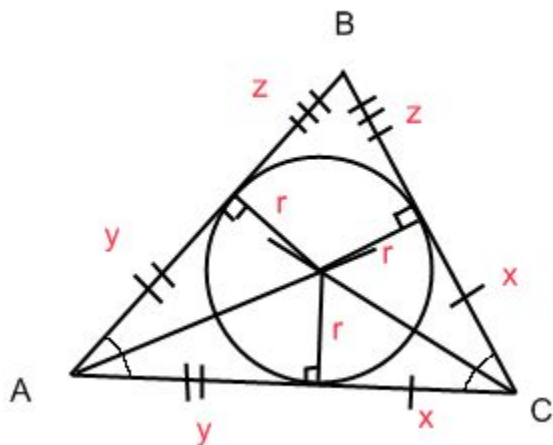


Вписанная и описанная окружность около треугольника.

Треугольник. Вписанная окружность.

- 1) Центр вписанной окружности в треугольник – точка пересечения биссектрис.
- 2) Центр вписанной окружности равноудалён от сторон треугольника.
- 3) $r = \frac{S_{\Delta}}{p}$, p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной окружности



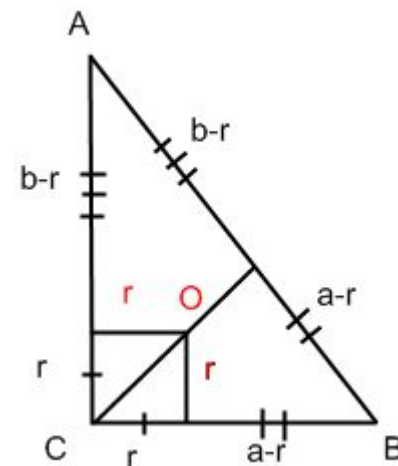
В правильном треугольнике

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

C – гипотенуза

$$C = p - r$$

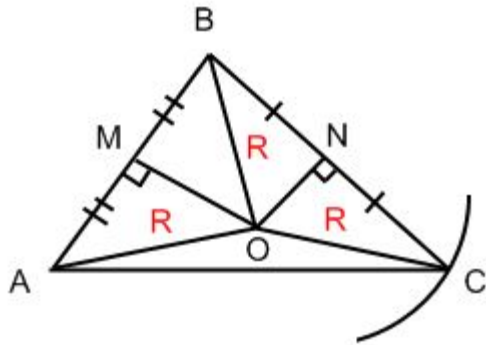
p – полупериметр



$$r = \frac{a+b+c}{2}$$

Треугольник. Описанная окружность.

- 1) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

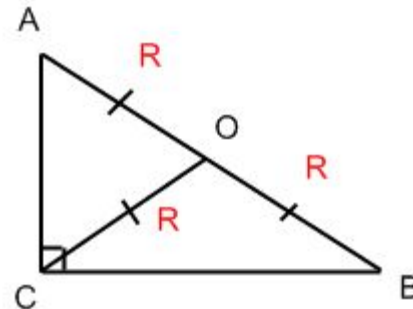


$$\angle AOB = 2\angle C$$

$$R = \frac{1}{2} AB$$

- 2) Центр описанной окружности равноудалён от всех вершин треугольника.

- 3) Центр окружности, описанной около Прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы.



Треугольник. Описанная окружность

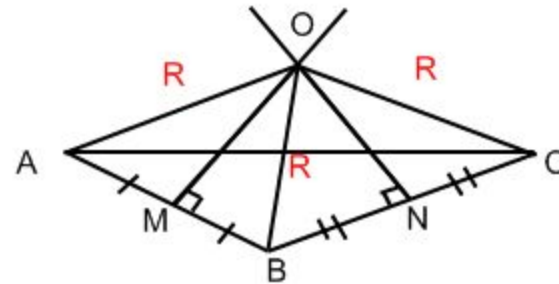
4) R – радиус описанной окружности
 $R=OA=OB=OC$ в любом треугольнике.

5) Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, находится вне треугольника.

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ - Для правильного треугольника

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{\Delta}}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$



Задачи!

Основание равнобедренного треугольника равно 36 см. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках A и P, AP=12 см. Найти: периметр треугольника.

Решение: O – центр вписанной окружности. CH – высота, биссектриса и медиана, т.к. равнобедренный $\triangle BCF$. $HF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$ $AP \parallel BF$ т.к.

$AB=PF$. Значит $\triangle ACP \sim \triangle CFP$. $\triangle ACP$ - равнобедренный.

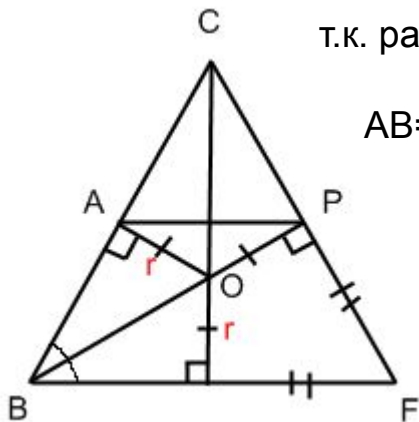
$$k = \frac{AP}{BF} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}. \quad \text{Т.к. O – центр описанной окружности, то}$$

$$HF=PF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18. \quad \frac{CP}{CF} = \frac{AP}{HF} = \frac{1}{3}, \text{ тогда } \frac{CP}{CP+18} = \frac{1}{3},$$

$$3CP = CP + 18, \text{ значит } CP = 9. \quad CF = 9 + 18 = 27.$$

$$P_{BCF} = 2CF + BF = 2 \cdot 27 + 36 = 54 + 36 = 90.$$

Ответ. 90



Задача 2

Расстояние, от вершины прямого угла треугольника до центра вписанной окружности в треугольник, равно $2\sqrt{2}$. $S_{\Delta}=30$. Найти: длину гипотенузы.

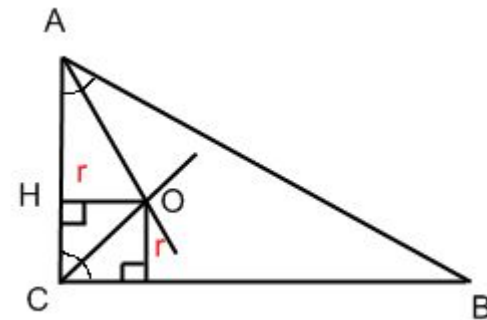
Решение: P – полупериметр.

O – точка пересечения биссектрис.

$$\angle HCO = 45^{\circ}, \quad OH = r, \quad CO = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Тогда } r = CO \sin 45^{\circ} = 2, \quad P = \frac{S_{\Delta}}{r} = 15$$

$$C = P - r = 13.$$

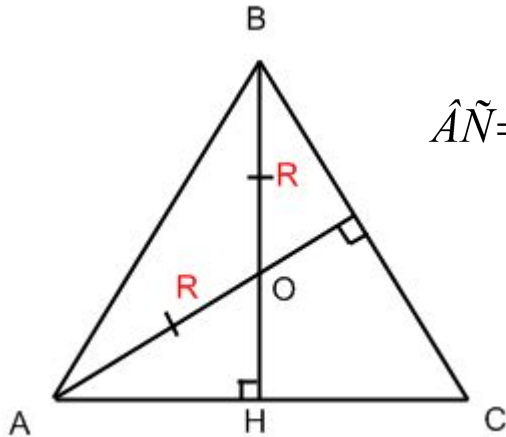


Ответ. 13

Задача 3

В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

Решение: $BH=AC=4$. R – радиус описанной окружности. $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{\Delta}}$, $HC = \frac{1}{2}AC = 2$,



$$\hat{A}\tilde{N} = \sqrt{BH^2 + HC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}. \quad AB = BC = 2\sqrt{5}.$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

$$R = \frac{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4}{4 \cdot 8} = 2,5$$

Ответ. 2,5

Задача 4!

В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 10, а радиус вписанной окружности равен 4. Найти диаметр, описанной около этого треугольника, окружности.

Решение: O – центр вписанной окружности, точка пересечения биссектрис.

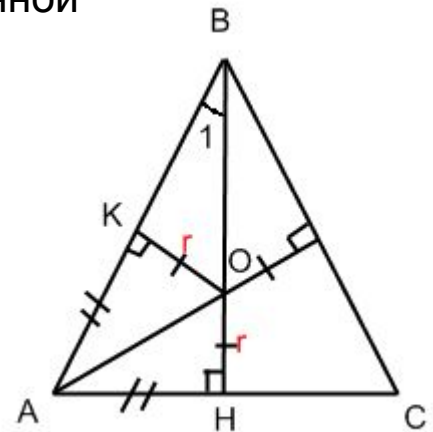
$r = OH = OK = 4$. $BH=10$, $BO=BH-OH=10-4=6$. D – диаметр описанной окружности, $D=2K$. $\triangle KBO$ – прямоугольный: $KO=4$, $BO=6$.

$$\sin \angle 1 = \frac{KO}{BO} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \cos \angle 1 = \sqrt{1 - \sin^2 \angle 1} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\operatorname{tg} \angle 1 = \frac{\sin \angle 1}{\cos \angle 1} = \frac{2}{\sqrt{5}}. \quad \operatorname{tg} \angle 1 = \frac{AH}{BH}, \quad AH = BH \cdot \operatorname{tg} \angle 1 = 4\sqrt{5}$$

$$AC = 2AH = 8\sqrt{5}. \quad \angle B = 2\angle 1, \quad \sin \angle B = \sin 2\angle 1 = 2\sin \angle 1 \cdot \cos \angle 1 = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$D = 2R = \frac{AC}{\sin \angle B} = 8\sqrt{5} : \frac{4\sqrt{5}}{9} = 18$$



Ответ. 18

Задачи для самостоятельного решения.

1) Около $\triangle ABC$ описана окружность с центром в точке O . CH – высота. Найти $\angle OCH$, если $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. Ответ. 10°

2) Около равнобедренного треугольника описана окружность, $R = 7\sqrt{2}$. Её диаметр пересекает сторону BC в точке E . Найти диаметр окружности описанной около $\triangle ACE$.
Ответ. 14

3) Остроугольный равнобедренный треугольник вписан в окружность с центром O и радиусом 10. Найти S_{BOC}
Ответ. 40

4) Точка касания окружности, вписанной в треугольник, делит катет на отрезки 3 и 5. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

Ответ. 8,5