ГЕОМЕТРИЯ

ТЕМА:
ТРАПЕЦИЯ

Выполнил: ученик 10 “Б” класса

Средней школы № 1143

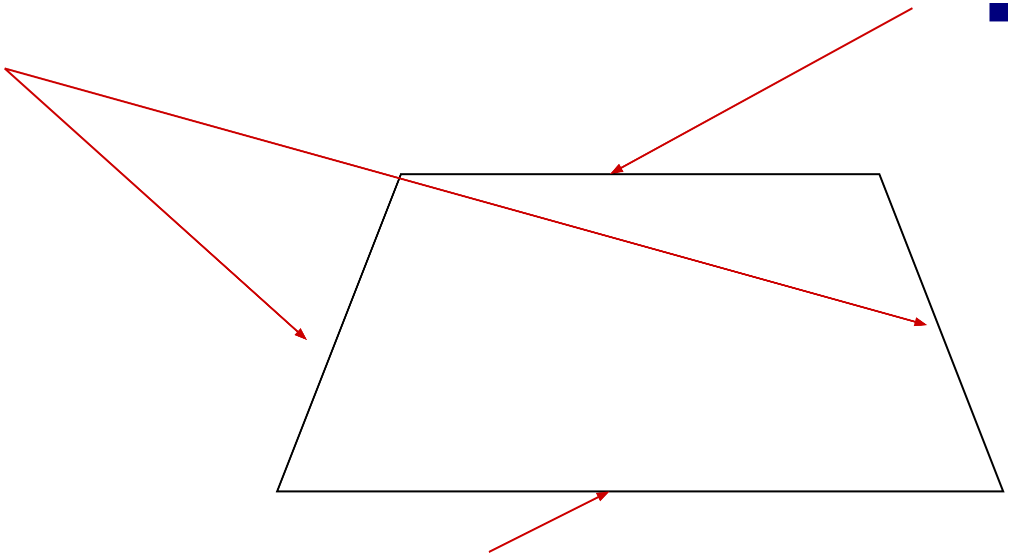
Галкин Владимир

Трапеция- это

четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны

- Основание трапеции

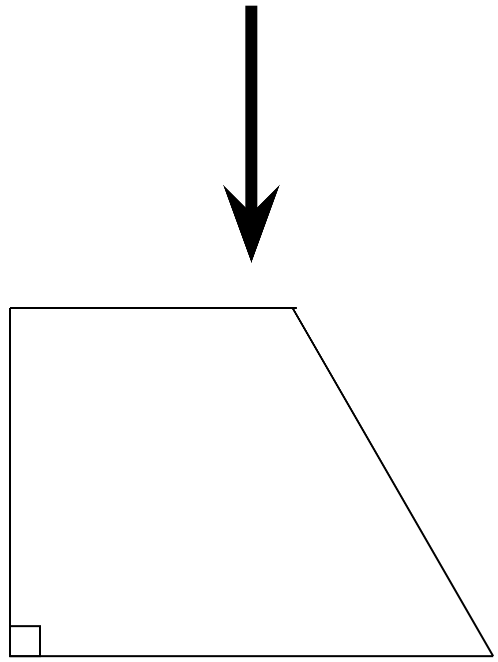
- Боковая сторона

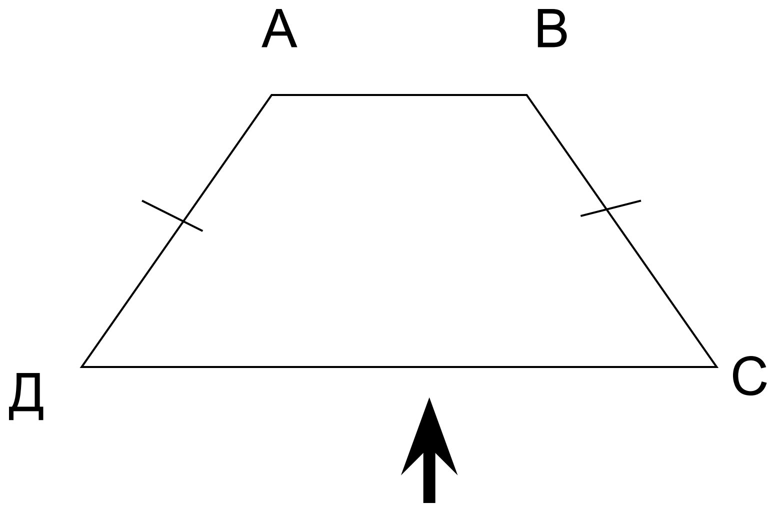


- Основание трапеции

Существуют разные виды трапеции:

- Прямоугольная





- Равнобедренная

Задачи

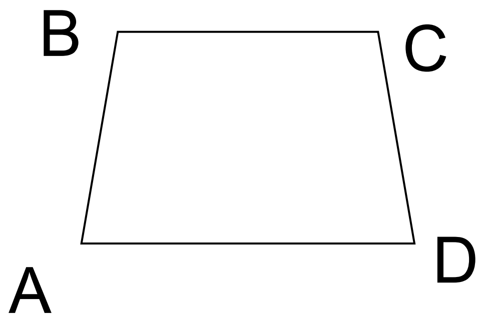
Часть А:

Задача 1:Найдите углы B и D трапеции ABCD с основаниями AD и BC, если $\angle A=36$, $\angle C=117$.

Дано:ABCD-трапеция ; $\angle A=36$; $\angle C=117$

Найти: $\angle B$, $\angle D$

Решение:



$\angle A+\angle B=180$, значит $\angle B=144$.

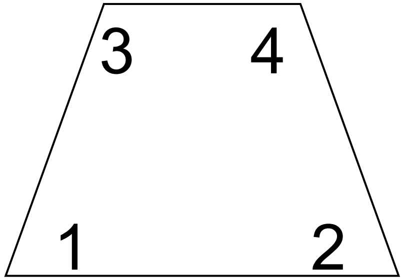
$\angle C+\angle B=180$, значит $\angle D=63$.

Задача 2:Один из углов равнобедренной трапеции равен 68.Найдите остальные углы трапеции.

Дано: трапеция, $\angle 1=68$.

Найти: $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

Решение:



$\angle 1=\angle 2$ (углы при основании равны)

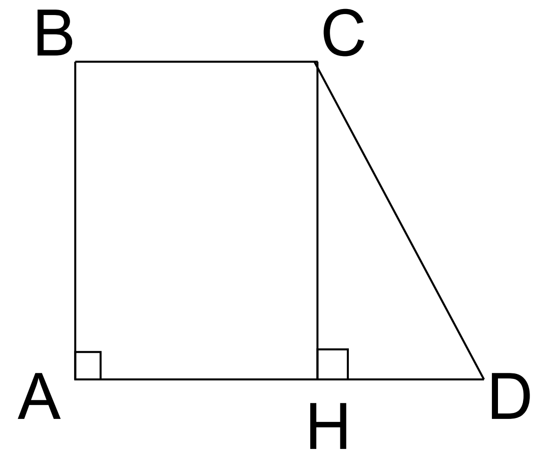
$\angle 3=180-\angle 1=112$.

$\angle 4=\angle 3=112$.

$\angle 2=68$.

Задача 3: Основания прямоугольной трапеции равны 4 и 7, один из углов равен 60.Найти большую боковую сторону трапеции.

Дано:ABCD-трапеция. $\angle D=60$.



BC=4,AD=7.

Найти: CD-?

Решение:

Проведем высоту CH.

Тогда HD=AD-BC=3.

Применим теорему синусов

$$\frac{HD}{\text{Sin } 30} = \frac{CH}{\sin 60}$$

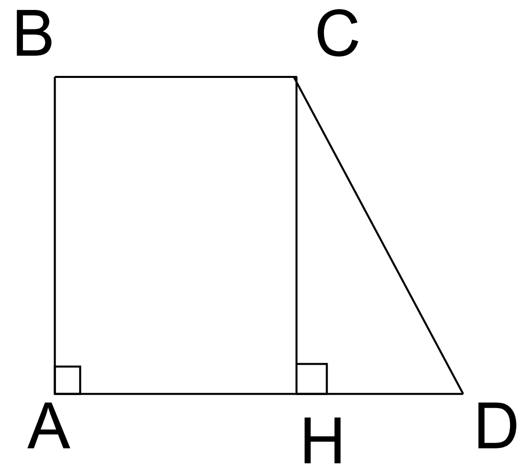
Отсюда CH= 3 корня из 3

$CD^2=9+27=36$ (Теорема Пифагора)

CD=6.

Задача 4: Найти площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6, а больший угол равен 135^o.

Дано:ABCD-трапеция, $\angle$A=90;AB=BC=6; $\angle$BCD=135^0



Найти: S-?

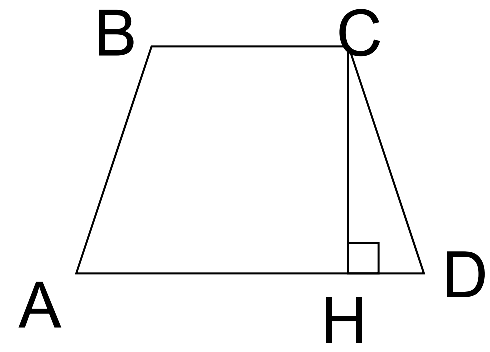
Решение:

$\angle$HCD=135-90=45; $\angle$CDH=45.

$\frac{DH}{\sin 45} = \frac{CH}{\sin 45}$ Отсюда DH=6

S=0,5 (BC+AD) CH=0,5(5+12)6=54

Задача 5: Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135, а высота, проведенная из вершины этого угла делит основания на отрезки 1,4 см и 3,4 см.Найти площадь трапеции.



Дано:ABCD-трапеция.AB=CD.AH=3,4.

HD=1,4.$\angle$BCD=135.

Найти: S-?

Решение:

$\angle$HCD=$\angle$CDH= 45.

$$\frac{HD}{\sin 45} = \frac{CH}{\sin 45}$$

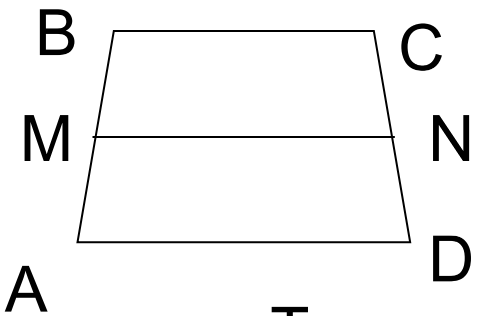
Отсюда CH=1,4

S= 0,5(2+4,8)1,4=4,76.

Задача 6: Основания трапеции относятся как 2:3, а средняя линия равна 5. Найти основания.

Дано: трапеция ADCD.MN=5.

BC:AD=2:3.



Найти: AD;CD.

Решение:

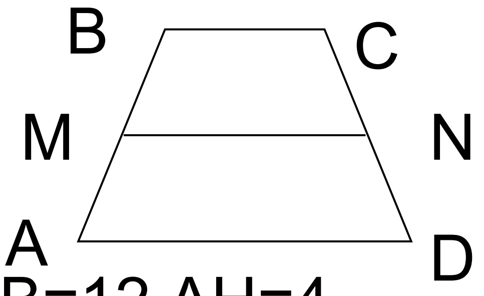
Пусть x- коефиециент пропорциональности. Тогда BC=2x,AD=3x. MN=0,5(AD+BC)

2,5x=5

X=2.

Значит AD=6, а BC=4.

Задача 7: Дана равнобокая трапеция. Средняя линия равна боковой стороне. Основания равны 8 и 16. Найти площадь трапеции.



Дано: ABCD- трапеция.AB=CD;MN=AB;

BC=8;AD=16.

Найти: S

Решение: MN=0,5(BC+AD)=12.Значит AB=12.AH=4

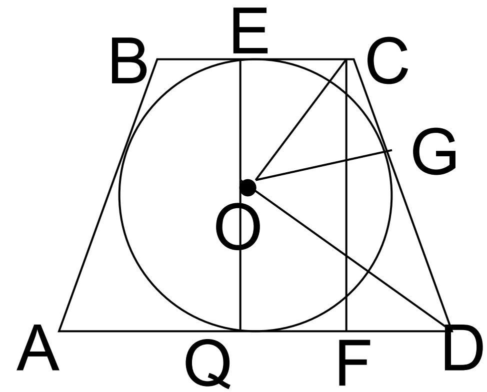
$BH^2=AB^2-AH^2$;

$BH^2= 144-16$

BH=8 корней из 2ж

S=MN BH=96 корней из 2

Задача 8: В равнобедренную трапецию, основания которой равны 18 и 6, вписан круг. Найдите его радиус и углы трапеции.



Дано: ABCD-трапеция.AD=18;BC=6

Найти:OG-?

Решение:

EC=CG (по равным треугольникам)

DG=DQ (по равным треугольникам)

EC=0,5 BC=3 Значит CG=3

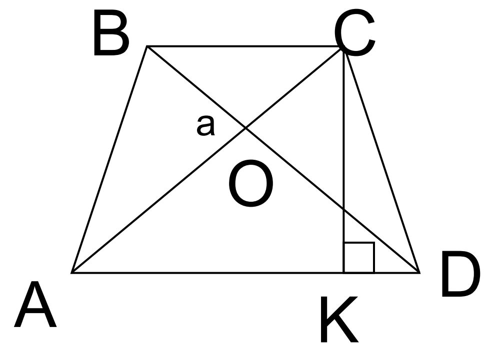
DQ=0,5 AD=9 Значит DG=9

OG^2= CG DG=27

OG=3 корень из 3.

Часть Б

Задача 1: Площадь равнобокой трапеции равна S, угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен a. Найти высоту трапеции.



Дано: ABCD- трапеция; S- её площадь

∠a .BC и AD основания.

Найти: CK-?

Решение:

Пусть O – точка пересечения диагоналей данной трапеции ABCD, AB=CD, ∠AOB=a.

Т.к ∠AOB- внешний угол △AOD, AO=OD,то ∠CAD= $\frac{a}{2}$.

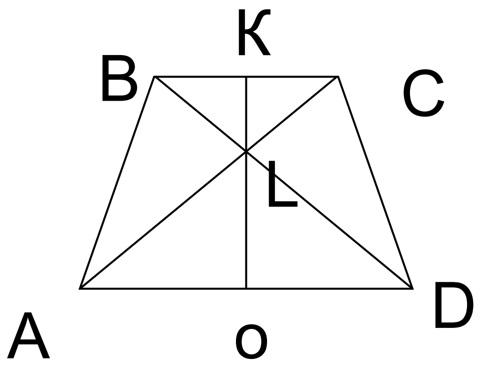
Пусть CK=H- высота трапеции

Из △AKC (∠AKC=90); AK=H ctg $\frac{a}{2}$

Тогда площадь трапеции S = 0,5(AD+BC)CK=AK CK= H^2 ctg $\frac{a}{2}$

H=корень из S tg $\frac{a}{2}$

Задача 2: Большее основание вписанной в круг трапеции равно диаметру круга, а угол при основании равен а. В каком отношении точка пересечения диагоналей трапеции делит её высоту?



Дано: ABCD- трапеция.

Найти:

Решение:

Пусть основание AD равнобокой трапеции ABCD есть диаметр круга, описанного около трапеции, тогда центр O круга – середина AD.

Высота KO трапеции проходит через точку L пересечения диагоналей, $\triangle$BLC подобен $\triangle$ALD,

KL:LO=LC:LD.

$\angle$ACD- вписанный, опирающийся на диаметр , поэтому

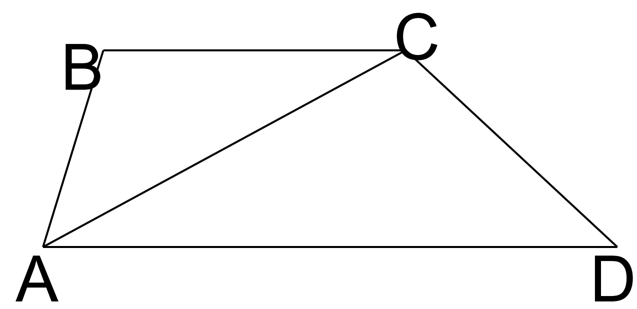
$\angle$ACD=90. $\angle$ACD и AOL- прямоугольные с общим острым углом при вершине A.Отсюда, $\angle$ALO= $\angle$ADC=a.

Тогда $\angle$KLC= $\angle$OLD=a, $\angle$CLD=180-2a,из DLCD

($\angle$LCD=90);

LC:LD=cos$\angle$CLD=cos (180-2a)=-cos2a.

Задача 3: Угол при вершине A трапеции ABCD равен a. Боковая сторона AB вдвое больше меньшего основания BC. Найти угол BAC.



Дано: ABCD-трапеция.AB=2BC

Найти: $\angle$BAC

Решение:

Пусть $\angle$BAC =$\mathcal{F}$.

= =

Тогда BCA= CAD=a- $\mathcal{F}$.Из $\triangle$ABC:

$$\frac{\text{Sin } \mathcal{F}}{\text{Sin } (a-\mathcal{F})} \qquad \frac{BC}{AB}$$

Отсюда следует 2sin $\mathcal{F}$=sin a cos $\mathcal{F}$ – sin $\mathcal{F}$ cos a

2=sin a ctg $\mathcal{F}$ – cos a

$$\frac{\text{Sin a}}{\text{tg } \mathcal{F}} = 2+\cos a; \ \mathcal{F} = \text{arctg} \frac{\text{Sin a}}{2+\sin a}$$

Задача 4: В круг вписана трапеция. Большее основание трапеции составляет с боковой стороной угол а, а с диагональю- угол ф.Найти отношение площади круга к площади трапеции.

Решение:

Пусть AD- большее основание

данной трапеции ABCD,

∠BAD=a, ∠BDA=Ф,

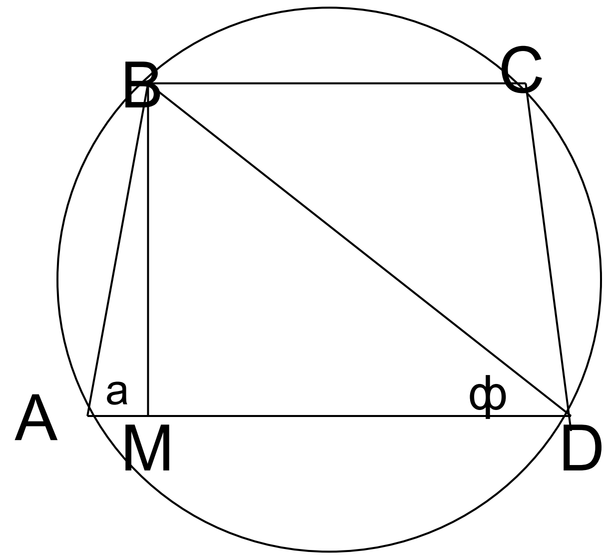
BM-высота трапеции

И BD= 1.

Тогда из △BMD (∠BMD=90);

BM=BD sin ∠BDM= sin ф;

DM=BD cos ∠BDM=cos ф;



Площадь трапеции

$$S1=\frac{AD+BC}{2}BM = DM\,BM=\sin\phi\cos\phi=\frac{\mathrm{Sin}\,2\phi}{2}$$

Радиус R круга, описанного около $\triangle BAD$: $R=\dfrac{BD}{2\sin\angle A}=$

$=\dfrac{1}{2\sin a}$. Тогда площадь круга $S2=\P R^2=$

$$=\frac{\P}{4\sin^2 a}$$

Таким образом, $\dfrac{S1}{S2}=\dfrac{\P}{2\sin^2 a\,\sin 2\phi}$

ЧАСТЬ С

Дана трапеция ABCD с основаниями AD и BC.Прямая KL пересекает диагональ BD в точке O. К принадлежит AB.L принадлежит CD.Отношение большего основания к меньшему как 2 к 1 (AD:BC=2:1). AK:KB=1:2;CL:LD=1:2.Найти отношение BO к LD.

Дано: ABCD-трапеция.

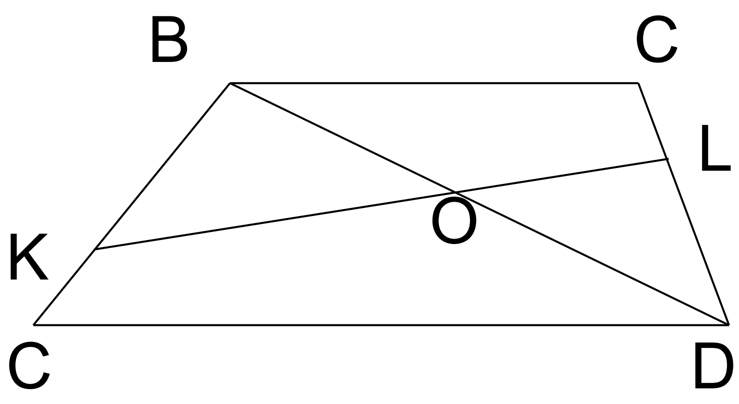
KL пересекает BD в точке O

K€AB;L€CD;

AD:BC=2:1; AK:KB=1:2;

CL:LD=1:2.

Найти: BO:OD



(примечание знак € означает принадлежит)

Решение:

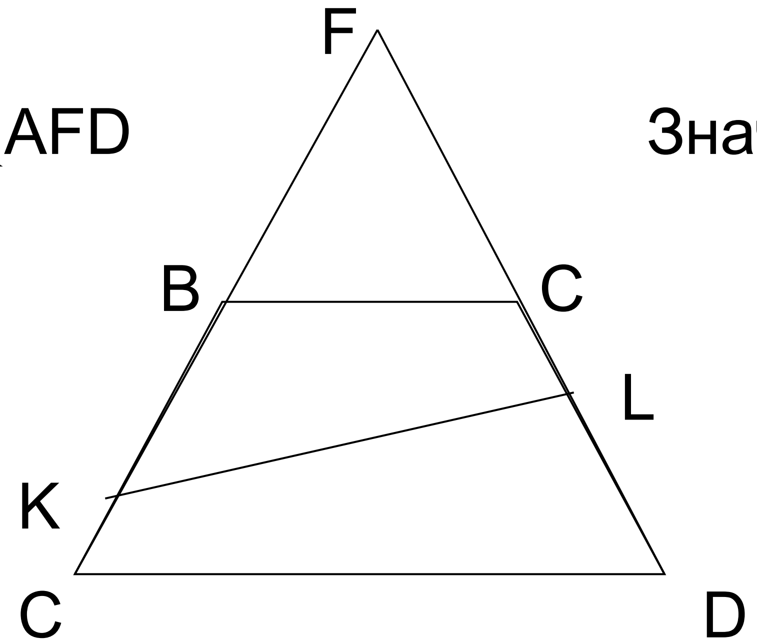
1)AK:KB=1:2. значит AK=x; KB=2x; AB =3x.

CL:LD=1:2. значит CL=y; LD=2y; CD =3y.

2) Продолжим боковые стороны до пересечения в точке F

$\triangle$BFC подобен $\triangle$AFD

Значит AF:BF=AD:BC;



$$\frac{3x+BF}{BF} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{3x}{BF} + 1 = 2$$

BF=3x

AF=6x

Аналогично

FC=3y; FD=6y.

3)По теореме Менелая $\triangle$BFD и секущая KL

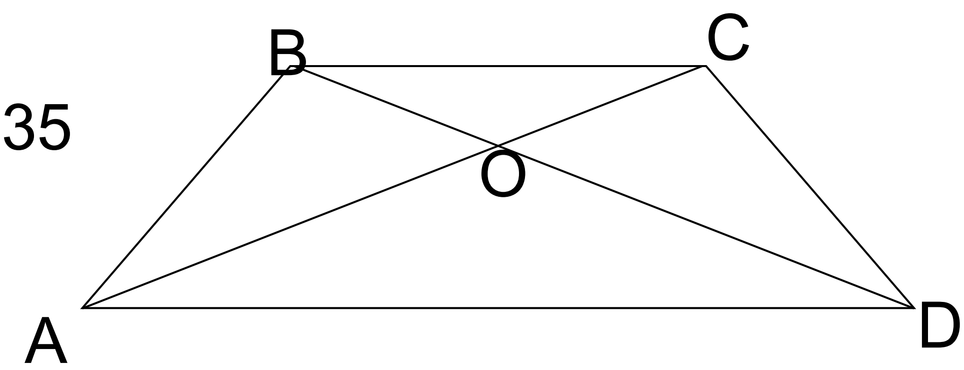
$$\frac{FL\ DO\ BK}{LD\ BO\ KF} = 1$$

$$\frac{4y\ \ DO\ \ 2x}{2y\ \ BO\ \ 5x} = 1$$

$$\frac{DO}{BO} = \frac{5}{4}$$

BO:OD=4:5.

В трапеции меньшее основание равно 2, прилежащие углы по 135. Угол между диагоналями, обращенный к основанию, равен 150.Найти площадь трапеции.



Дано: ABCD-трапеция.

BC=2. $\angle$ABC= $\angle$DCB=135

$\angle$BOC=150.

Найти: S

Решение:

В $\triangle$BOC: $\angle$ACB= $\angle$DCB=15,тогда $\angle$BAC =180-($\angle$ABC+ + $\angle$ACB)=30.

По теореме синусов из $\triangle$ABC:

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$$

$$AC = \frac{BC \sin \angle ABC}{\sin \angle ABC} = \frac{2\sin 135}{\sin 30} = \text{2 корня из 2}$$

$S=0{,}5\ AC\ BD \sin \angle BOC=0{,}5\ AC^2 \sin \angle BOC =$

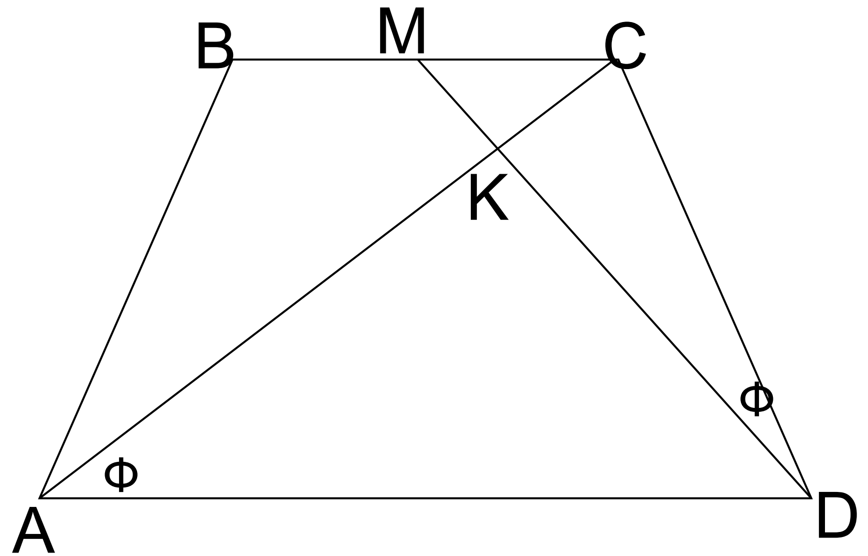
$=0{,}5\ (8) \sin 150=2$

В равнобедренной трапеции основание AD равно диагонали AC. Известно, что $\angle$CAD= $\angle$CDM, где M – середина BC. Найдите углы трапеции.

Дано: ABCD-трапеция.

AD=AC; $\angle$CAD=$\angle$CDM;

BM=MC.



Найти: углы трапеции

Решение:

Пусть $\angle$CAD=ф, тогда $\angle$ADC= $\angle$ACD=90- $\frac{ф}{2}$.

Поскольку по условию $\angle$MDC= $\angle$CAD= ф, то

$\angle CMD = \angle MDA = \angle ADC - \angle MDC = 90 - \frac{3}{2}\phi$,

$$MDC = 90 + \frac{\phi}{2}$$

По теореме синусов для треугольника MDC надем

$$\frac{MD}{\sin\left(90 + \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{CD}{\sin\left(90 - \frac{3}{2}\phi\right)},$$

$$MD = CD\,\frac{\cos\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{3}{2}\phi}$$

Но M- середина BC. Следовательно, проекция MD на AD равна 0,5AD, т.е

$$AD = 2MD\cos\left(90 - \frac{3}{2}\phi\right) = 2CD\,\frac{\cos\frac{\phi}{2}\,\sin\frac{3}{2}\phi}{\cos\frac{3}{2}\phi}$$

Из равнобедренного треугольника ACD найдем

$$AD=\frac{CD}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Приравнивая два выражения для AD, получим уравнение

$$\frac{2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3}{2}\varphi}{\cos\frac{3}{2}\varphi}=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Можно доказать,что $\cos\frac{3}{2}\varphi = \cos\frac{\varphi}{2}(2\cos\varphi - 1)$,

$2\sin\frac{3}{2}\varphi\,\sin\frac{\varphi}{2} ==\cos\varphi-\cos2\varphi$

Сократив теперь в числителе и знаменателе левой части уравнения $\cos\frac{ф}{2}$,освободившись от знаменателя, придем к уравнению 2 cos 2ф=1, т.е 2ф=60, ф=30.

Таким образом, два угла трапеции равны 75, два оставшихся 105.

Конец