

Тетраэдр. Параллелепипед. Задачи на построение сечений.

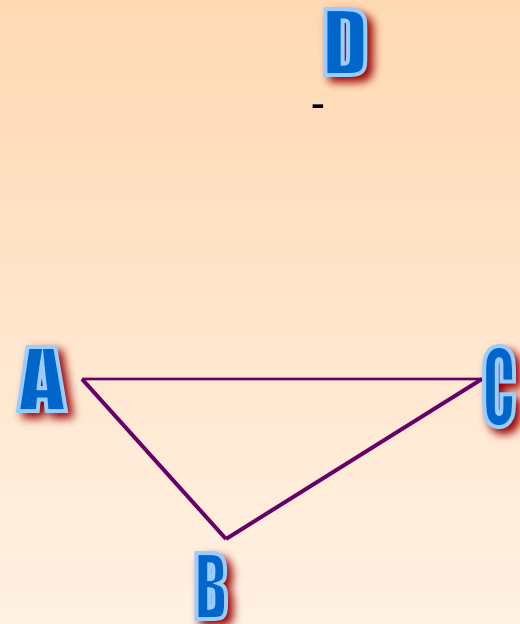


**МОУ СОШ №10
г. Красногорска,
учитель математики
Трапезникова Н.К.**

Далее

Тетраэдр

- Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку D , не лежащую в плоскости этого треугольника.

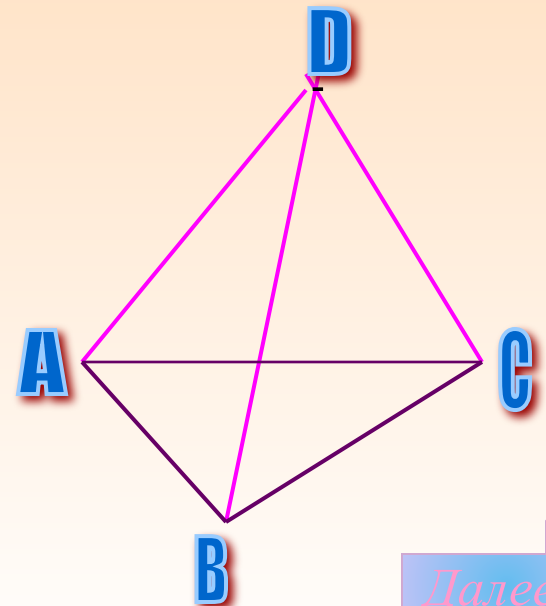


Содер
жани

Далее

Тетраэдр

- Соединив точку **D** отрезками с вершинами треугольника **ABC**, получим треугольники **DAB**, **DBC** и **DCA**.

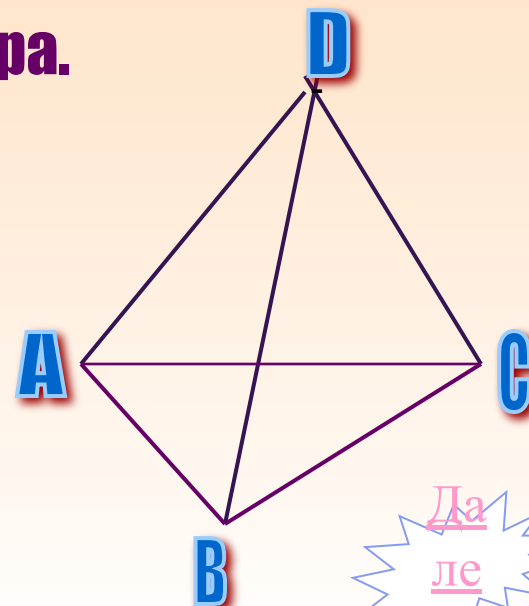


Содержа
ние

Далее

Определения.

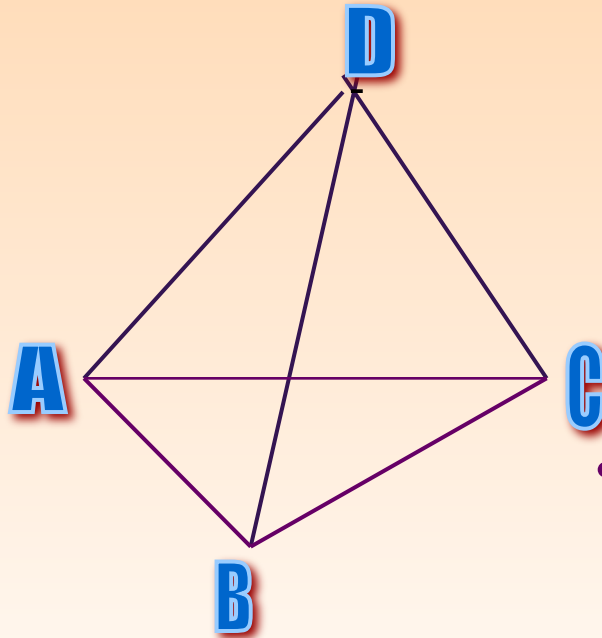
- Поверхность, составленная из четырёх треугольников ABC , DAB , DVC и DSA , называется **тетраэдром** и обозначается так: **$DABC$** .
- Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются **гранями**, их стороны - **рёбрами**, а вершины - **вершинами** тетраэдра.



Содер
жани
е

Да
ле
е

Определения



- Тетраэдр имеет четыре грани, шесть рёбер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются противоположными. На рисунке противоположными являются рёбра **AD** и **BC**, **BD** и **AC**, **CD** и **AB**.
- Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют её основанием, а три другие - боковыми гранями.

- Тетраэдр изображается обычно так, как показано на рисунках 34 и 35, т.е. в виде выпуклого или невыпуклого четырёхугольника с диагоналями. При этом штриховыми линиями изображаются *невидимые рёбра*. На рисунке 34 невидимым является только ребро **АС**, а на рисунке 35 - рёбра **ЕК**, **КF** и **KL**.

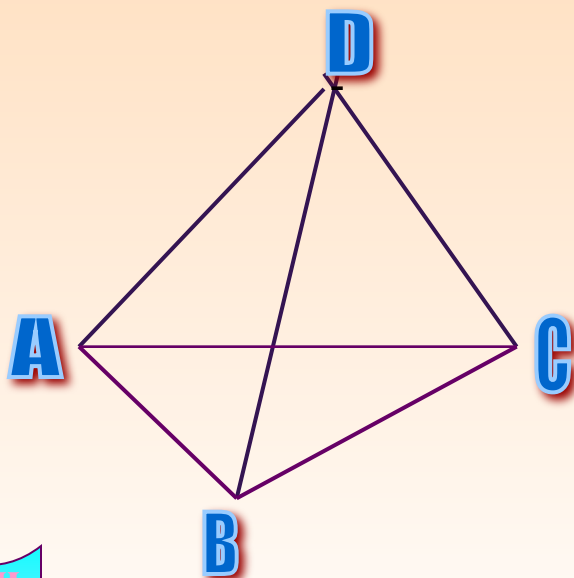


Рис.34.

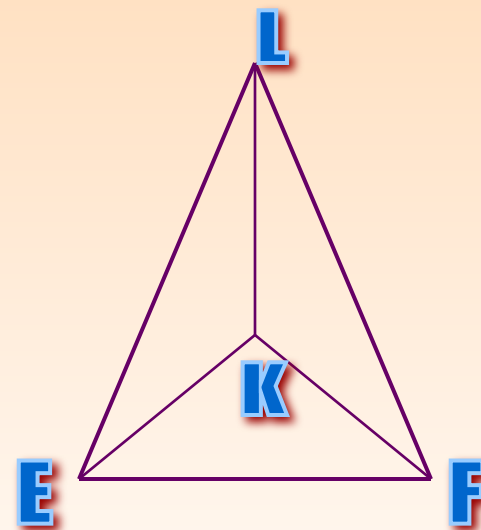
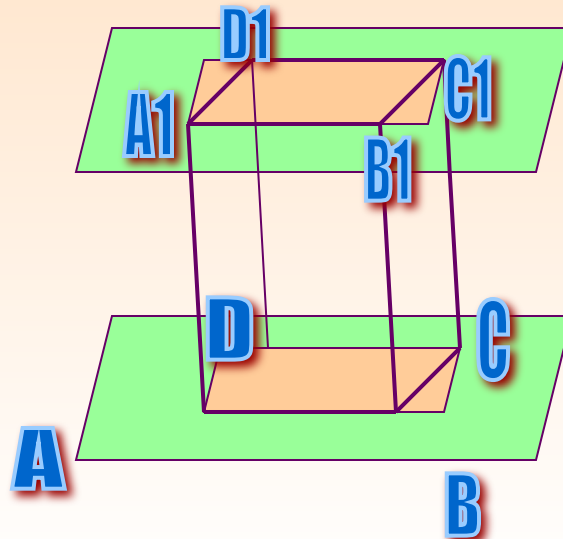


Рис.35.

Параллелепипед.

- Рассмотрим два равных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 параллельны.



Содержание

Содержание

Тетраэдр

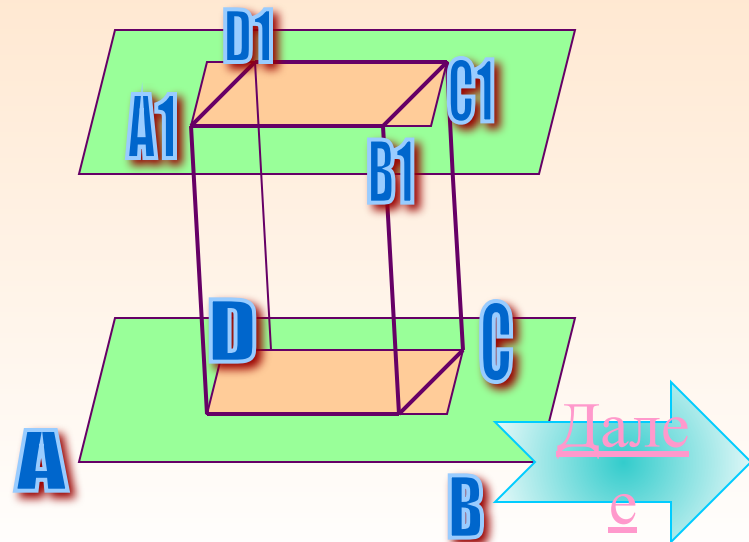
Параллелепипед

*Задачи
на построение
сечений*

Выход

Параллелепипед

- Четырёхугольники ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , CDD_1C_1 , DAA_1D_1 также являются параллелограммами, т.к. каждый из них имеет попарно параллельные противоположные стороны (в четырёхугольнике ABB_1A_1 стороны AA_1 и BB_1 параллельны по условию, а стороны AB и A_1B_1 - по свойству линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей).



Определения

- Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и четырёх параллелограммов, называется параллелепипедом и обозначается так: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются гранями, их стороны - рёбрами, а вершины параллелограммов - вершинами параллелепипеда.

Дале

е

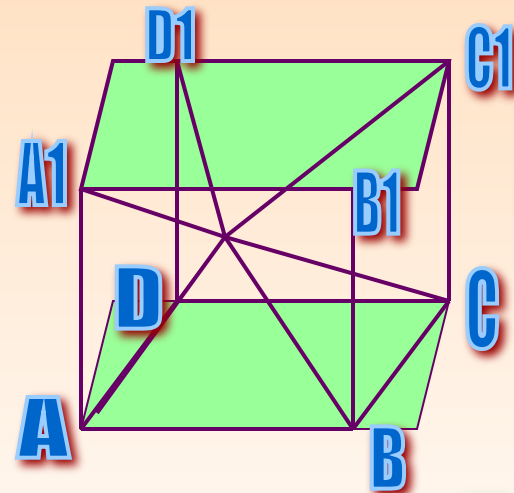
Определения

- Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать рёбер и восемь вершин.
- Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющие общих рёбер - противоположными.

Содержание

Далее

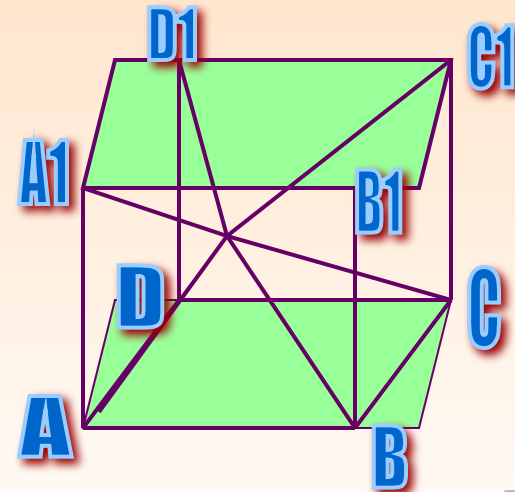
- На рисунке противоположными являются грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1 , ADD_1A_1 и BCC_1B_1 . Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются противоположными.



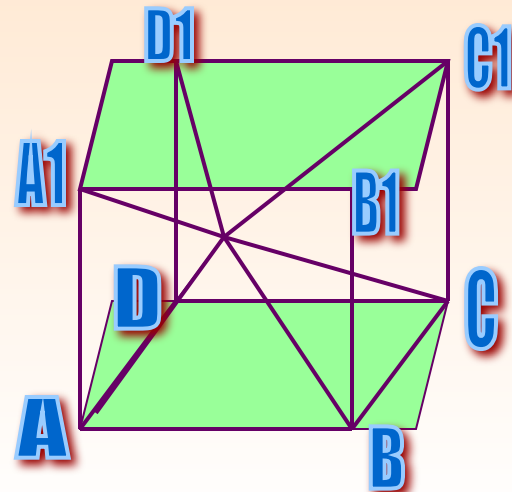
Далее



- Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется диагональю параллелепипеда.
- Каждый параллелепипед имеет четыре диагонали. На рисунке диагоналями являются отрезки AC_1 , BD_1 , CA_1 и DB_1 .



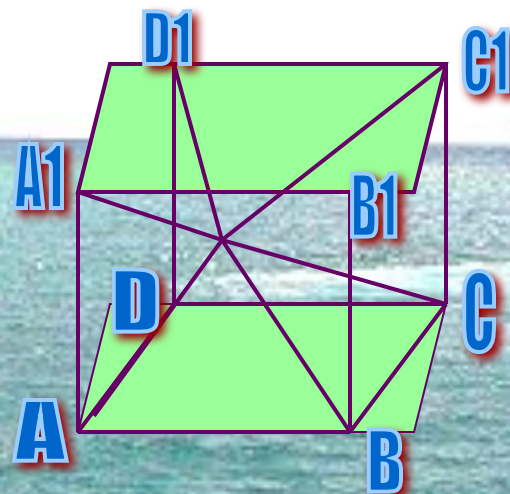
- Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их основаниями, а остальные грани - боковыми гранями параллелепипеда.
- Рёбра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются боковыми рёбрами. Если выбрать грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то боковыми гранями будут параллелограммы, а боковыми рёбрами - отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 .



Свойства параллелепипеда

- 1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

- Докажем, параллельность и равенство граней ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

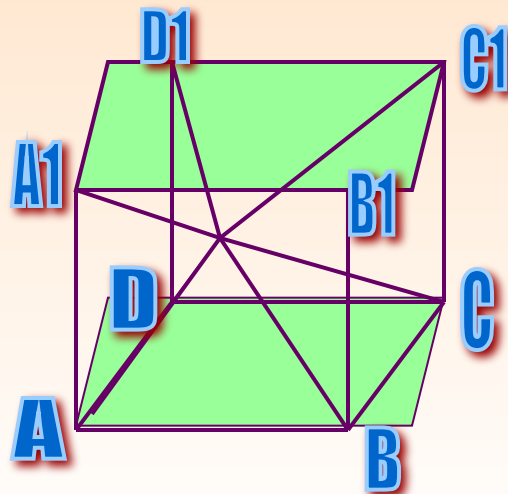


[В содержание](#)

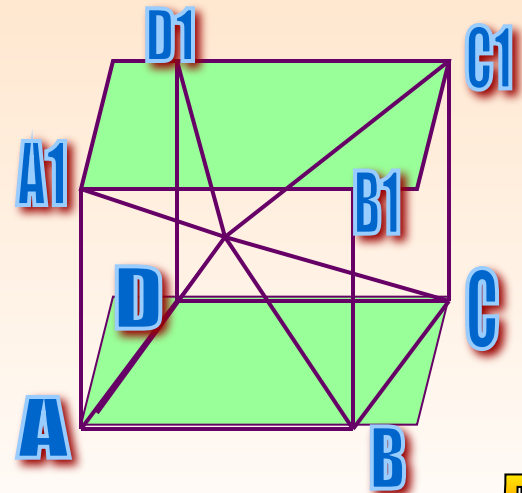
[Далее](#)

Доказательство.

- Т.к. $ABCD$ и ADD_1A_1 - параллелограммы, то $AB \parallel DC$ и $AA_1 \parallel DD_1$. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и AA_1 одной грани соответственно параллельны двум прямым CD и DD_1 другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоскостей следует, что грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллельны.



- Докажем теперь равенство этих граней. Т.к. все грани параллелепипеда - параллелограммы, то $AB=DC$ и $AA_1=DD_1$. По этой же причине стороны углов A_1AB и D_1DC соответственно сонаправлены, и, значит, эти углы равны. Таким образом, две смежные стороны и угол между ними параллелограмма ABB_1A_1 соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними параллелограмма DCC_1D_1 , поэтому эти параллелограммы равны.



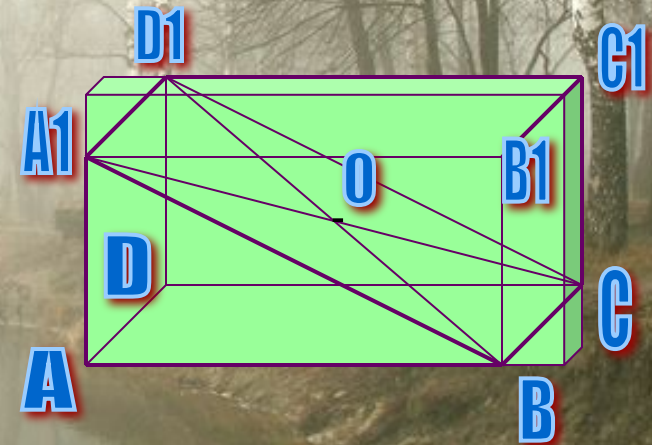
[В содержание](#)

[Далее](#)

- 2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

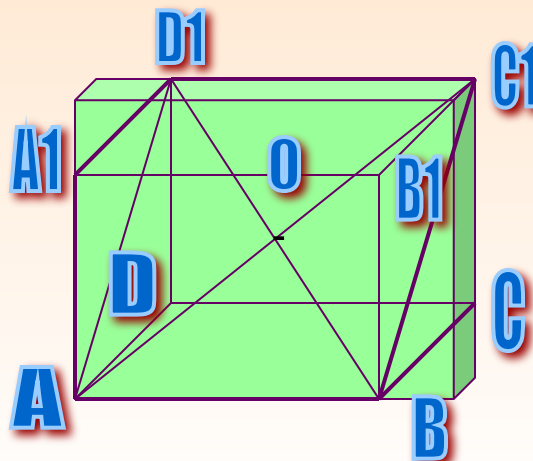
- Рассмотрим четырёхугольник A_1D_1CB , диагонали которого A_1C и D_1B являются диагоналями параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Т.к. $A_1D_1 \parallel BC$ и $A_1D_1 = BC$, то A_1D_1CB - параллелограмм. Поэтому диагонали A_1C и D_1B пересекаются в некоторой точке O и этой точкой делятся пополам.

Пример №1



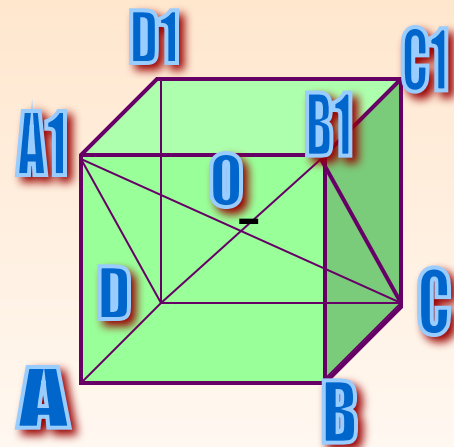
Пример №2

- Рассмотрим четырёхугольник AD_1C_1B . Он также является параллелограммом, и, следовательно, его диагонали AC_1 и D_1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D_1B является точка O . Таким образом, диагонали A_1C , D_1B и AC_1 пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.



Пример №3

- Рассматривая четырёхугольник A_1B_1CD , точно так же устанавливаем, что и четвёртая диагональ DB_1 параллелепипеда проходит через точку O и делится ею пополам.



Задачи на построение с

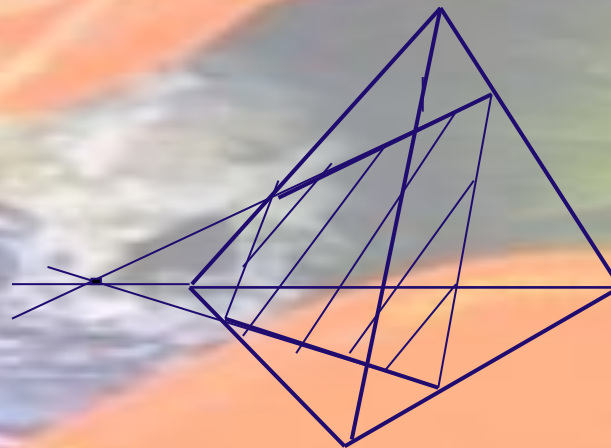
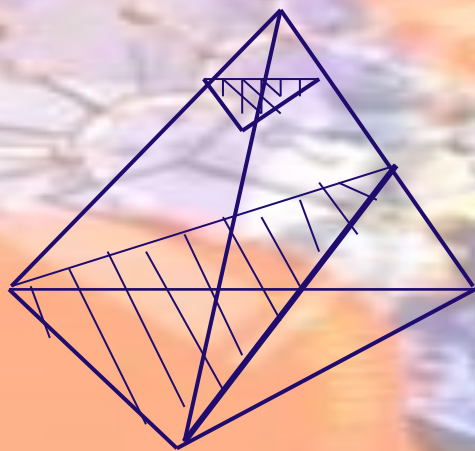
- **Секущей плоскостью** тетраэдра называется любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). **Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра по отрезкам.**
- Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется **сечением** тетраэдра (параллелепипеда).

MACMILLAN

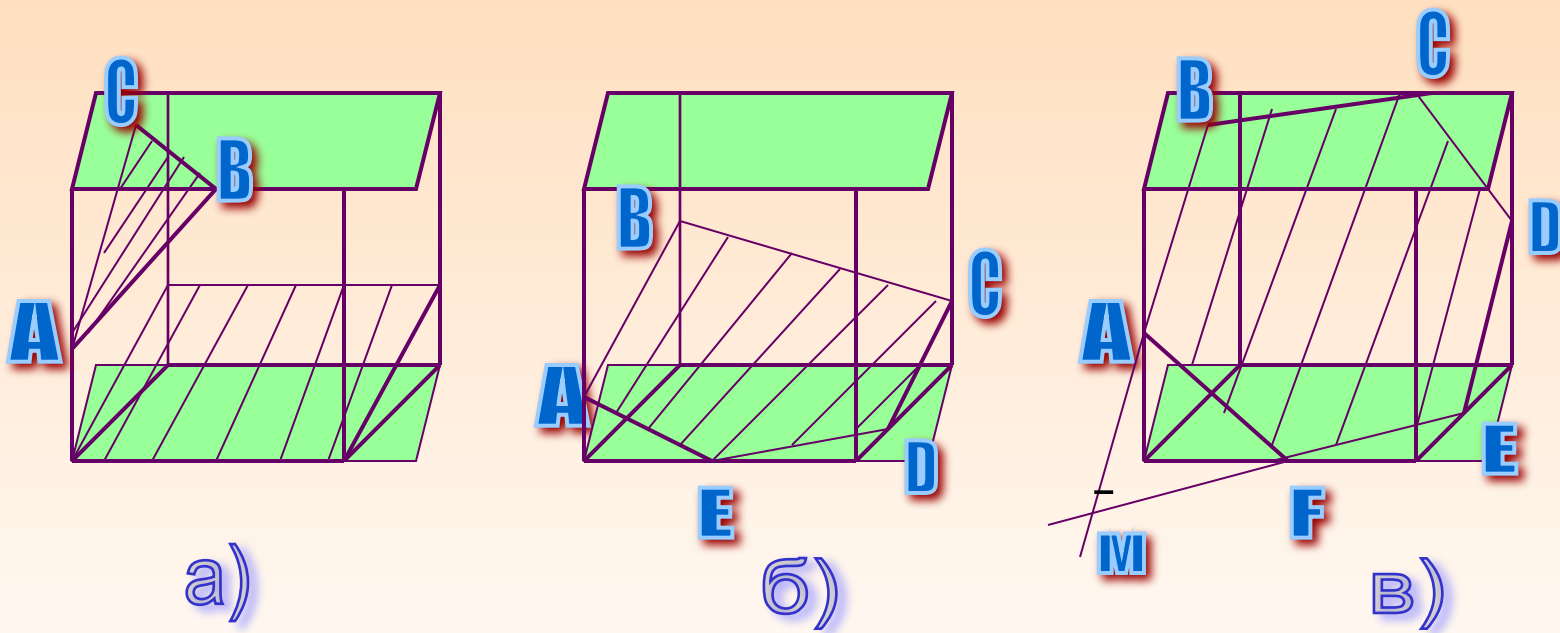
School

DICTIONARY

- **Т.к. тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырёхугольники.**



- Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырёхугольники (рис.39,а), пятиугольники (рис.39,б) и шестиугольники (рис.39,в).



- На рисунке 39,б секущая плоскость пересекает две противоположные грани (левую и правую) по отрезкам **AB** и **CD**, а две другие противоположные грани (переднюю и заднюю) - по отрезкам **AE** и **BC**, поэтому **AB** \parallel **CD** и **AE** \parallel **BC**.

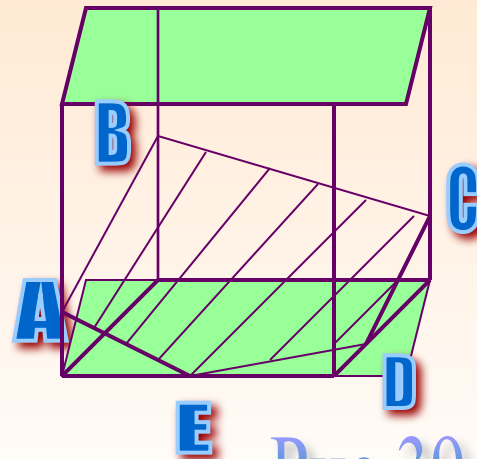


Рис.39. б)

- По той же причине на рисунке 39, в $AB \parallel ED$, $AF \parallel CD$, $BC \parallel EF$. Для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с рёбрами тетраэдра (параллелепипеда), после чего остаётся провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

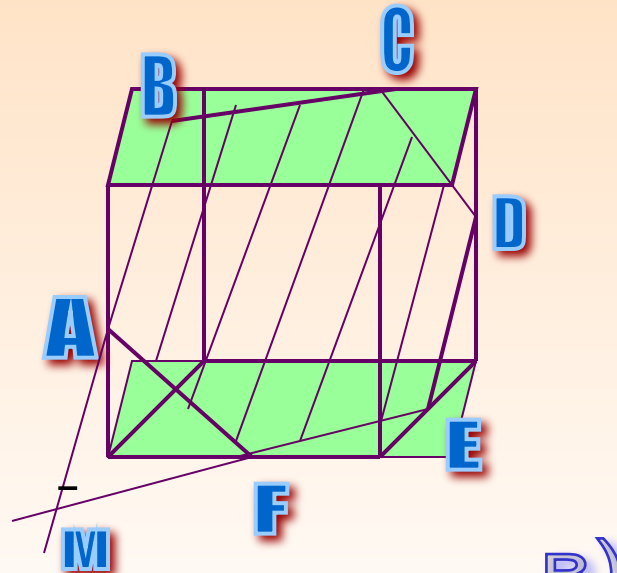
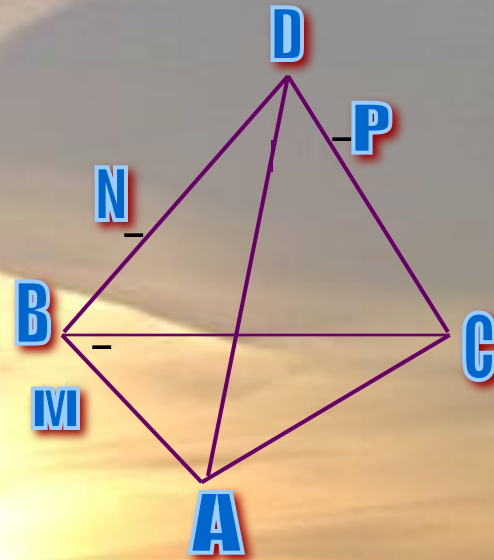


Рис.39. В)

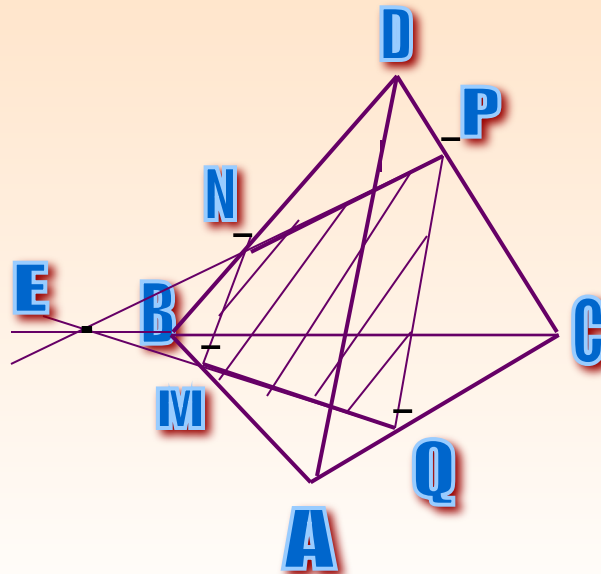
Примеры построения сечений

- **Задача 1.** На рёбрах **AB**, **BD** и **CD** тетраэдра **ABCD** отмечены точки **M**, **N** и **P**. Построить сечение тетраэдра плоскостью **MNP**.

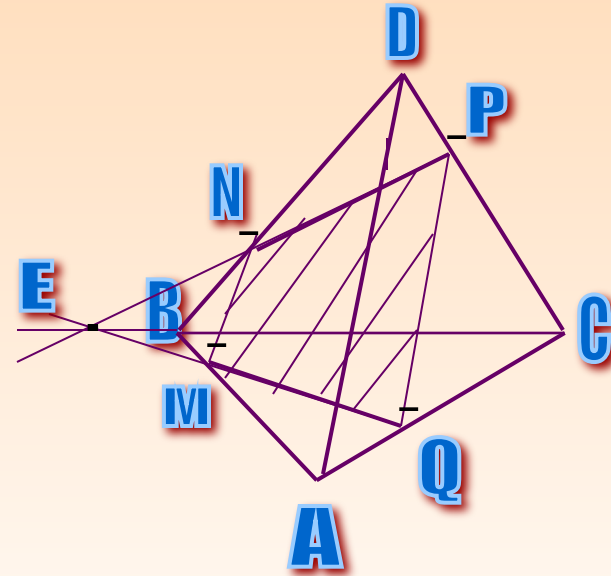


• *Решение.*

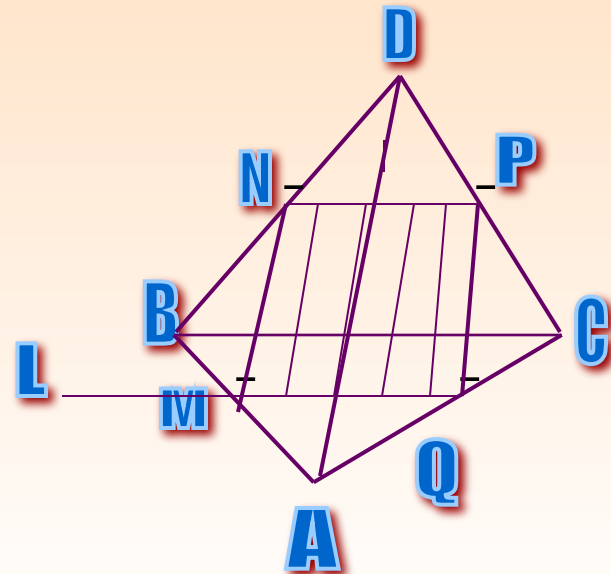
- Построим сначала прямую, по которой плоскость **MNP** пересекается с плоскостью грани **ABC**. Точка **M** является общей точкой этих плоскостей. Для построения ещё одной общей точки продолжим отрезки **NP** и **BC** до их пересечения в точке **E**, которая и будет второй общей точкой плоскостей **MNP** и **ABC**.



- Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME . Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке Q . Четырёхугольник $MNPQ$ - искомое сечение.

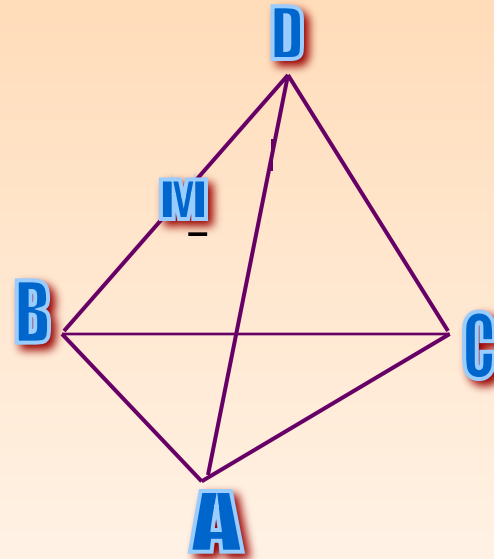


- Если прямые NP и BC параллельны, то прямая NP параллельна грани ABC , поэтому плоскость MNP пересекает эту грань по прямой ML , параллельной прямой NP . Точка Q , как и в первом случае, есть точка пересечения ребра AC с прямой ML .



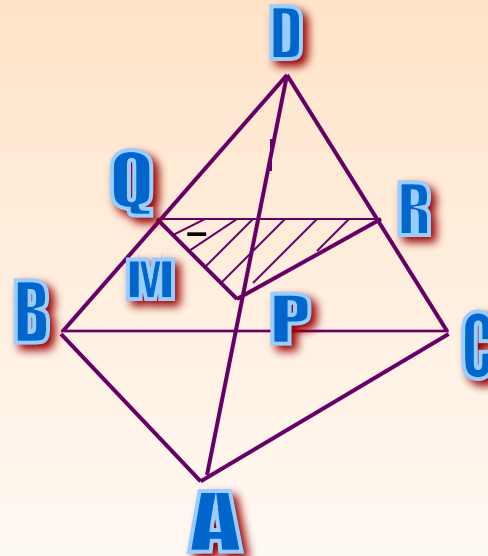
Задача №2

- Точка **M** лежит на боковой грани **ADB** тетраэдра **DABC**.
Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку **M** параллельно основанию **ABC**.

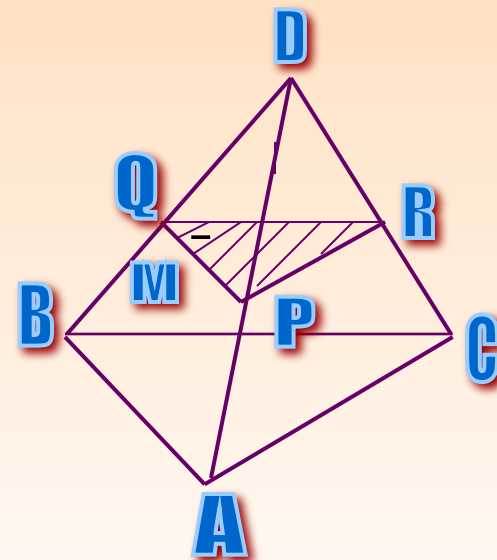


• Решение.

- Т.к. секущая плоскость параллельна плоскости ABC , то она параллельна прямым AB , BC и CA . Следовательно, секущая плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по прямым, параллельным сторонам треугольника ABC .
- Отсюда вытекает следующий способ построения искомого сечения. Проведём через точку M прямую, параллельную отрезку AB .



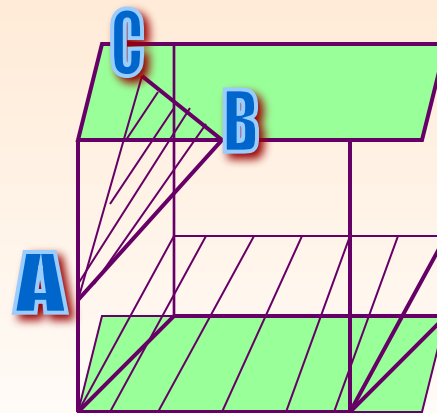
- Обозначим буквами **P** и **Q** точки пересечения этой прямой с боковыми рёбрами **DA** и **DB**. Затем через точку **P** проведём прямую, параллельную отрезку **AC**, и обозначим буквой **R** точку пересечения этой прямой с ребром **DC**. Треугольник **PQR** - искомое сечение.



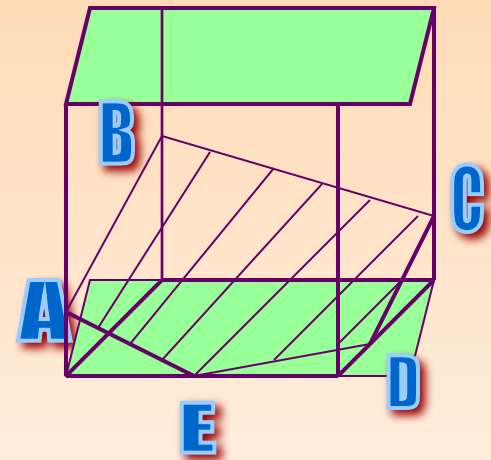
Задача №3

- На рёбрах параллелепипеда даны три точки **A**, **B** и **C**. Построить сечение параллелепипеда плоскостью **ABC**.

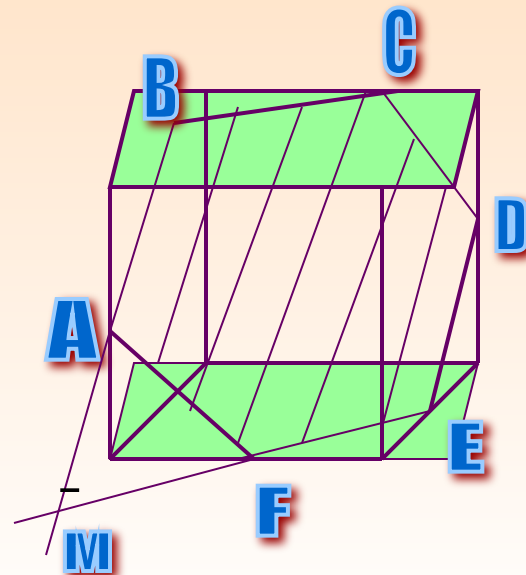
- **Решение**. Построение искомого сечения зависит от того, на каких рёбрах параллелепипеда лежат точки **A**, **B** и **C**. Когда эти точки лежат на рёбрах, выходящих из одной вершины, нужно провести отрезки **AB**, **BC** и **CA**, и получится искомого сечение - треугольник **ABC**.



- Если три данные точки **A**, **B** и **C** расположены так, как показано на рисунке, то сначала нужно провести отрезки **AB** и **BC**, а затем через точку **A** провести прямую, параллельную **BC**, а через точку **C** - прямую, параллельную **AB**. Пересечения этих прямых с рёбрами нижней грани дают точки **E** и **D**. Остаётся провести отрезок **ED**, и искомого сечение - пятиугольник **ABCDE** - построено.



- Более трудный случай, когда данные точки **A**, **B** **C** расположены так, как показано на рисунке. В этом случае сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания.
- Для этого проведём прямую **AB**, до пересечения с этой прямой в точке **M**. Далее через точку **M** проведём прямую, параллельную прямой **BC**. Это и есть прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания.



- Эта прямая пересекается с рёбрами нижнего основания в точках **E** и **F**. Затем через точку **E** проведём прямую, параллельную прямой **AB**, и получим точку **D**. Проводим отрезки **AF** и **CD**, и искомое сечение - шестиугольник **ABCDEF** - построено.

