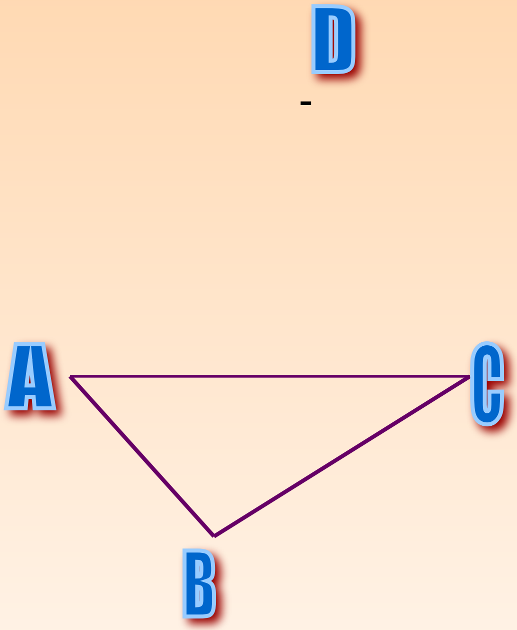
Тетраэдр. Параллелепипед. Задачи на построение сечений.

МОУ СОШ №10
г. Красногорска,
учитель математики
Трапезникова Н.К.

Далее

Тетраэдр

- Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку D, не лежащую в плоскости этого треугольника.

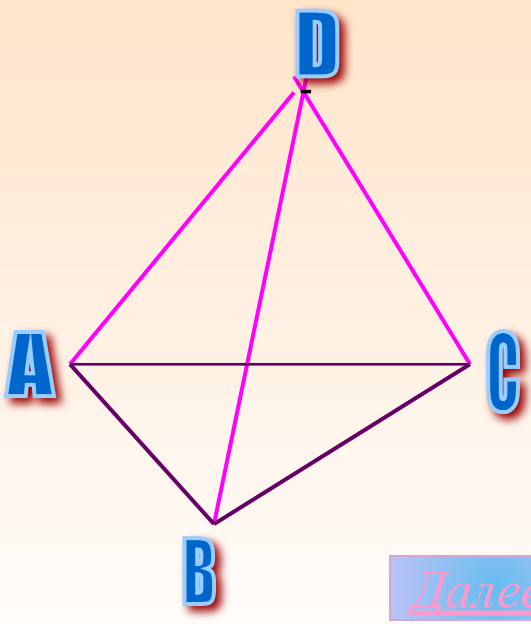


Содержание

Далее

Тетраэдр

- Соединив точку D отрезками с вершинами треугольника ABC, получим треугольники DAB, DBC и DCA.

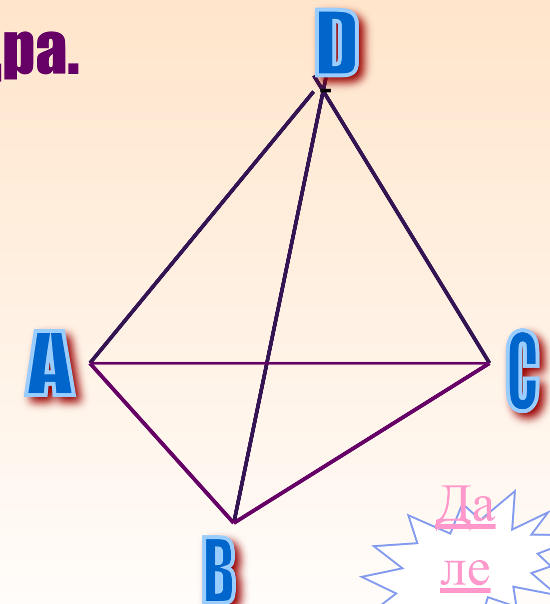


Содержание

Далее

Определения.

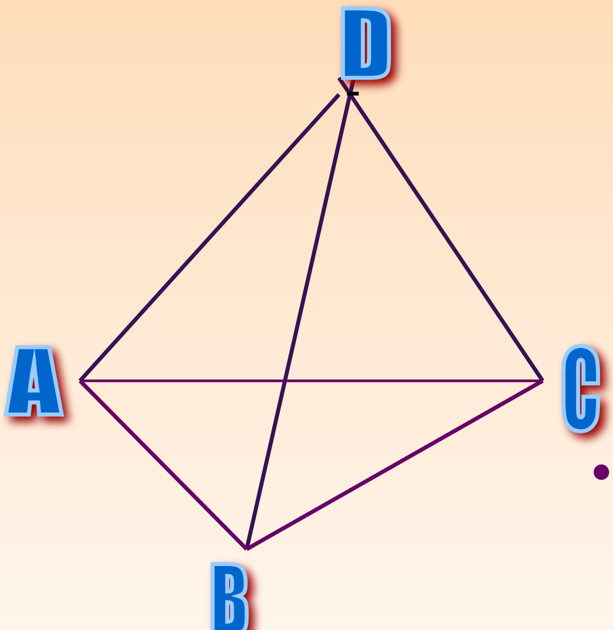
- Поверхность, составленная из четырёх треугольников ABC, DAB, DBC и DCA, называется **тетраэдром** и обозначается так: DABC.
- Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются **гранями**, их стороны - **рёбрами**, а вершины - **вершинами** тетраэдра.



Содержание

Далее

Определения



- Тетраэдр имеет четыре грани, шесть рёбер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются **противоположными**. На рисунке противоположными являются рёбра AD и BC, BD и AC, CD и AB.
- Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют её основанием, а три другие - **боковыми гранями**.

Содержание

Далее

- Тетраэдр изображается обычно так, как показано на рисунках 34 и 35, т.е. в виде выпуклого или невыпуклого четырёхугольника с *диагоналями*. При этом штриховыми линиями изображаются *невидимые рёбра*. На рисунке 34 невидимым является только ребро AC, а на рисунке 35 - рёбра EK, KF и KL.

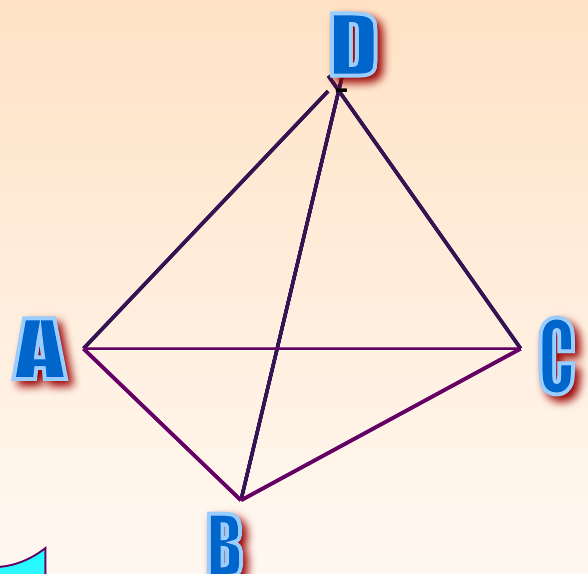


Рис.34.

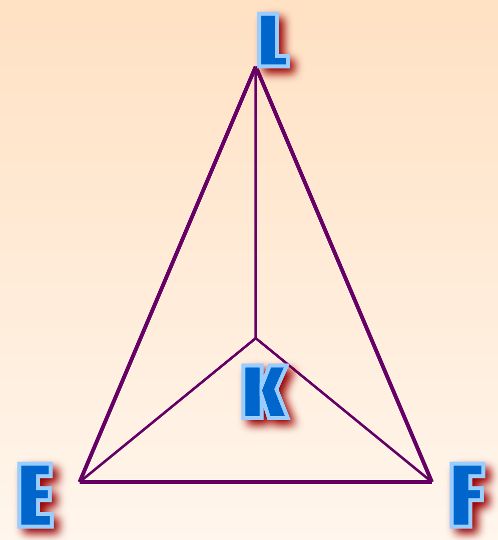
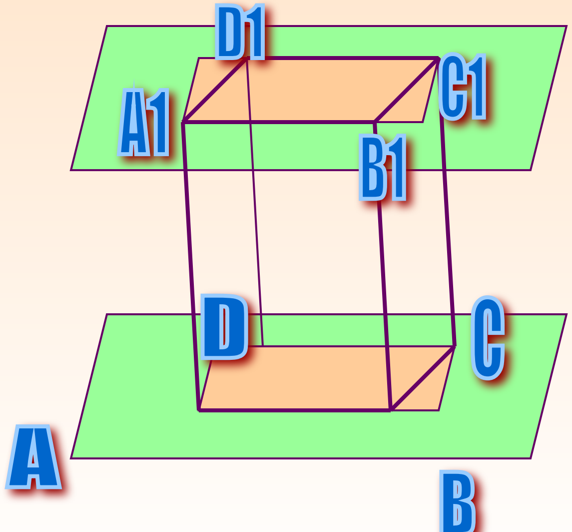


Рис.35.

Содержание

Параллелепипед.

- Рассмотрим два равных параллелограмма ABCD и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллельны.



Содержание

Далее

Содержание

Содержание

Тетраэдр

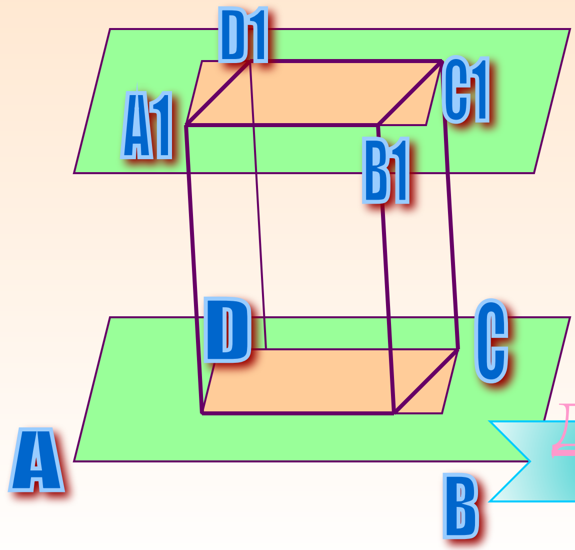
Параллелепипед

Задачи
на построение
сечений

Выход

Параллелепипед

- **Четырёхугольники ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DAA_1D_1 также являются параллелограммами, т.к. каждый из них имеет попарно параллельные противоположные стороны (в четырёхугольнике ABB_1A_1 стороны AA_1 и BB_1 параллельны по условию, а стороны AB и A_1B_1 - по свойству линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей.**



Содержание

Далее

Определения

- Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов ABCD и A1B1C1D1 и четырёх параллелограммов, называется параллелепипедом и обозначается так: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
- Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются гранями, их стороны - рёбрами, а вершины параллелограммов - вершинами параллелепипеда.

Далее

Содержание

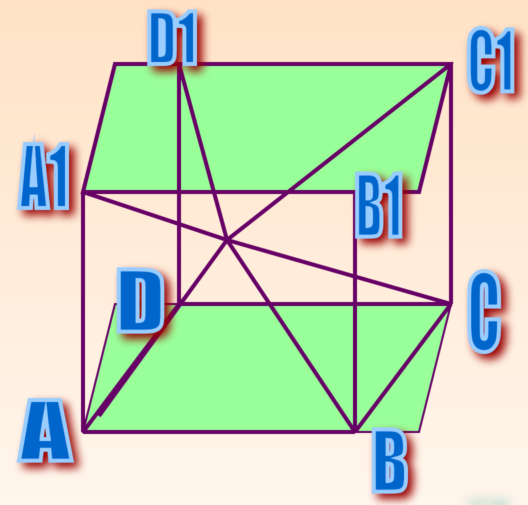
Определения

- **Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать рёбер и восемь вершин.**
- **Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющие общих рёбер - противоположными.**

Содержание

Далее

- На рисунке противоположными являются грани ABCD и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1, ADD_1A_1 и BCC_1B_1. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются противоположными.

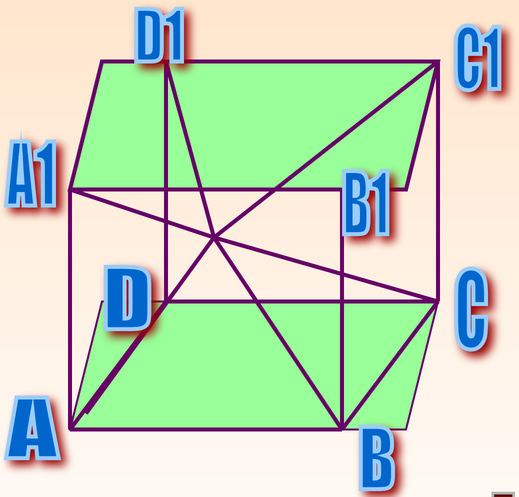


Далее

Содержание

Далее

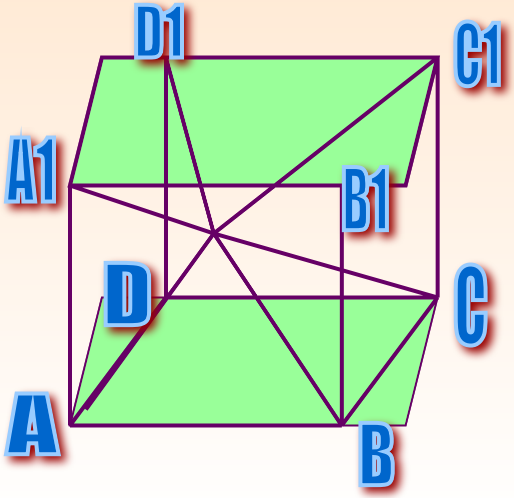
- Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется диагональю параллелепипеда.
- Каждый параллелепипед имеет четыре диагонали. На рисунке диагоналями являются отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1.



Содержание

Далее

- Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их **основаниями**, а остальные грани - **боковыми гранями** параллелепипеда.
- Рёбра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми рёбрами**. Если выбрать грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то боковыми гранями будут **параллелограммы**, а боковыми рёбрами - отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.



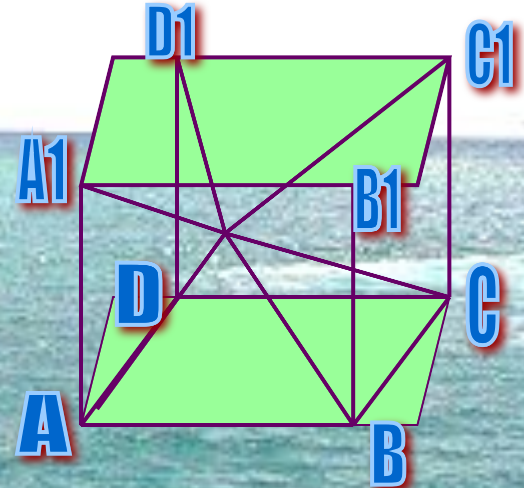
Содержание

Далее

Свойства параллелепипеда

- 1.Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

- Докажем, параллельность и равенство граней ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

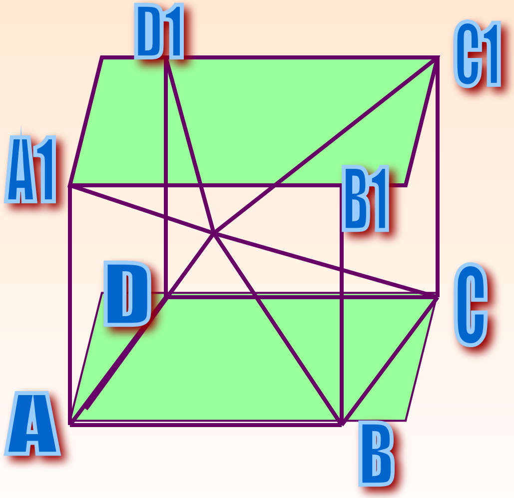


В содержание

Далее

Доказательство.

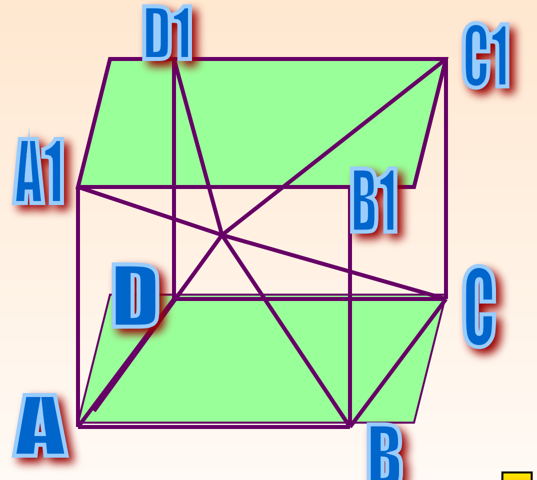
- Т.к. $ABCD$ и ADD_1A_1 - параллелограммы, то $AB \parallel DC$ и $AA_1 \parallel DD_1$. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и AA_1 одной грани соответственно параллельны двум прямым CD и DD_1 другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоскостей следует, что грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллельны.



Содержание

Далее

- <u>Докажем теперь равенство этих граней</u>. Т.к. все грани параллелепипеда - параллелограммы, то AB=DC и AA_1=DD_1. По этой же причине стороны углов A_1AB и D_1DC соответственно сонаправлены, и, значит, эти углы равны. Таким образом, две смежные стороны и угол между ними параллелограмма ABB_1A_1 соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними параллелограмма DCC_1D_1, поэтому эти параллелограммы равны.



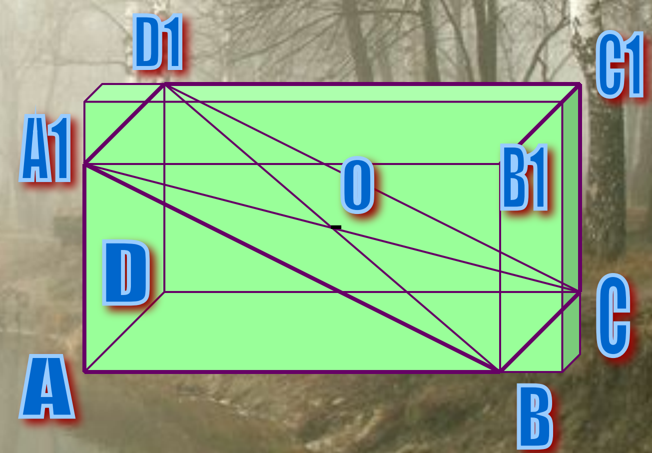
В содержание

Далее

- **2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.**

Пример №1

- Рассмотрим четырёхугольник A_1D_1CB, диагонали которого A1C и D_1B являются диагоналями параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Т.к. $A_1D_1 \parallel BC$ и $A_1D_1=BC$, то A1D1CB - параллелограмм. Поэтому диагонали A_1C и D_1B пересекаются в некоторой точке O и этой точкой делятся пополам.

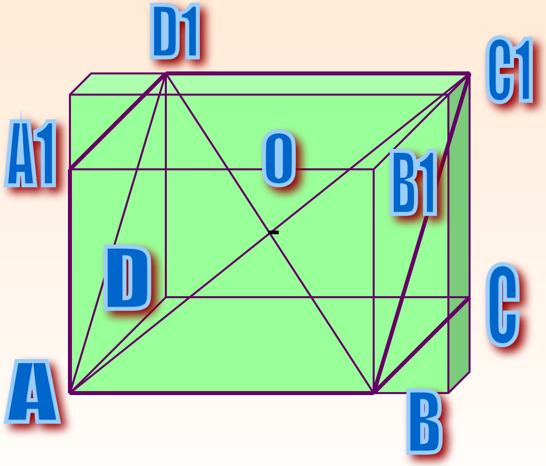


Содержание

Далее

Пример №2

- Рассмотрим четырёхугольник AD_1C_1B. Он также является параллелограммом, и, следовательно, его диагонали AC_1 и D_1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D_1B является точка O. Таким образом, диагонали A_1C, D_1B и AC_1 пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.

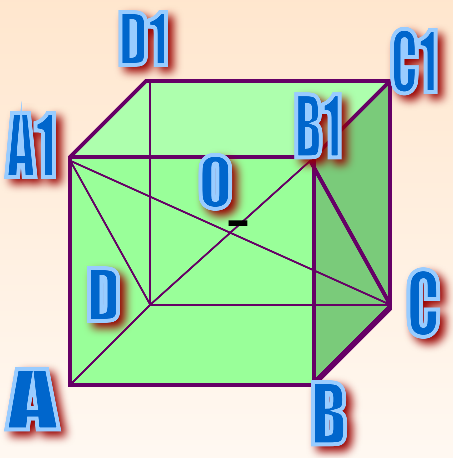


Содержание

Далее

Пример №3

- **Рассматривая четырёхугольник A_1B_1CD, точно так же устанавливаем, что и четвёртая диагональ DB_1 параллелепипеда проходит через точку O и делится ею <u>пополам</u>.**

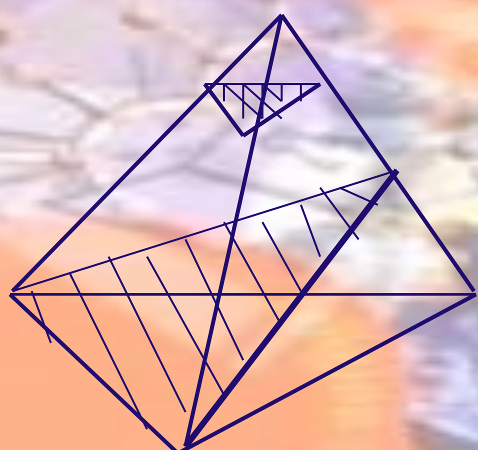


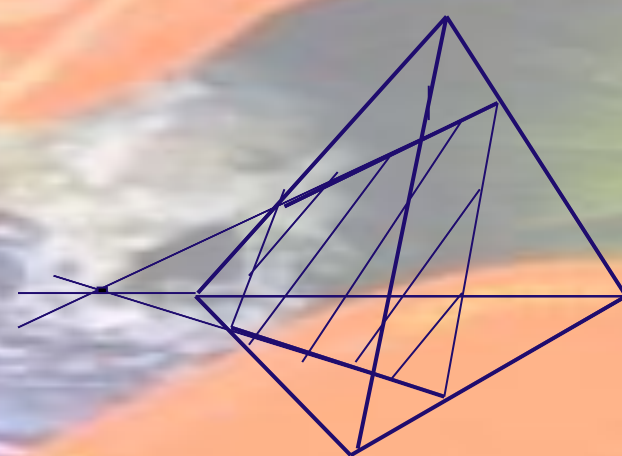
Содержание

Задачи на построение с

- Секущей плоскостью тетраэдра называется любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра по отрезкам.
- Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением тетраэдра (параллелепипеда).

- Т.к. тетраэдр имеет [четыре] грани, то его сечениями могут быть только [треугольники] и [четырёхугольники].





Содержание

Далее

- Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырёхугольники (рис.39,а), пятиугольники (рис.39,б) и шестиугольники (рис.39,в).

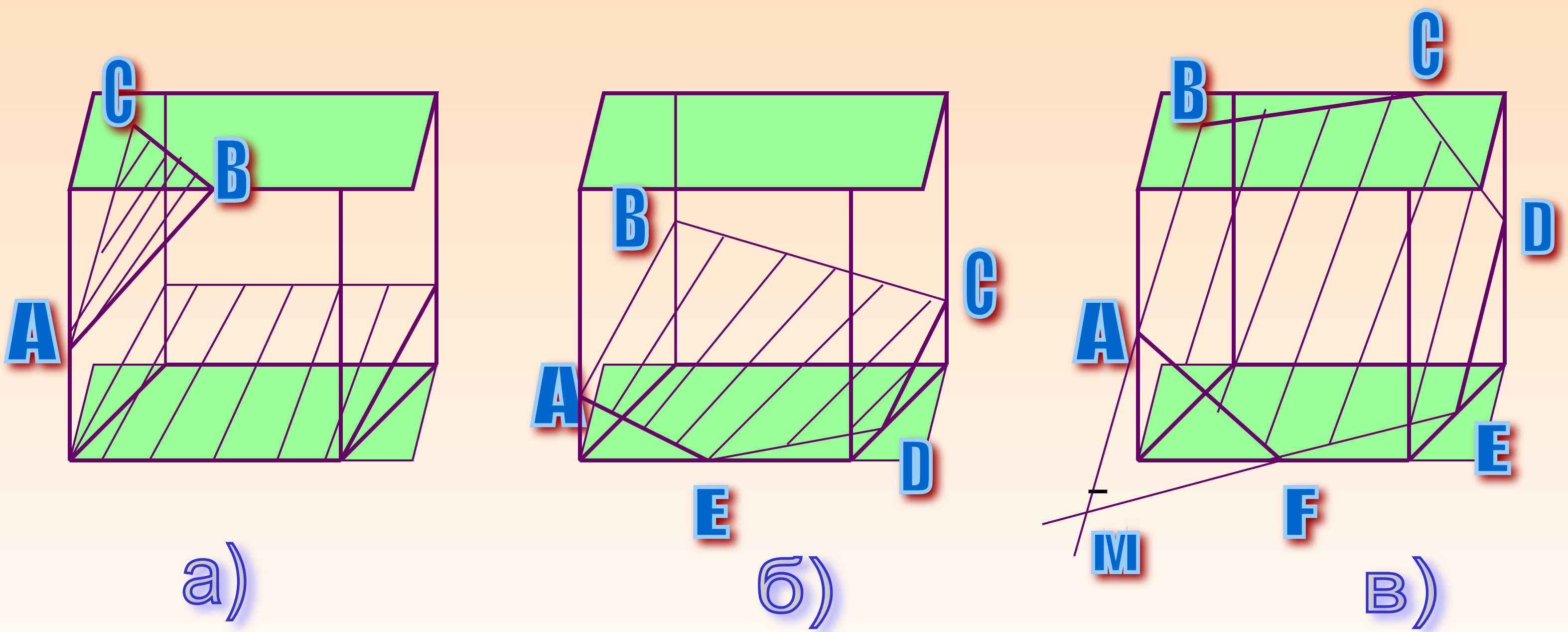


Рис.39.

- На рисунке 39,б секущая плоскость пересекает две противоположные грани (левую и правую) по отрезкам AB и CD, а две другие противоположные грани (переднюю и заднюю) - по отрезкам AE и BC, поэтому AB II CD и AE II BC.

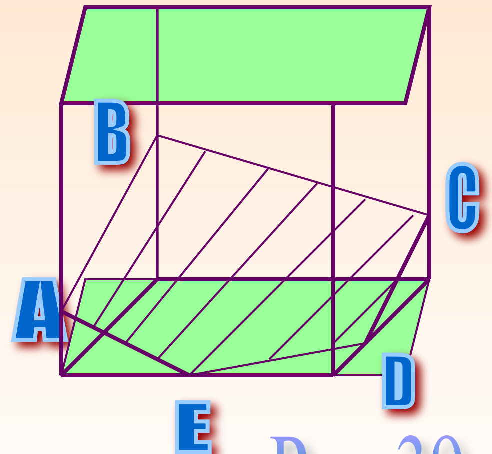


Рис.39. б)

- По той же причине на рисунке 39,в AB II ED, AF II CD, BC II EF. Для построения сечения достаточно построить <u>точки пересечения</u> секущей плоскости с рёбрами тетраэдра(параллелепипеда), после чего остаётся провести <u>отрезки</u>, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

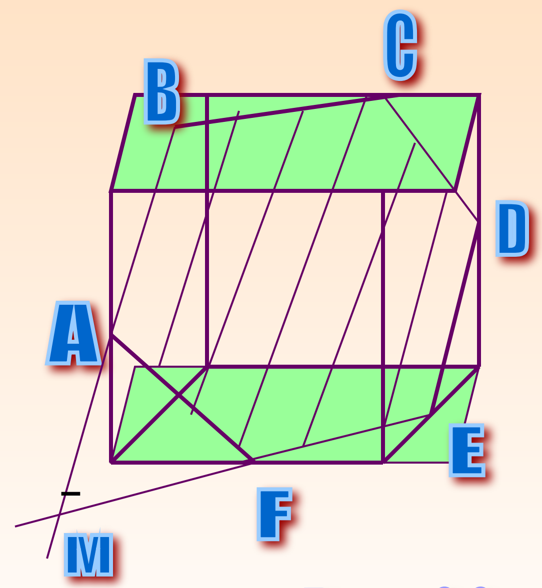
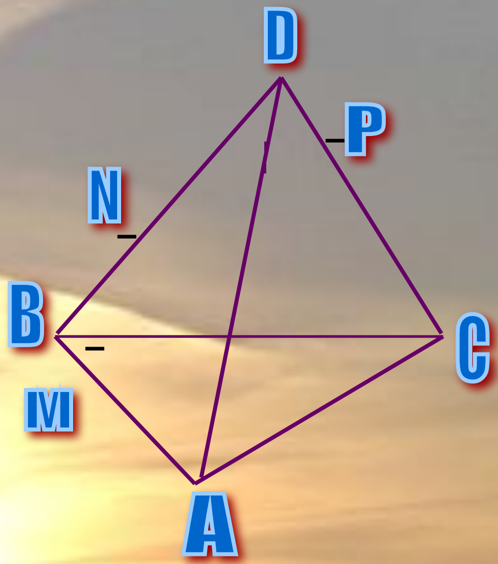


Рис.39. в)

Примеры построения сечений

- **Задача1**. На рёбрах AB, BD и CD тетраэдра ABCD отмечены точки M,N и P. Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP.

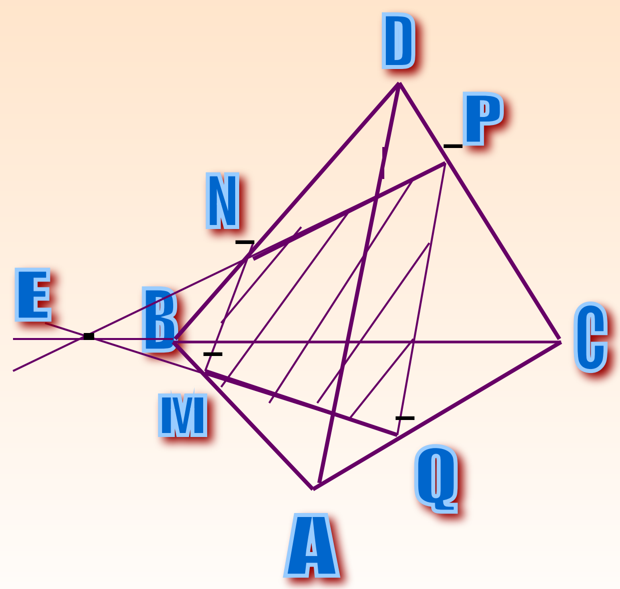


Содержание

Далее

• Решение.

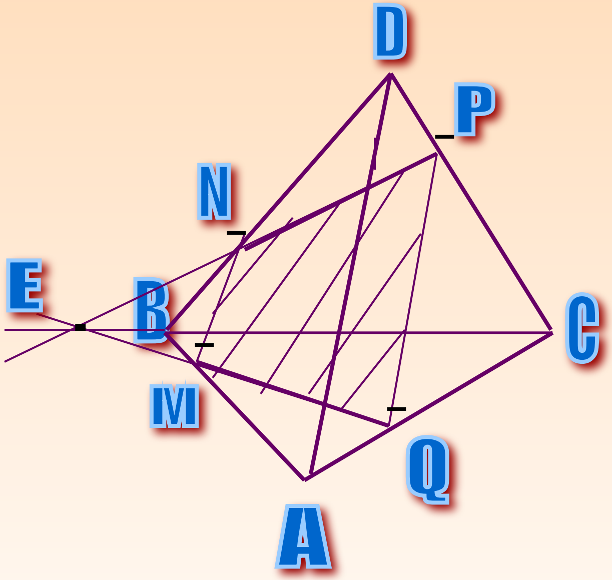
- Построим сначала прямую, по которой плоскость MNP пересекается с плоскостью грани ABC. Точка M является общей точкой этих плоскостей. Для построения ещё одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E, которая и будет второй общей точкой плоскостей MNP и ABC.



Содержание

Далее

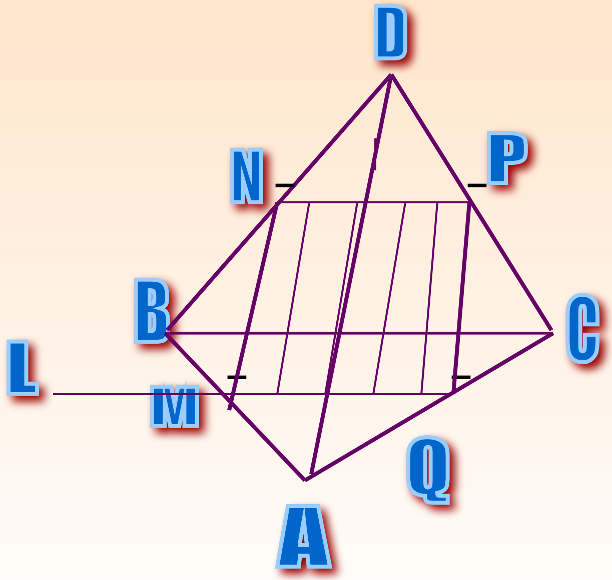
- Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME. Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке Q. Четырёхугольник MNPQ - искомое сечение.



Содержание

Далее

- Если прямые NP и BC параллельны, то прямая NP параллельна грани ABC, поэтому плоскость MNP пересекает эту грань по прямой ML, параллельной прямой NP. Точка Q, как и в первом случае, есть точка пересечения ребра AC с прямой ML.

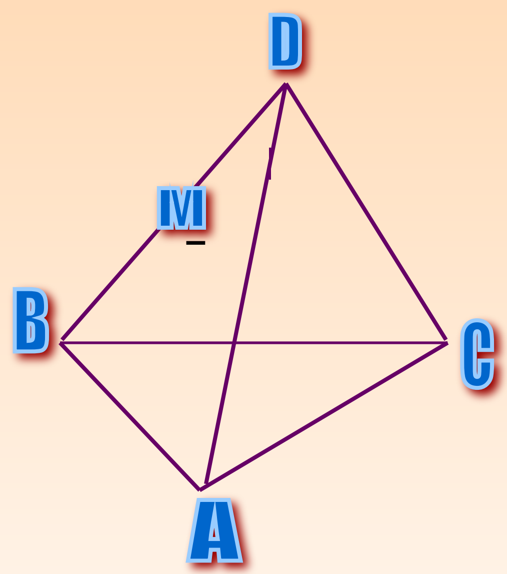


Содержание

Далее

Задача №2

- Точка M лежит на боковой грани ADB тетраэдра DABC. <u>Построить сечение тетраэдра</u> плоскостью, проходящей через точку M параллельно основанию ABC.

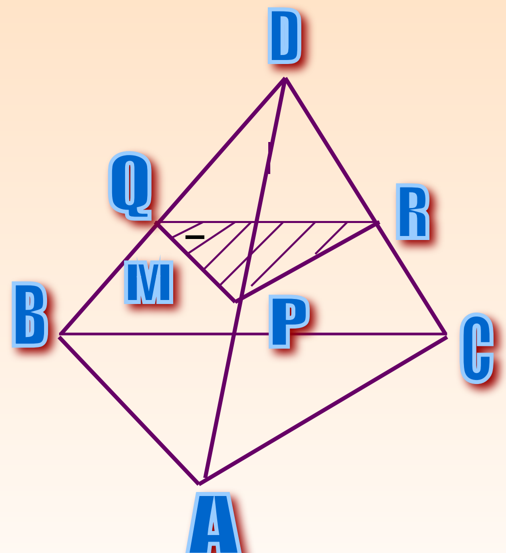


Содержание

Далее

• Решение.

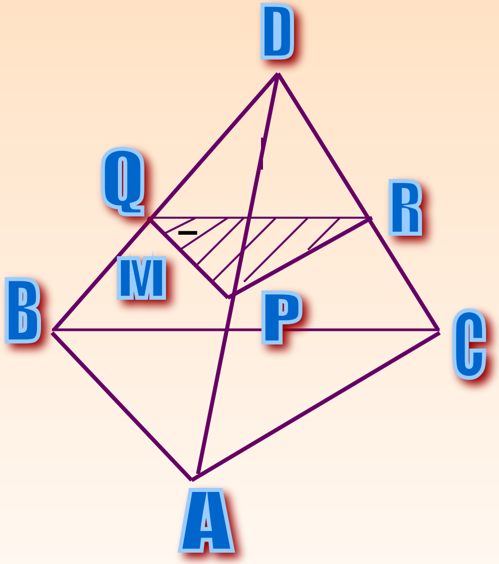
- Т.к. секущая плоскость параллельна плоскости ABC, то она параллельна прямым AB, BC и CA. Следовательно, секущая плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по прямым, параллельным сторонам треугольника ABC.
- Отсюда вытекает следующий способ построения искомого сечения. Проведём через точку M прямую, параллельную отрезку AB.



Содержание

Далее

- Обозначим буквами P и Q точки пересечения этой прямой с боковыми рёбрами DA и DB. Затем через точку P проведём прямую, параллельную отрезку AC, и обозначим буквой R точку пересечения этой прямой с ребром DC. Треугольник PQR - искомое сечение.



Содержание

Далее

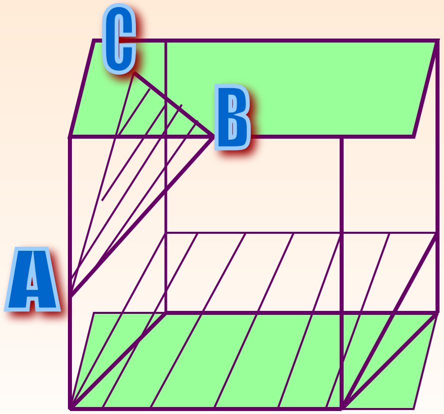
Задача №3

- **На рёбрах параллелепипеда даны три точки A, B и C. Построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC.**

Содержание

Далее

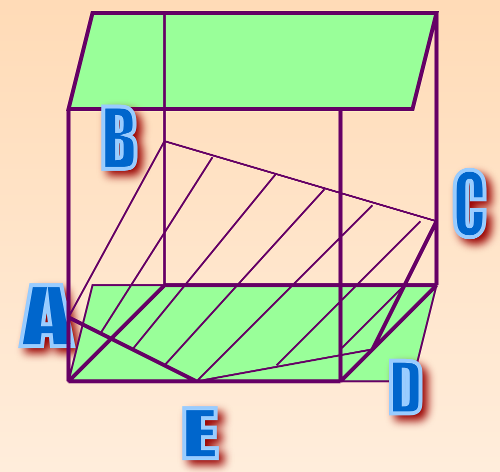
- **Решение.** Построение искомого сечения зависит от того, на каких рёбрах параллелепипеда лежат точки A, B и C. Когда эти точки лежат на рёбрах, выходящих из одной вершины, нужно провести отрезки AB, BC и CA, и получится искомое сечение - треугольник ABC.



Содержание

Далее

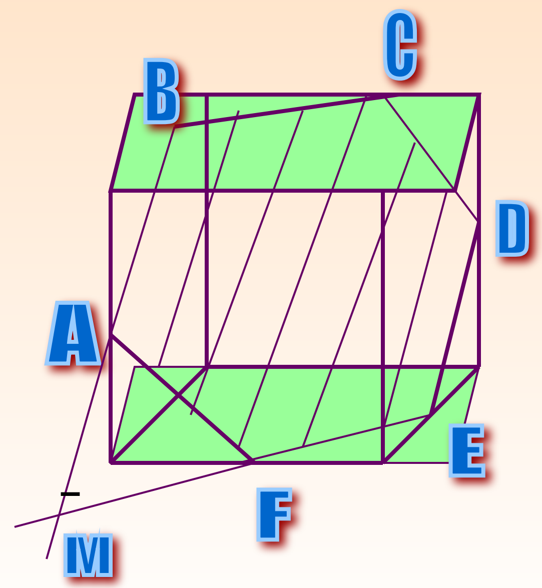
- Если три данные точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке, то сначала нужно провести отрезки AB и BC, а затем через точку A провести прямую, параллельную BC, а через точку C - прямую, параллельную AB. Пересечения этих прямых с рёбрами нижней грани дают точки E и D. Остаётся провести отрезок ED, и искомое сечение - пятиугольник ABCDE - построено.



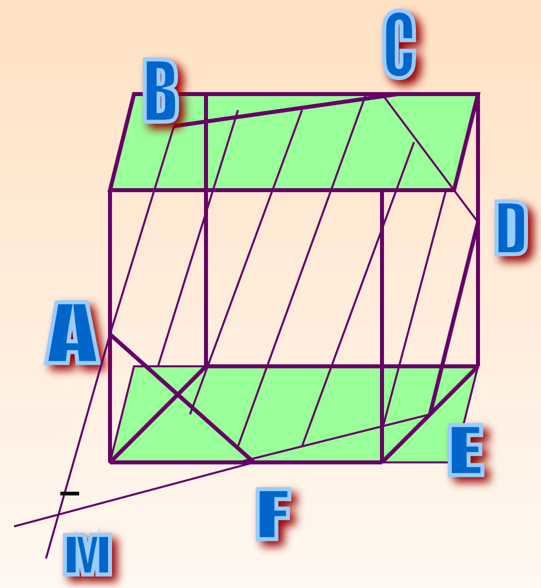
Содержание

Далее

- **Более трудный случай, когда данные точки A, B C расположены так, как показано на рисунке. В этом случае сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания.**
- **Для этого проведём прямую AB, до пересечения с этой прямой в точке M. Далее через точку M проведём прямую, параллельную прямой BC. Это и есть прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания.**



- Эта прямая пересекается с рёбрами нижнего основания в точках E и F. Затем через точку E проведём прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Проводим отрезки AF и CD, и искомое сечение - шестиугольник ABCDEF - построено.



Содержание