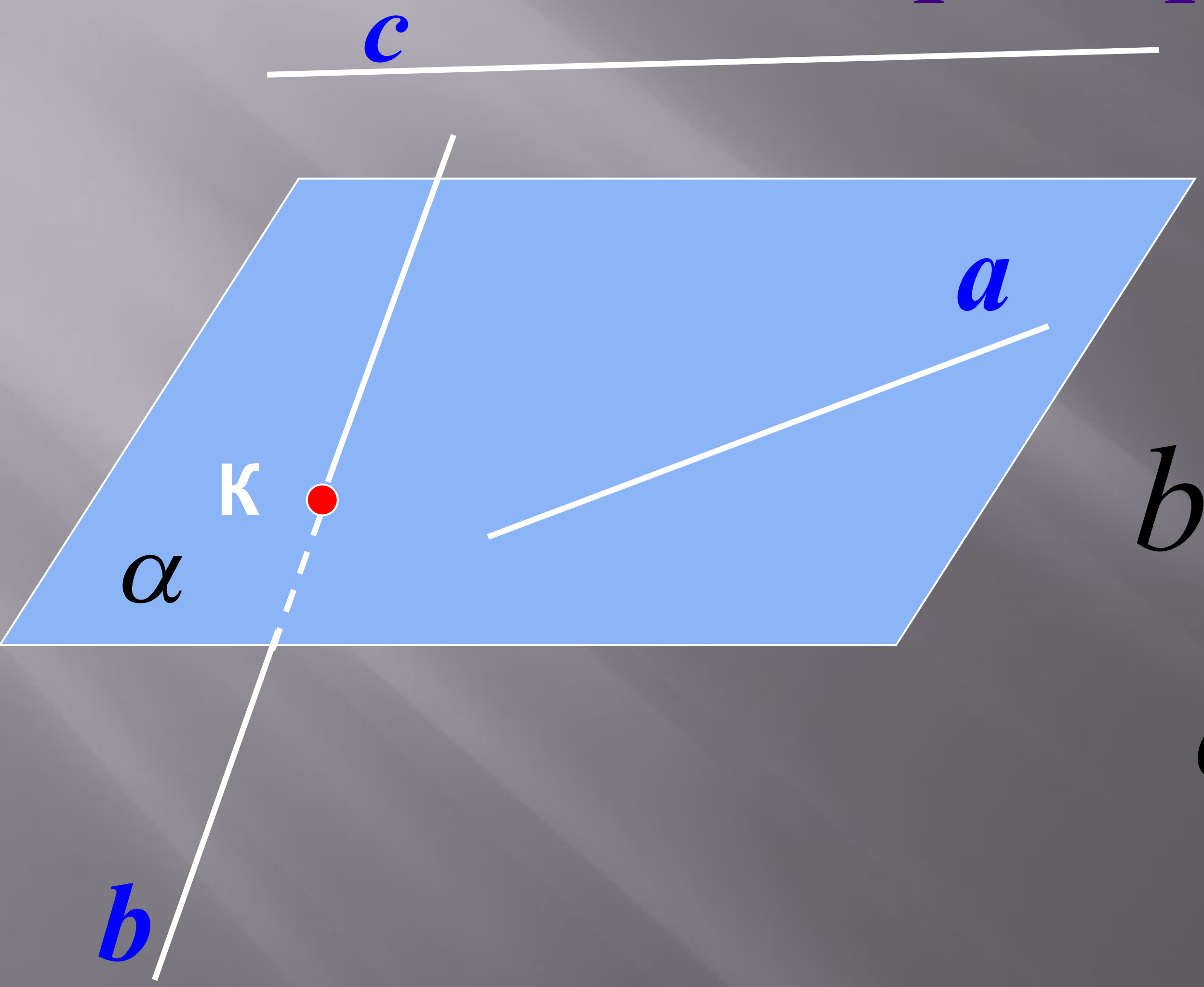
(по т.Фалеса) $\Rightarrow$

CC_1- средняя линия $\Delta AA_1B \Rightarrow$

$CC_1= 0{,}5AA_1 = 11$ см

Ответ: 11см.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

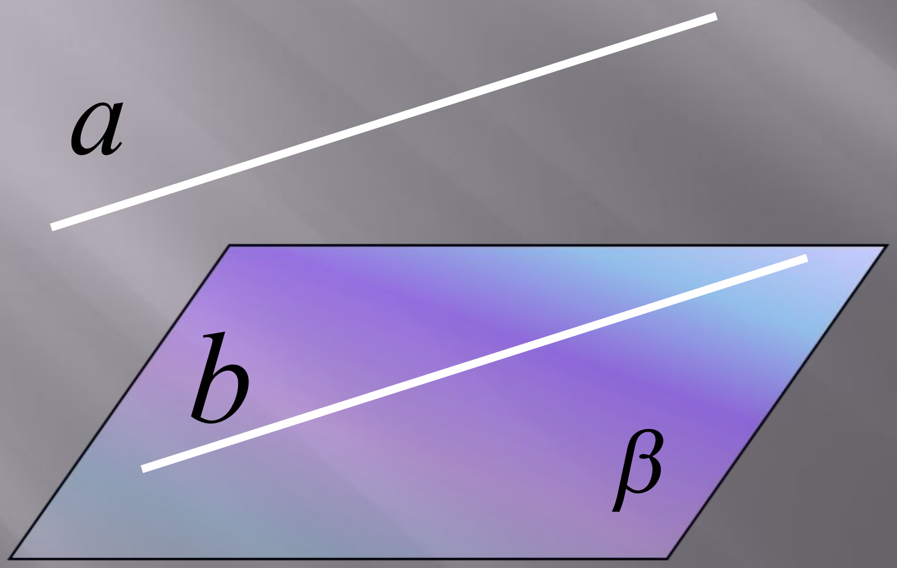


$$a \subset \alpha$$

$$b \cap \alpha = K$$

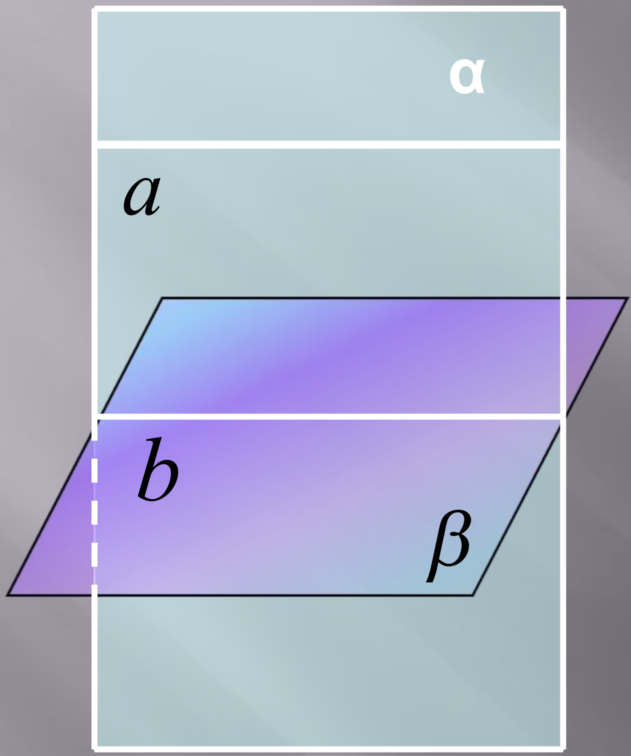
$$c \parallel \alpha$$

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости , то *она параллельна и самой плоскости.*



Дано:	Доказать:
$a \not\subset \beta$ $a \parallel b$ $b \subset \beta$	$a \parallel \beta$

Пусть $a \not\subset \beta$, $b \subset \beta$, $a \parallel b$



1.Через прямые *a* и *b* проведем плоскость α

2. $\alpha \cap \beta = b$

Если $a \cap \beta = X$, то $X \in b$, это невозможно, т.к. $a \parallel b$

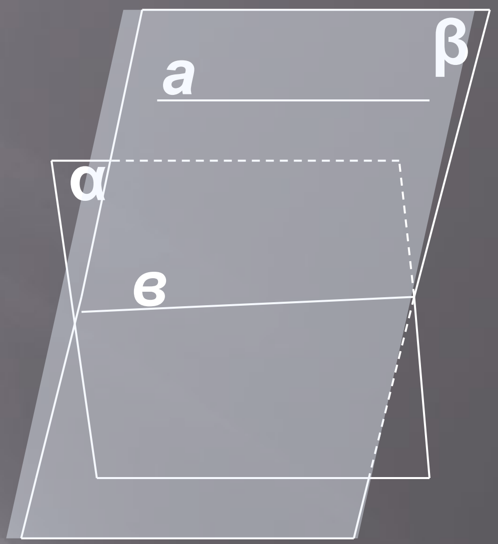
$\Rightarrow a \cancel{\cap} \beta$

$\Rightarrow a \parallel \beta$

Теорема доказана.

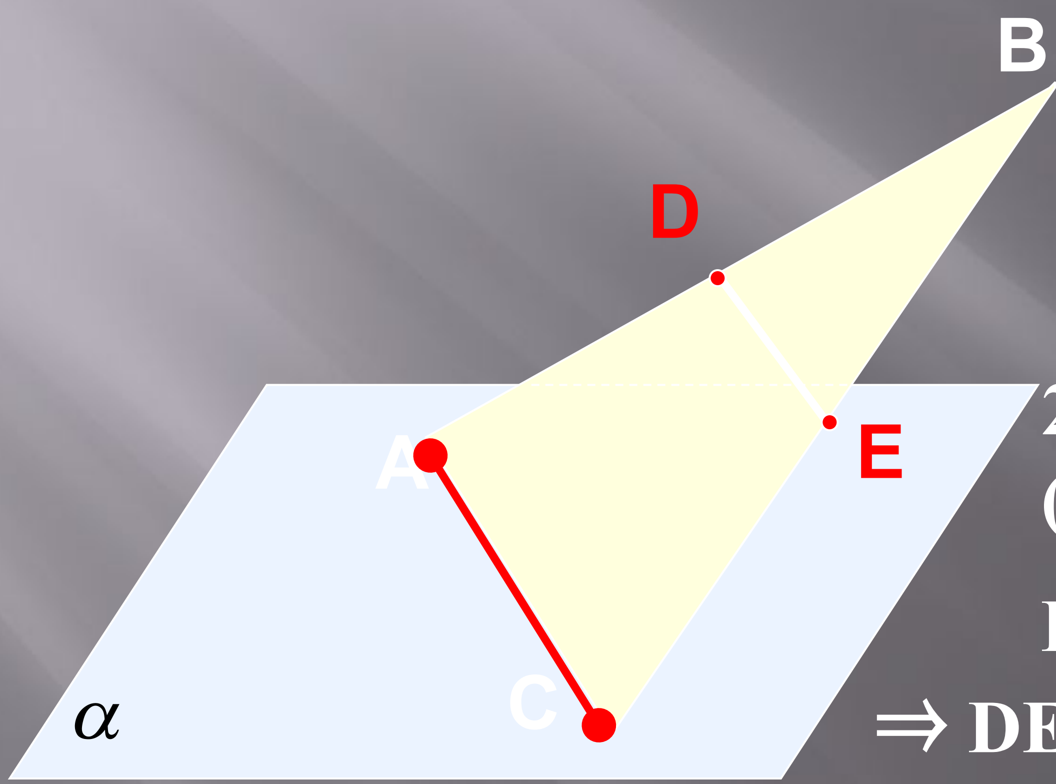
Задание 2

Дано: *а* || α
а ⊂ β; β ∩ α = *в*
Доказать: *а* || *в*



Доказательство:
а, *в* ⊂ β
Пусть *в* ∩ *а*, тогда *а* ∩ α,
что противоречит условию.
Значит *в* || *а*

Плоскость проходит через сторону AC Δ ABC. Точки D и E - середины отрезков AB и BC соответственно. Докажите, что DE || α



Доказательство:

1. Точки D и E - середины отрезков AB и BC соответственно $\Rightarrow$

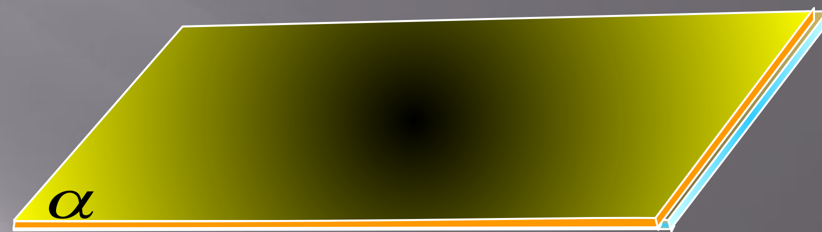
2. DE – средняя линия (по определению) $\Rightarrow$

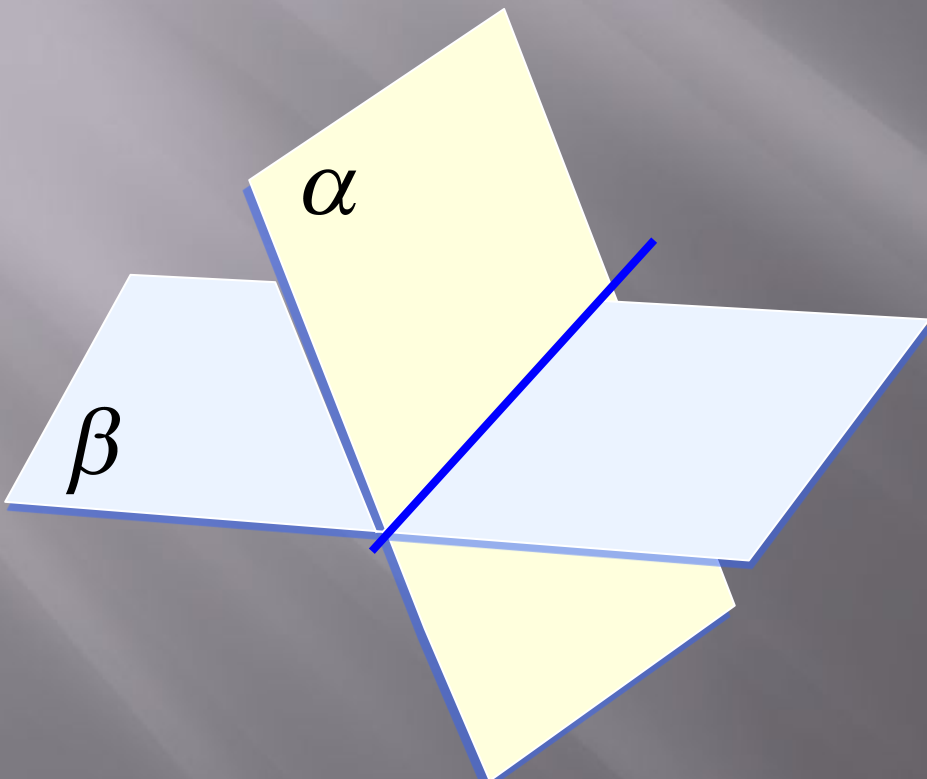
DE || AC (по свойству)

$\Rightarrow$ DE || α (по признаку параллельности прямой и плоскости)

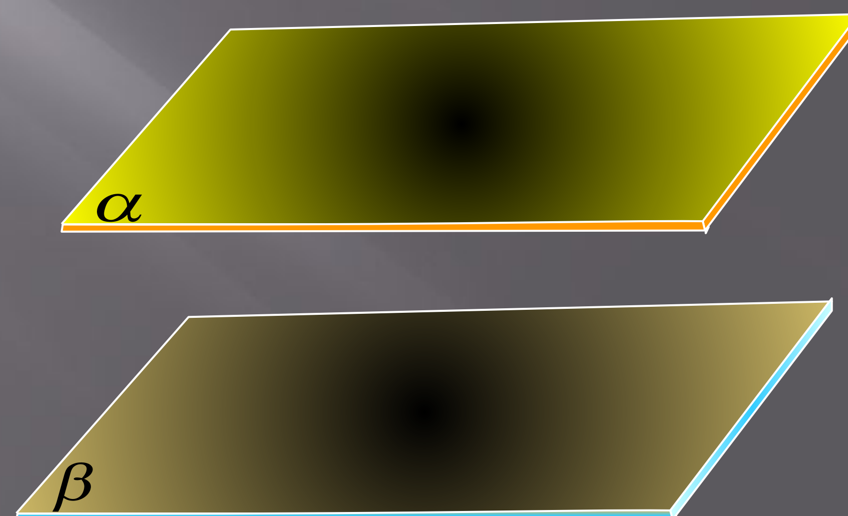
Расположение плоскостей в пространстве.

α и β *совпадают*





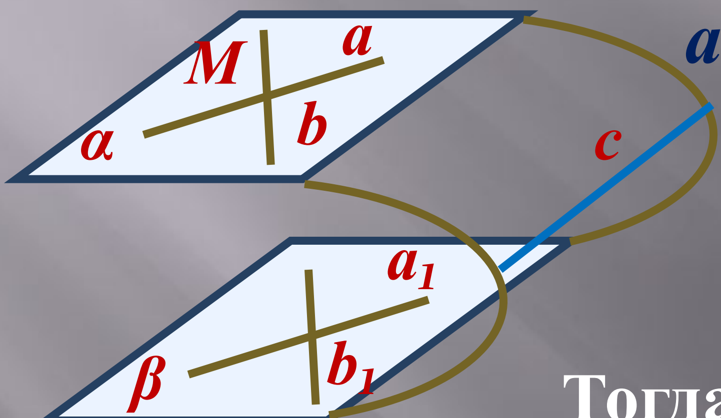
α ∩ β



α || β

Признак параллельности двух плоскостей.

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Дано: $a \cap b = M$, $a \in \alpha$, $b \in \alpha$. $a_1 \cap b_1$, $a_1 \in \beta$, $b_1 \in \beta$. $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$.

Доказать: $\alpha \parallel \beta$

Доказательство:

1. Пусть $\alpha \cap \beta = c$.

Тогда $a \parallel \beta$, $a \subset \alpha$, $\alpha \cap \beta = c$, значит $a \parallel c$.

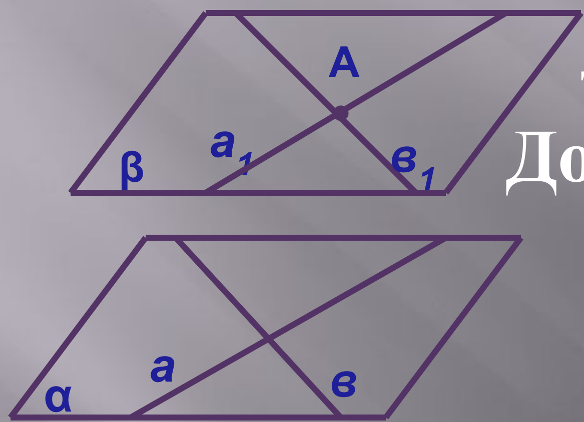
2. $b \parallel \beta$, $b \subset \alpha$, $\alpha \cap \beta = c$, значит $b \parallel c$.

3. Имеем, что через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c, чего быть на может.

Значит $\alpha \parallel \beta$.

Теорема

Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, причём единственную.



Дано: плоскость α,

точка A вне плоскости α.

Доказать: существует плоскость β║α, проходящая через точку A

Доказательство.

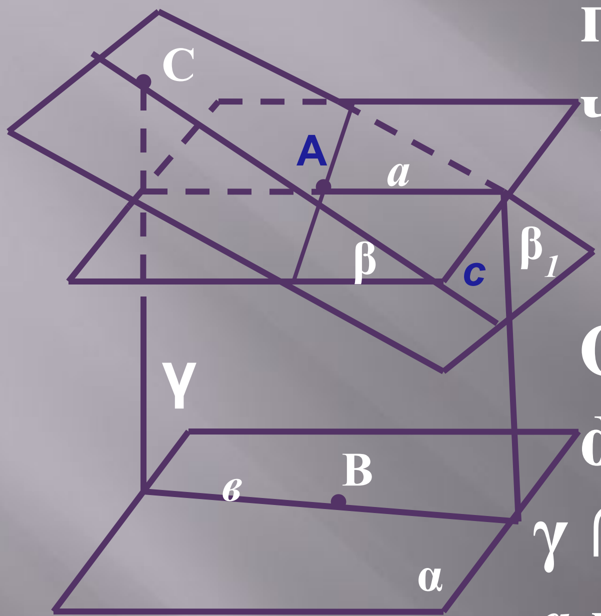
1. В плоскости α проведём прямые $a \cap в$.

Через точку A проведём $a_1 \parallel a$ и $в_1 \parallel в$.

По признаку параллельности плоскостей прямые a_1 и $в_1$ задают плоскость β║α.

Существование плоскости β доказано.

Докажем единственность плоскости β методом от противного.



Допустим, что существует плоскость β_1, которая проходит через т. A и $\beta_1 \parallel \alpha$.

Отметим в плоскости β_1 т. $C \notin \beta$.

Отметим произвольную т. $B \in \alpha$.

Через точки A, B и C проведем γ.

$\gamma \cap \alpha = в$, $\gamma \cap \beta = a$, $\gamma \cap \beta_1 = c$.

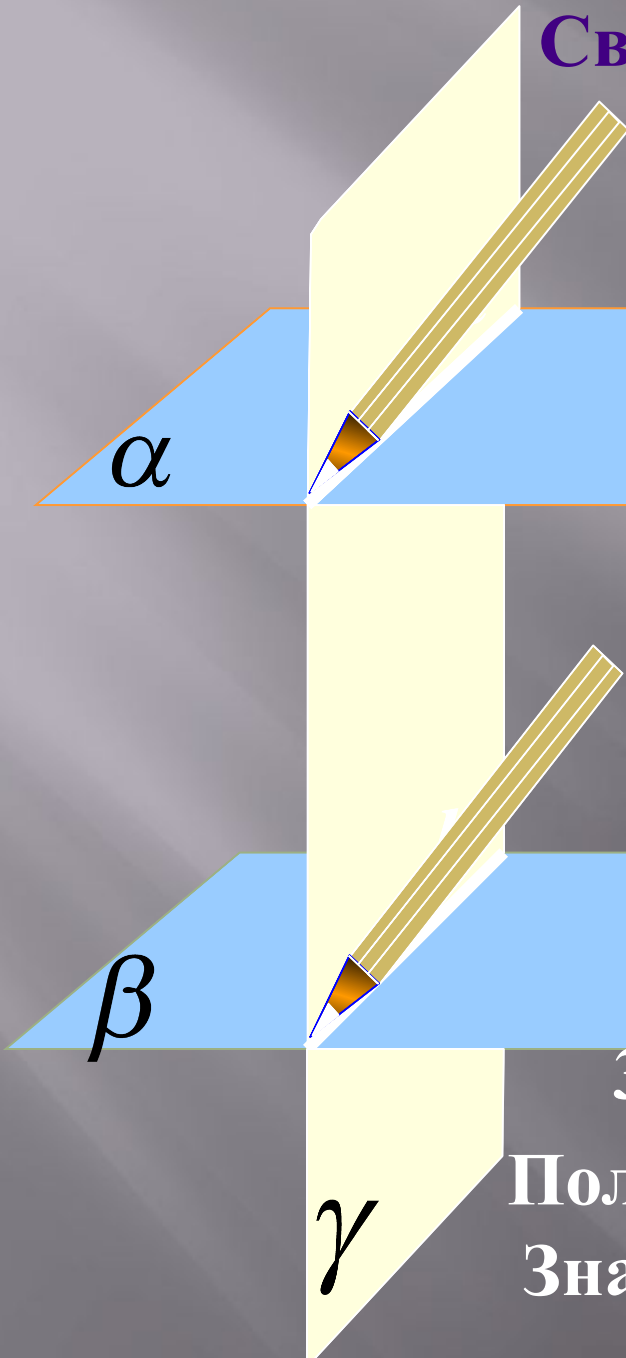
a и *c* не пересекают плоскость α, значит они не пересекают прямую *в*, $\Rightarrow a \parallel в$ и $c \parallel в$

Получили, что через т. A проходят две прямые, параллельные прямой *в*, чего быть не может.

⇒ наше предположение ложное.

Единственность β доказана.

Свойство параллельных плоскостей.



Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Дано:

$\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$

$\beta \cap \gamma = b$

Доказать: $a \parallel b$

Доказательство:

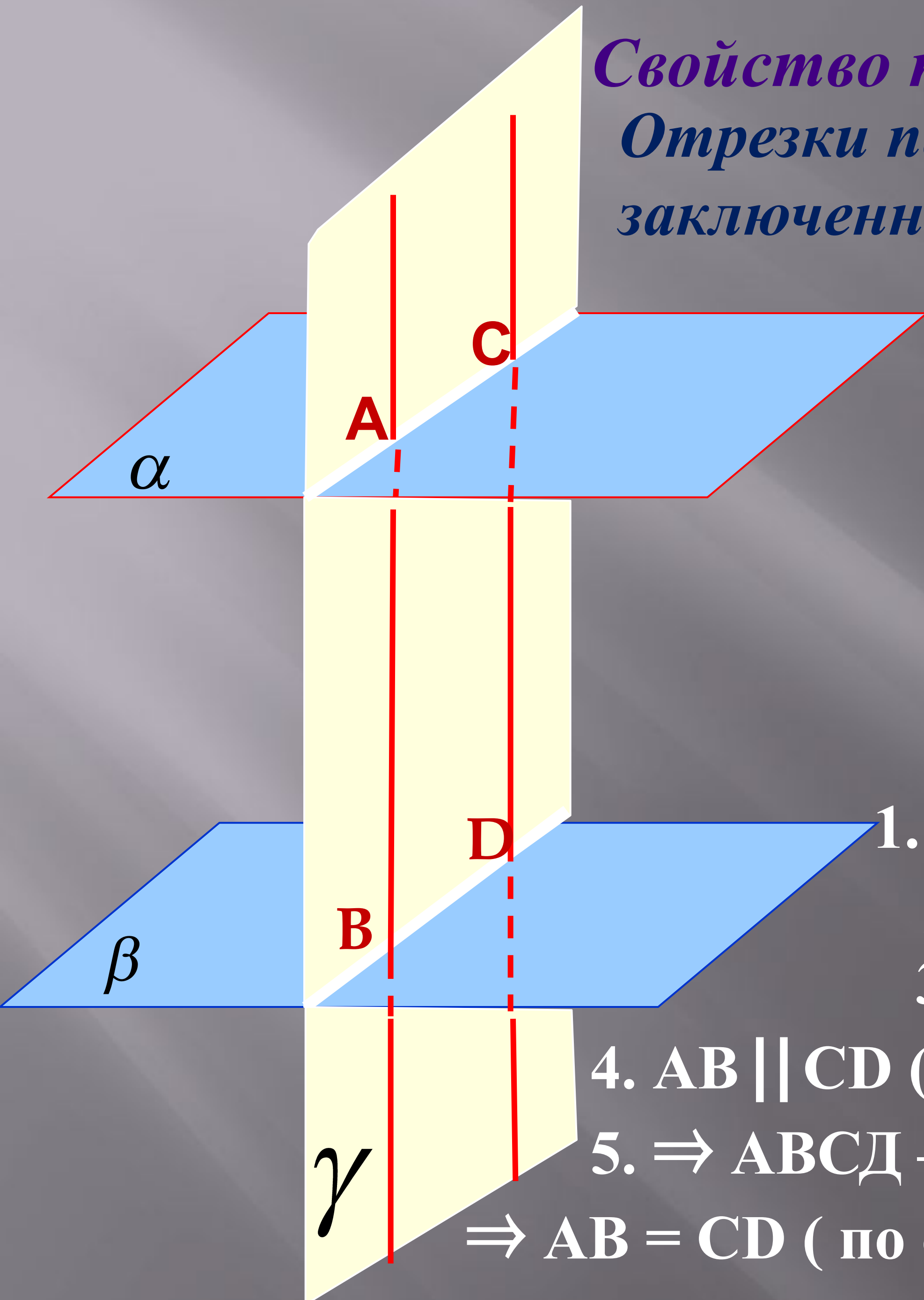
1. $a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$
2. Пусть $a \nparallel b$,
   тогда $a \cap b = M$
3. $M \in \alpha$, $M \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = c$ (A_2)

Получили противоречие с условием.

Значит $a \parallel b$ **ч. т.д.**

Свойство параллельных плоскостей.

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



Дано:

$\alpha \parallel \beta$, $AB \parallel CD$

$AB \cap \alpha = A$, $AB \cap \beta = B$,

$CD \cap \alpha = C$, $CD \cap \beta = D$

Доказать: $AB = CD$

Доказательство:

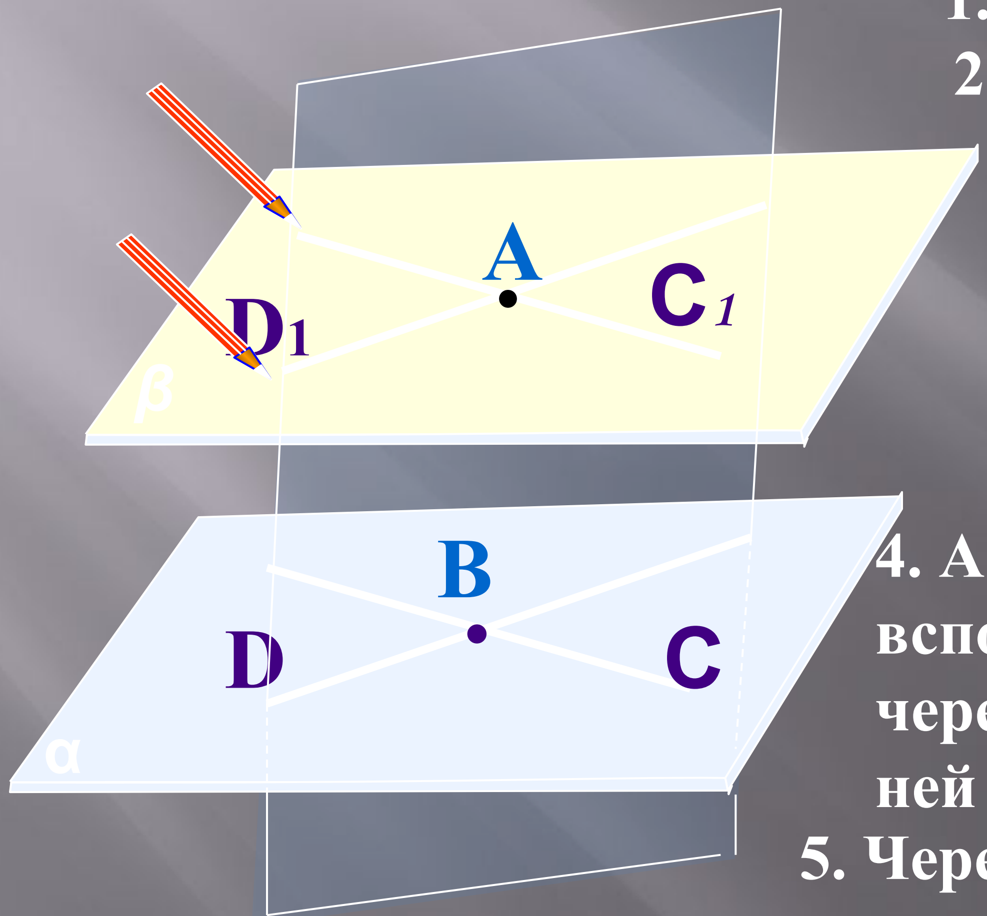
1. Через $AB \parallel CD$ проведем γ
2. $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$
3. $\Rightarrow AC \parallel BD$,
4. $AB \parallel CD$ (как отрезки парал. прямых)
5. $\Rightarrow$ АВСД – параллелограмм (по опр.)

$\Rightarrow AB = CD$ (по свойству параллелограмма)

Определите: верно, ли утверждение?

1. если плоскости не пересекаются, то они параллельны. ДА
2. плоскости параллельны, если прямая лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости? НЕТ
3. если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны? НЕТ
4. если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости. ДА
5. прямые, по которым две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, параллельны. ДА
6. Если прямая пересекает одну из двух плоскостей, то она пересекает и другую. НЕТ
7. Две плоскости, параллельные третьей, параллельны. ДА
8. Отрезки прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны. НЕТ

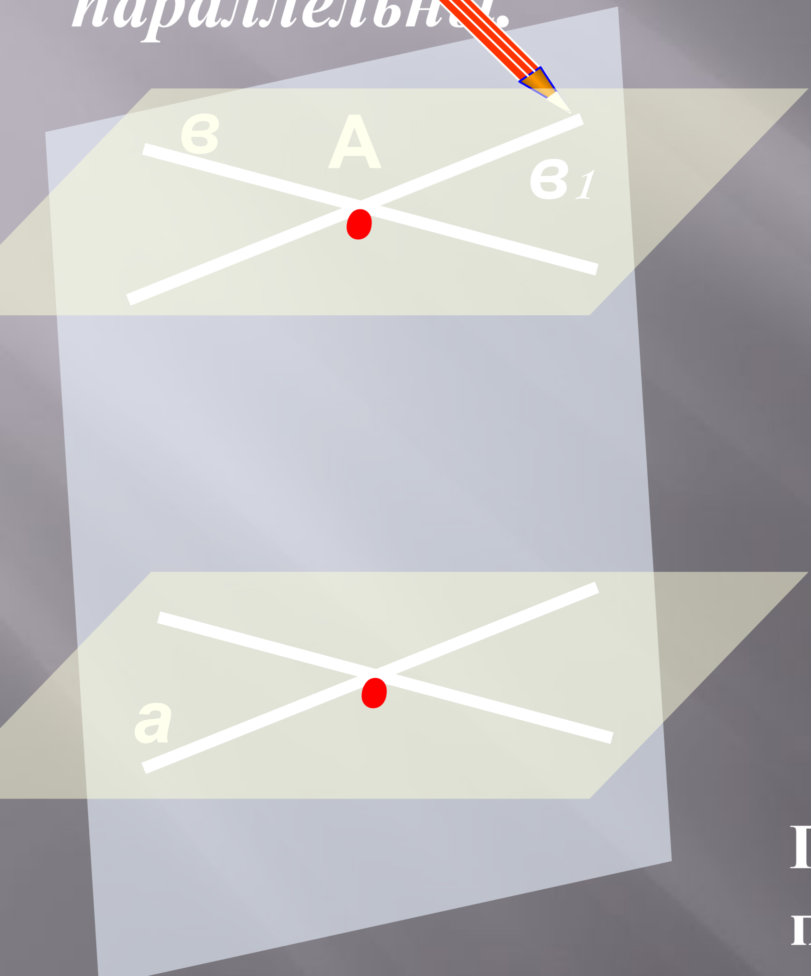
Через данную точку А провести плоскость, параллельную данной плоскости α, не проходящей через точку.



Решение.

1. В плоскости α возьмем т. B.
2. Проведем прямые BC и BD.
3. Построим вспомогательную плоскость через точку А и прямую BD, в ней проведем прямую $AD_1 \parallel BD$.
4. Аналогично построим вспомогательную плоскость через точку А и прямую BC, в ней проведем прямую $AC_1 \parallel BC$.
5. Через прямые AD_1 и AC_1 проведем плоскость β

Задача 2. *Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.*



Доказательство:

Пусть *а* скрещивается с *в*.

На прямой *в* возьмем т. А, через прямую *а* и т. А проведем плоскость,

в этой плоскости через т. А проведем прямую $в_1$, $в_1 \parallel в$.

Через $в_1 \cap в$ проведем плоскость α.

Аналогично строим плоскость β.

По признаку параллельности плоскостей α || β.