

Федеральное государственное
образовательное учреждение среднего
профессионального образования
«Димитровградский технический
колледж»

Проект
по теме: «Трансцендентные кривые»



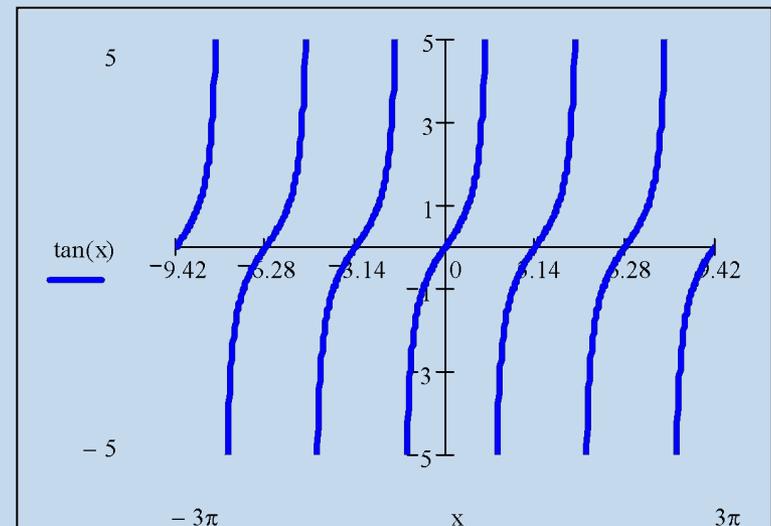
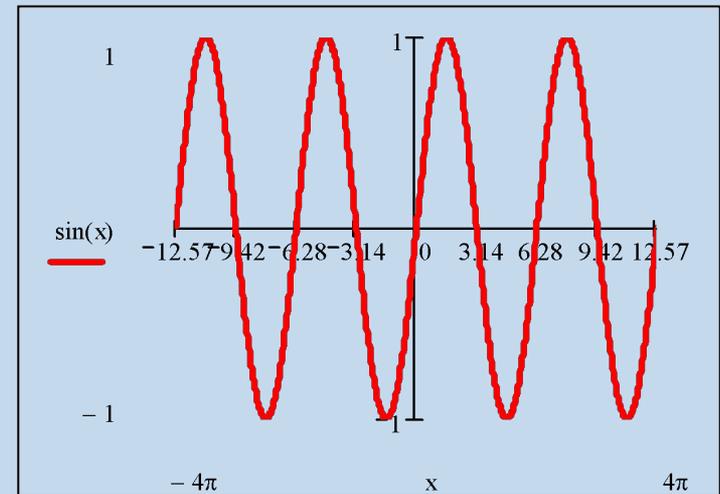
Выполнил: Семенов Алексей
Руководитель: Кузьмина В.В.

Содержание

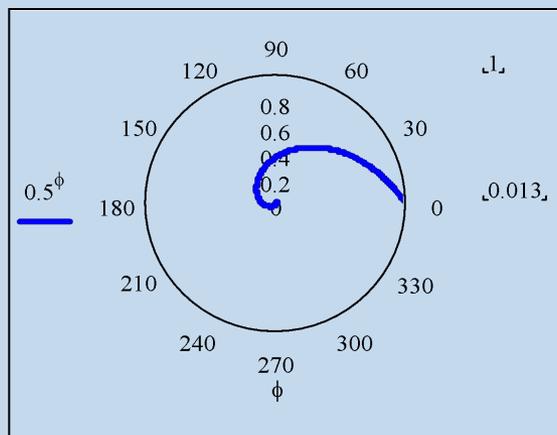
1. Класс трансцендентных кривых
2. Определение трансцендентной кривой
3. Квадратриса
4. Трактриса
5. Цепная линия
6. Циклоида
7. Архимедова спираль
8. Гиперболическая спираль
9. Логарифмическая спираль
10. Спираль Корню, клотоида
11. Трохоида
12. Гипоциклоида
13. Эпициклоида

Большой интересный класс составляют трансцендентные кривые

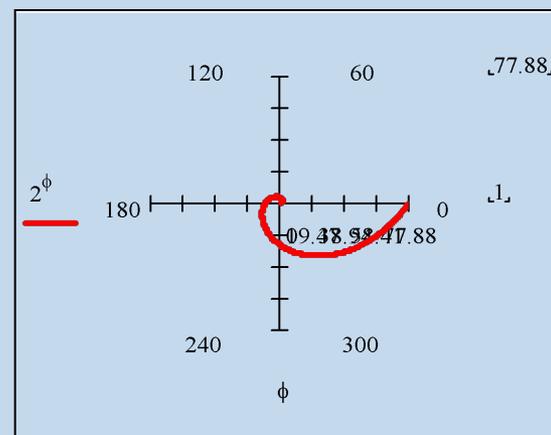
К ним относятся графики тригонометрических функций (синусоида, тангенсоида), логарифмической функции, показательной функции, гиперболических функций, а также много других линий, которые будут рассмотрены в дальнейшем.



Трансцендентная кривая



Логарифмическая
спираль $\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^\varphi$

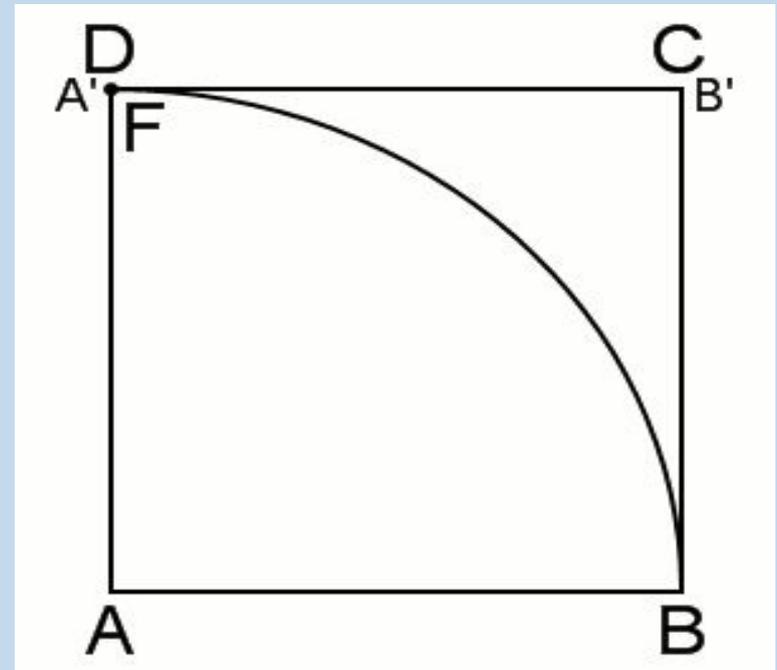
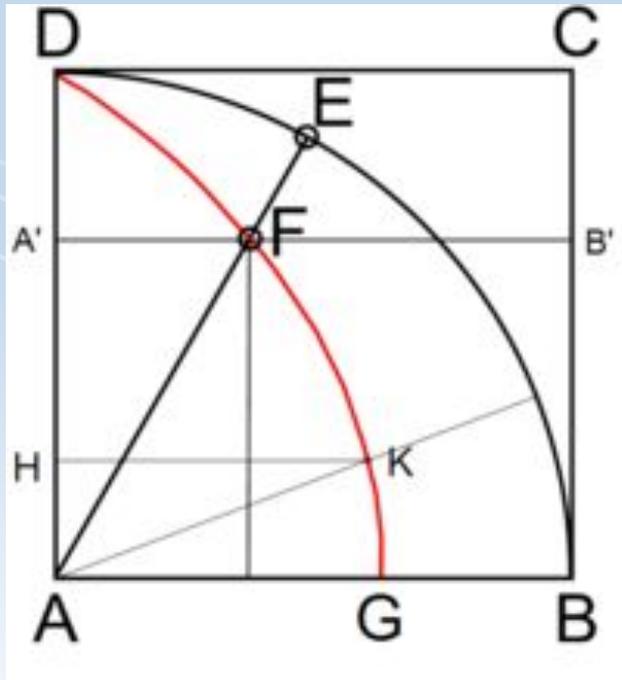


Логарифмическая
спираль $\rho = 2^\varphi$

Трансцендентная кривая - это кривая, уравнение которой в декартовой системе координат не является алгебраическим (в других системах координат может быть алгебраическим.)

Квадратриса

Квадратриса (или **Квадратрисса**) — плоская трансцендентная кривая, определяемая кинематически. Открыта, по сообщению Прокла Диадоха, софистом Гиппием (V век до н. э.), использовалась в античные времена для решения задач квадратуры круга и трисекции угла.



Уравнения

В полярных координатах:

$$\rho = \frac{2R}{\pi} \frac{\varphi}{\sin \varphi}.$$

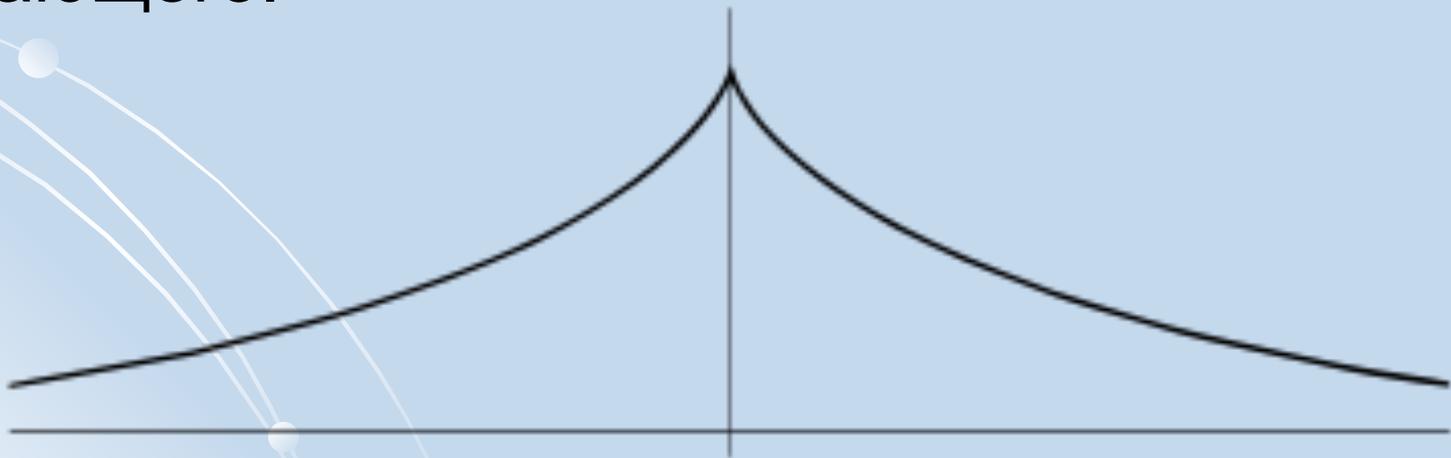
В прямоугольных координатах можно записать уравнение квадратрисы в следующем виде:

$$x = y \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2R}$$

Трактриса

Трактриса (линия влечения) — (от лат. *trahere* — тащить) — плоская трансцендентная кривая, для которой длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой является постоянной величиной.

Такую линию описывает предмет, волочащийся на верёвке длины a за точкой, движущейся по оси абсцисс. Трактриса также является частью кривой погони при равной скорости догоняющего и убегающего.



Уравнения

Параметрическое описание:

$$x = \pm a \cdot \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right)$$

$$y = a \cdot \sin t$$

Уравнение в декартовых координатах:

$$x = \pm \left(a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2} \right)$$

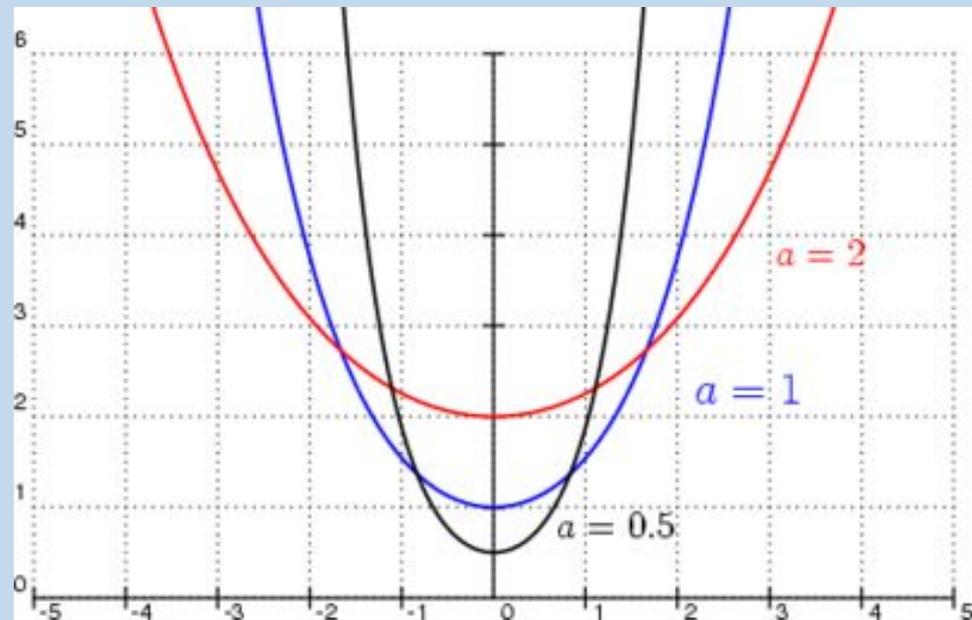
Цепная линия

Цепная линия — линия, форму которой принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжелая нить или цепь (отсюда название) с закрепленными концами в однородном гравитационном поле.

Является плоской трансцендентной кривой.

Уравнение в декартовой системе координат

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$



Краткая историческая справка

Поверхность, образованная вращением дуги цепной линии вокруг оси Ox , называется катеноидом.

Цепные линии используются в расчетах, связанных с провисанием проводов, тросов и т.п. Форму кривой провисания впервые рассматривал Г. Галилей (1638), который считал ее параболой. Истинная форма кривой найдена Г. Лейбницем, Я. и И. Бернулли, Х. Гюйгенсом.

Х. Гюйгенс предложил термин «Цепная линия»



Применение

Арки

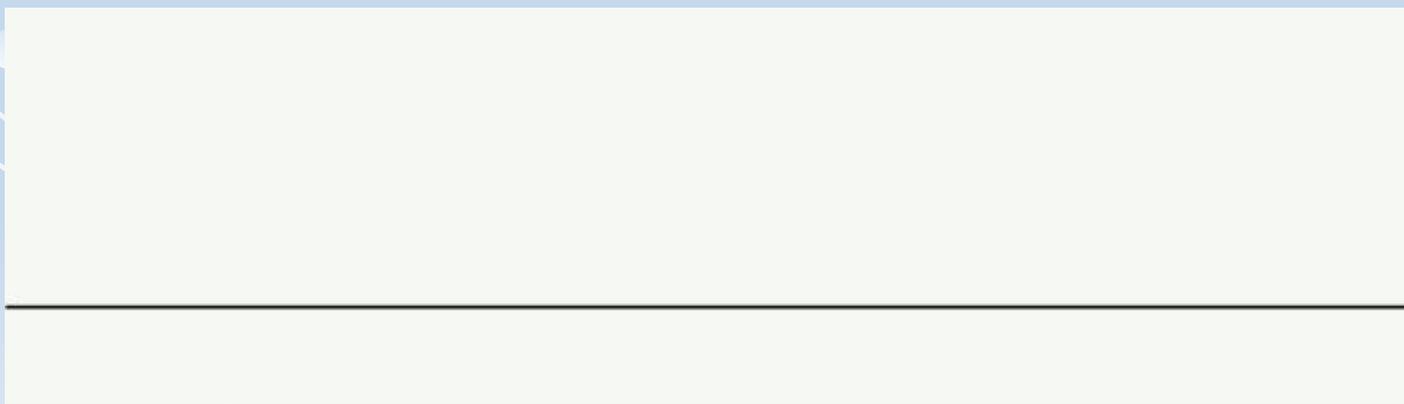
Перевернутая цепная линия — идеальная форма для арок. Однородная арка в форме перевернутой цепной линии испытывает только деформации сжатия, но не излома.

Мосты

Горбатый мост имеет форму, близкую к цепной линии. Стоит заметить, что цепь подвесного моста имеет форму параболы, а не цепной линии. Это связано с тем, что пролёт моста намного тяжелее цепи.

ЦИКЛОИДА

Циклоида (от греч.— круглый) — плоская трансцендентная кривая. Циклоида определяется кинематически как траектория фиксированной точки *производящей* окружности радиуса r , катящейся без скольжения по прямой.



Уравнения

Примем горизонтальную ось координат в качестве прямой, по которой катится производящая окружность радиуса r .

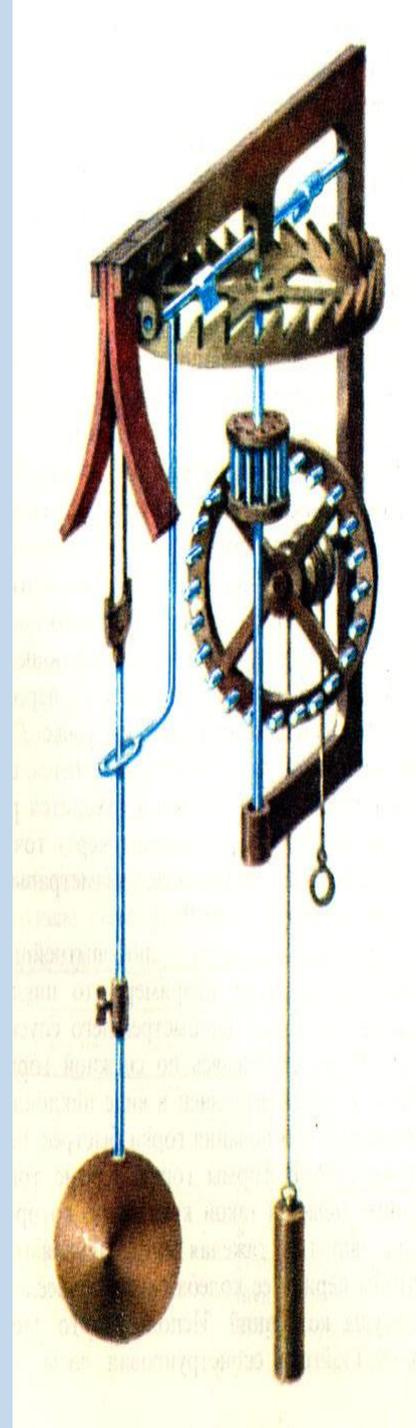
- Циклоида описывается параметрическими уравнениями:
$$x = rt - r \sin t,$$
$$y = r - r \cos t.$$
- Уравнение в декартовых координатах:

$$x = r \arccos \frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$$

- Циклоида может быть получена как решение дифференциального уравнения:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{2r - y}{y}.$$

У циклоиды масса
любопытнейших свойств.
Оказывается, например, что
циклоида является кривой
наибыстрейшего спуска. Иначе
говоря, скатываясь по снежной
горке, профиль которой
выполнен в виде циклоиды,
мы окажемся у основания
горки быстрее, чем в случае
другой формы горки.
Траектория конца маятника, как
и ограничивающие его
боковые "щеки", представляют
из себя циклоиду



Архимедова спираль

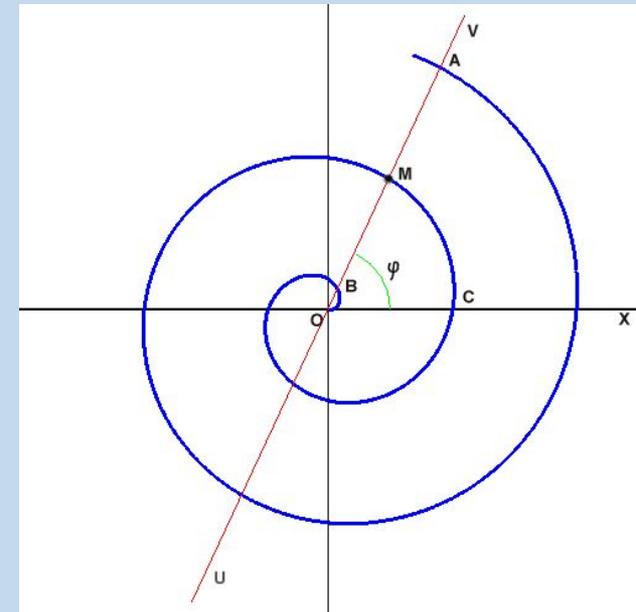
Архимедова спираль — плоская кривая, траектория точки M (см Рис. 1),

1), которая равномерно движется вдоль луча OV

с началом в O , в то время как сам луч OV равномерно вращается вокруг O .

Другими словами, расстояние $\rho = OM$ пропорционально углу поворота φ луча OV .

Повороту луча OV на один и тот же угол соответствует одно и то же приращение ρ .



Вычисление длины дуги Архимедовой спирали

Бесконечно малый отрезок дуги dl равен (см. Рис.):

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + dh^2}$$

где $d\rho$ — приращение радиуса ρ , при приращении угла ϕ на $d\phi$. Для бесконечно малого приращения угла $d\phi$, справедливо:

$$dh^2 = (\rho d\phi)^2$$

Поэтому:

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2}$$

так как $\rho = k\phi$ и

$$d\rho = k d\phi$$

или

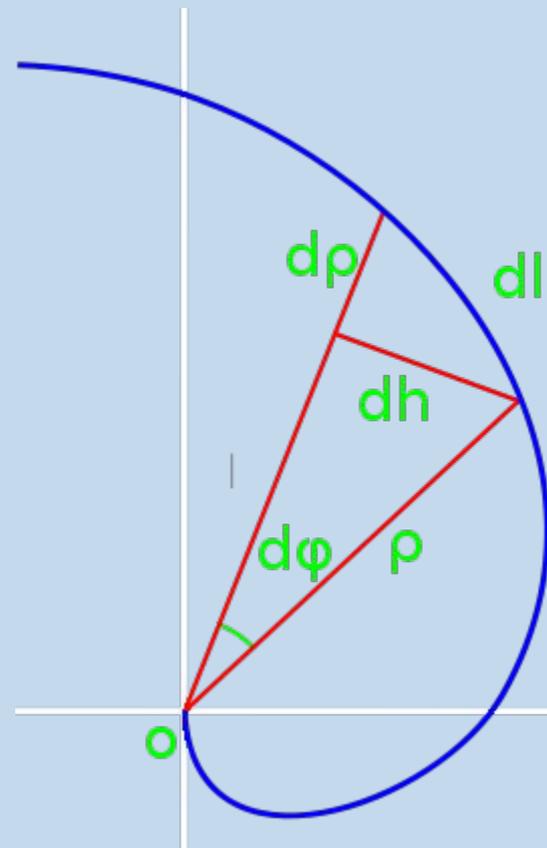
$$dl = \sqrt{k^2 d\phi^2 + k^2 \phi^2 d\phi^2}$$

$$dl = k d\phi \sqrt{1 + \phi^2}$$

Длина дуги L равна интегралу от dl по $d\phi$ в пределах от 0 до ϕ :

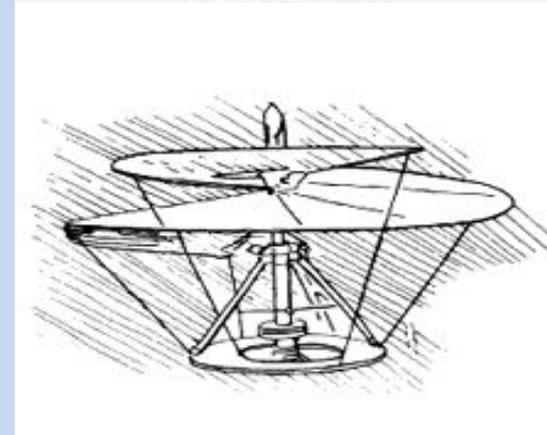
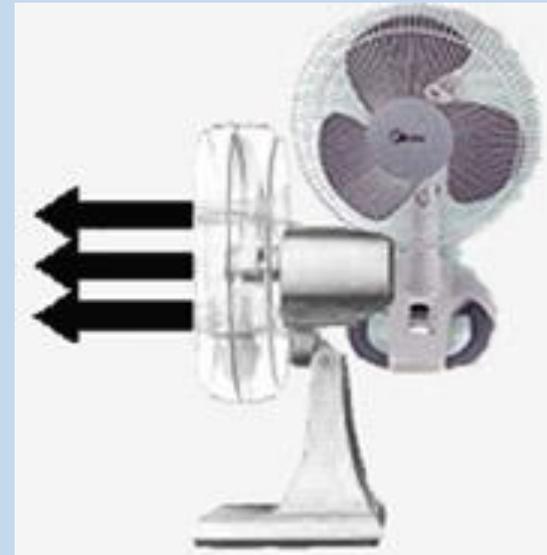
$$L = \int_0^{\phi} k \sqrt{1 + \phi^2} d\phi$$

$$L = \frac{k}{2} \left[\phi \sqrt{1 + \phi^2} + \ln \left(\phi + \sqrt{1 + \phi^2} \right) \right]$$



Спирали в природе и технике

Спирали в нашей жизни встречаются на каждом углу от простых вентиляторов и тисков, до паутины и винтов моторных лодок.



Спирали в природе и технике



Спирали в природе и технике

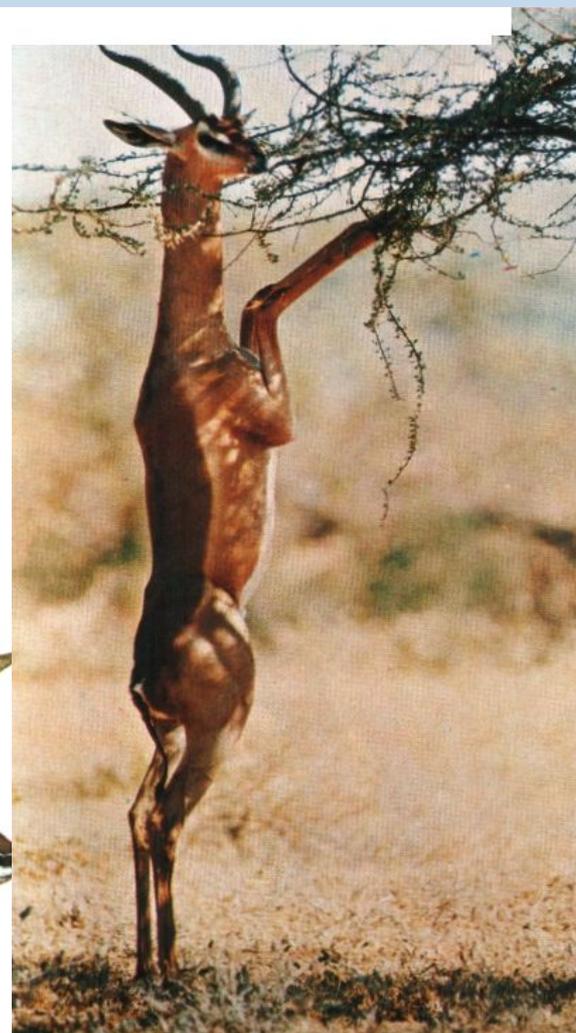


**БОЛОТНЫЙ
КОЗЕЛ**



ВИЛОРОГ

СПРИНГБОК

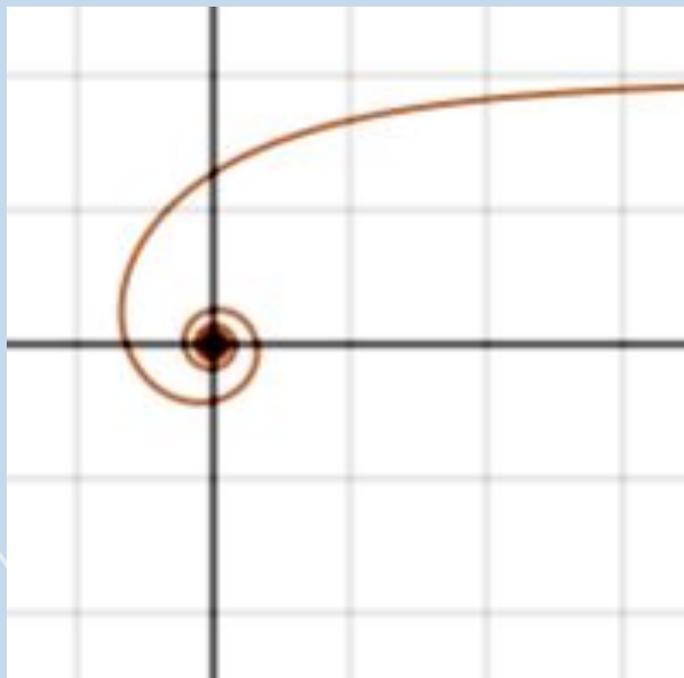


Спиральные галактики



Гиперболическая спираль — плоская трансцендентная кривая.

Уравнение гиперболической спирали в полярной системе координат является обратным для уравнения Архимедовой спирали и записывается так: $\rho = a^\varphi$



Уравнение гиперболической спирали в декартовых координатах:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi,$$

Параметрическая запись уравнения:

$$x = a \frac{\cos t}{t}, \quad y = a \frac{\sin t}{t},$$

Спираль имеет асимптоту $y = a$: при t стремящемся к нулю ордината стремится к a , а абсцисса уходит в бесконечность:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x = a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{t} = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y = a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = a \cdot 1 = a.$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ - плоская трансцендентная кривая, пересекающая все радиусы-векторы под одним и тем же углом μ (рис.1). Уравнение в полярных координатах:

$$\rho = a e^{\varphi}$$

При $a > 1$ и $\varphi \rightarrow +\infty$ логарифмическая спираль разворачивается против хода часовой стрелки, при $\varphi \rightarrow -\infty$ спираль закручивается по ходу часовой стрелки, стремясь к своей асимптотической точке O .

Если $a < 1$, логарифмическая спираль закручивается против хода часовой стрелки.

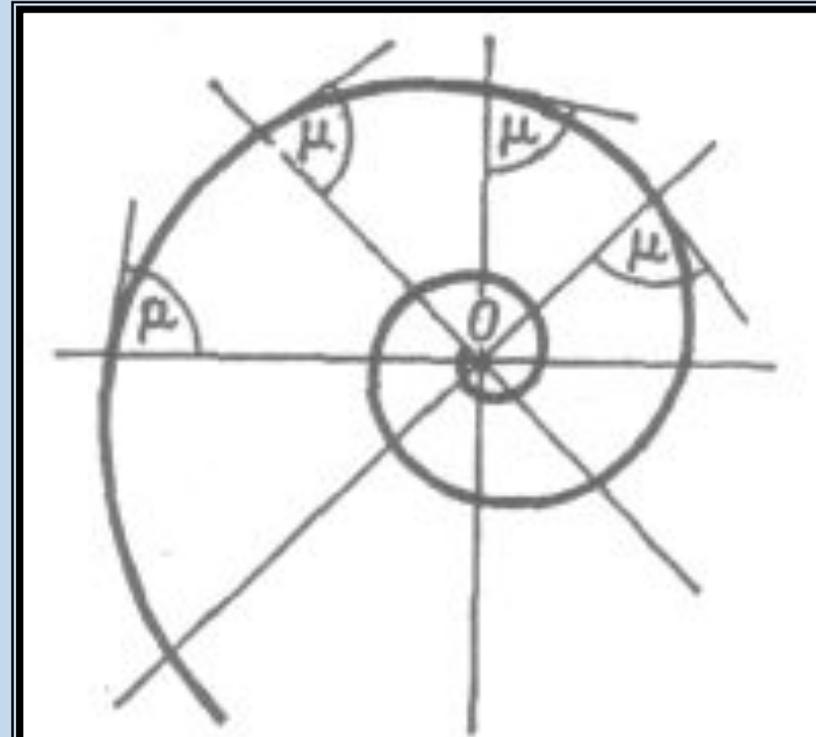
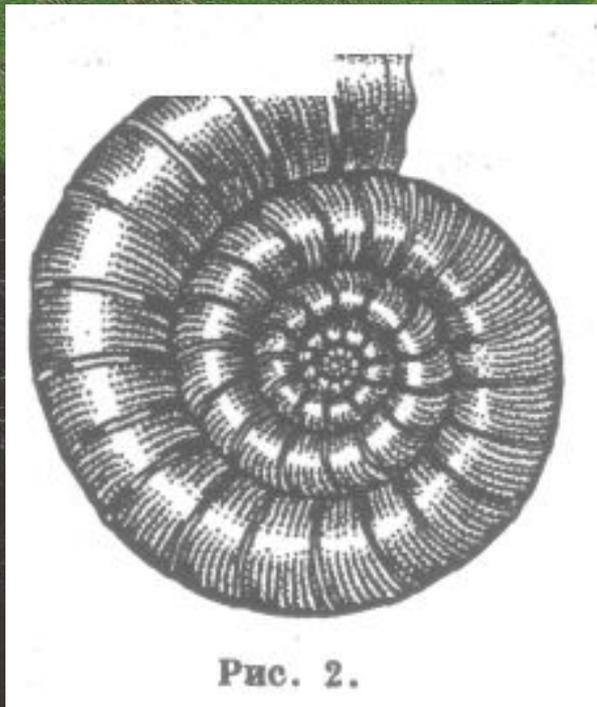
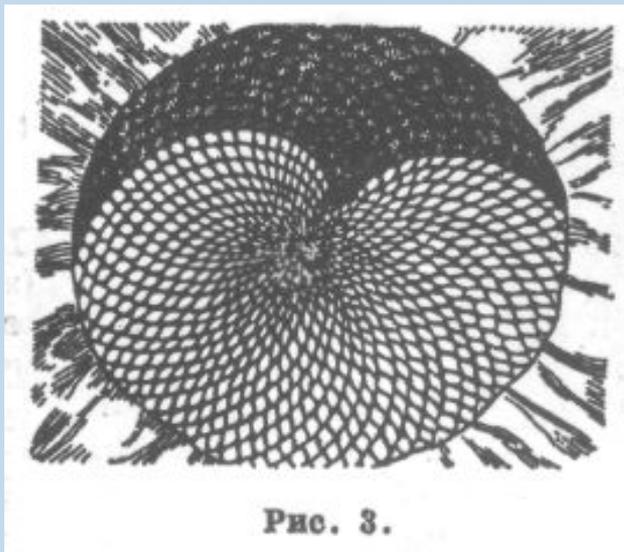


Рис. 1.



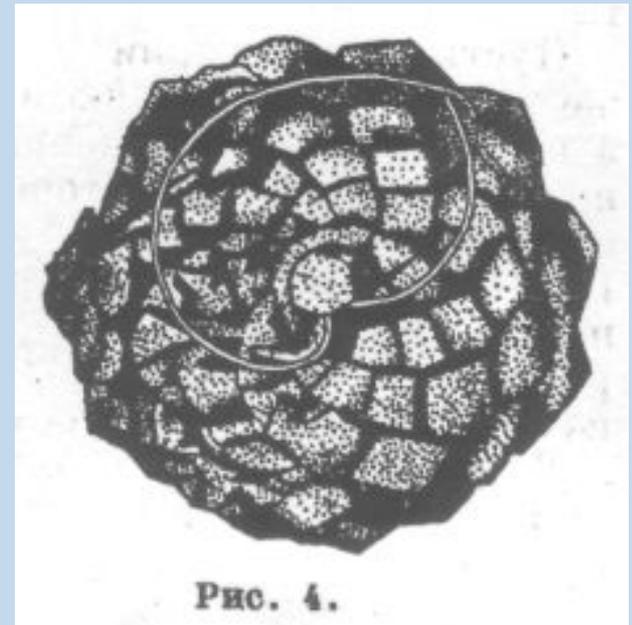
Логарифмическая спираль относится к псевдоспиралям. Логарифмическая спираль переходит в себя при линейных преобразованиях плоскости:

её Эволюта, подера – также логарифмическая спираль. При стереографической проекции плоскости на сферу логарифмическая спираль переходит в локсодромию. Логарифмическая спираль широко используется в технике:



Логарифмическая спираль выполняет профиль вращающихся ножей и фриз, зубчатых передач и др.

По логарифмической спирали очерчены некоторые раковины, по дугам, близким к логарифмической спирали, расположены семечки в подсолнухе, чешуйки в шишках и т.д.

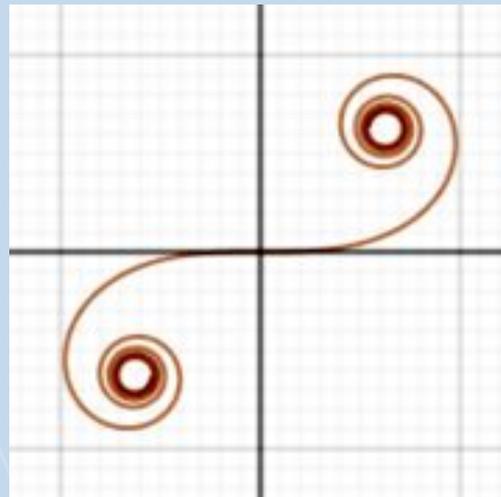


Клотоида или Спираль Корню —

кривая, у которой кривизна изменяется линейно как функция

$$1/R \sim L \Leftrightarrow R \cdot L = \text{const}$$

Она используется как переходная дуга в дорожном строительстве. Когда участок дороги имеет форму клотоиды, руль поворачивается равномерно. Такая форма дороги позволяет преодолеть поворот без существенного снижения скорости. Клотоида применялась Корню для облегчения расчёта дифракции в прикладных задачах.



Описывается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = r(k - 1) \left(\cos t + \frac{\cos((k-1)t)}{k-1} \right) \\ y = r(k - 1) \left(\sin t - \frac{\sin((k-1)t)}{k-1} \right) \end{cases}$$

где $k = \frac{R}{r}$, где R — радиус неподвижной окружности, r — радиус катящейся окружности.

Модуль величины k определяет форму **гипоциклоиды**.

При $k = 2$ гипоциклоида представляет собой диаметр неподвижной окружности, при $k = 4$ является **астроидой**.

Трохоида

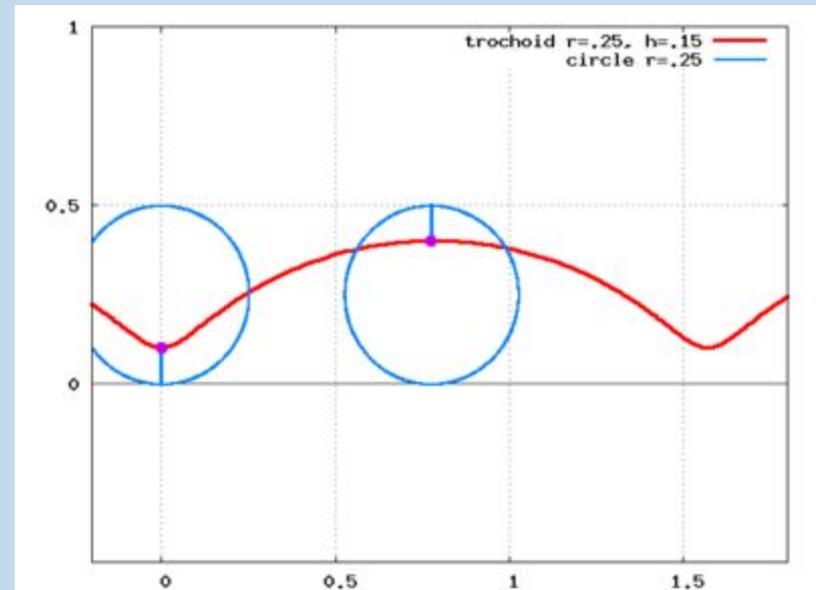
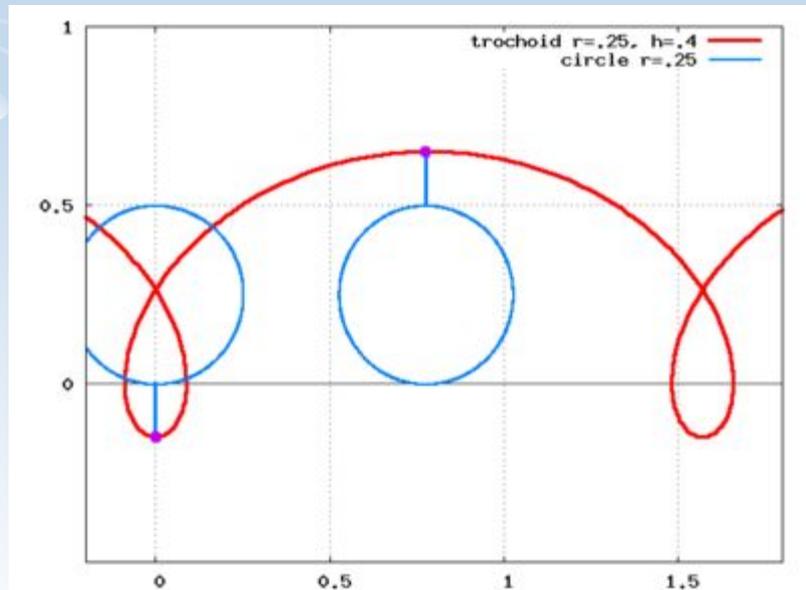
Трохоида (от греч. τροχοειδής — колесообразный) — плоская трансцендентная кривая, описываемая параметрическими уравнениями

- $x = rt - hsint$,
- $y = r - hcost$.

Представляет собой траекторию точки, жёстко связанной с окружностью радиуса r , катящейся без скольжения по прямой (в приведённом примере такой прямой является горизонтальная ось координат). Расстояние точки от центра окружности — h .

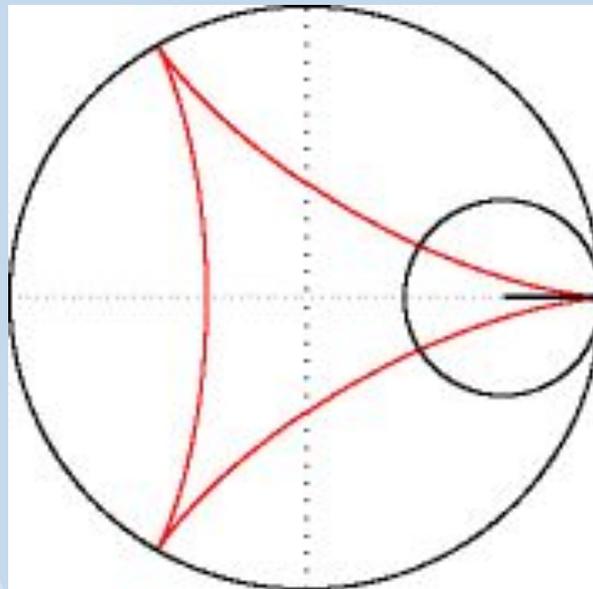
Если $h = r$ трохоида переходит в циклоиду.

При $h > r$ трохоиду называют удлинённой циклоидой, а при $h < r$ — укороченной циклоидой.



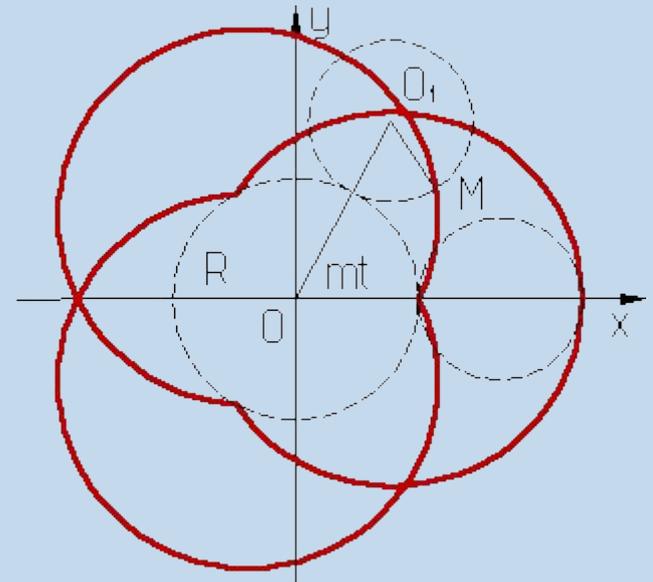
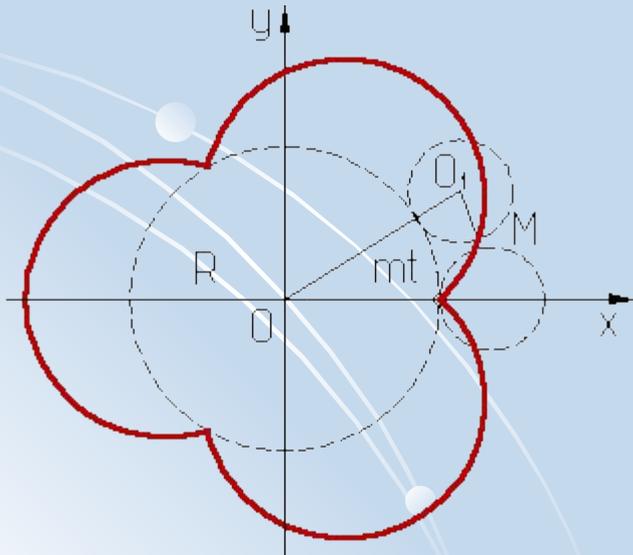
Гипоциклоида

Гипоциклоида (от греческих слов ὑπό — под, внизу и κύκλος — круг, окружность) — плоская кривая, образуемая точкой окружности, катящейся по внутренней стороне другой окружности без скольжения.



Эпициклоида

Эпициклоида (от греч. ἐπί — на, над, при и κύκλος — круг, окружность) — плоская кривая, образуемая фиксированной точкой окружности, катящейся по другой окружности.



Уравнения

Если центр неподвижной окружности находится в начале координат, её радиус равен R , радиус катящейся по ней окружности равен r , то эпициклоида описывается параметрическими уравнениями относительно φ :

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \varphi - r \cos\left(\alpha + \frac{R+r}{r} \varphi\right) \\ y = (R + r) \sin \varphi - r \sin\left(\alpha + \frac{R+r}{r} \varphi\right) \end{cases}$$

где α — угол поворота эпициклоиды относительно центра неподвижной окружности, — параметр, но фактически это угол наклона отрезка между центрами к оси OX .

Можно ввести величину $k = \frac{R}{r}$ тогда уравнения предстанут в

виде

$$\begin{cases} x = r(k + 1) \left(\cos \varphi - \frac{\cos((k+1)\varphi)}{k+1} \right) \\ y = r(k + 1) \left(\sin \varphi - \frac{\sin((k+1)\varphi)}{k+1} \right) \end{cases}$$

Применение

Последнее уравнение выражает такое кинематическое свойство эпициклоиды: если дуга обычной эпициклоиды перекатывается без скольжения по прямой, то центр кривизны точки касания двигается по эллипсу; центр эллипса лежит в той точке прямой, через которую перекатывается вершина эпициклоиды.



Информационные источники

Литература

1. Большой энциклопедический словарь «Математика», Гл. редактор Ю.В. Прохоров, Научное изд-во «Большая Российская Энциклопедия», М.: 1998
2. Д.В. Клетеник Сборник задач по аналитической геометрии под ред. проф. Н.В.Ефимова, Государственное изд-во физико-математической литературы, М.: 1960
3. Математическая энциклопедия. Главный редактор И. М. Виноградов, т.3 – М.: «Советская энциклопедия», 1982

Интернет ресурсы:

www.college.ru

www.gee.ru

