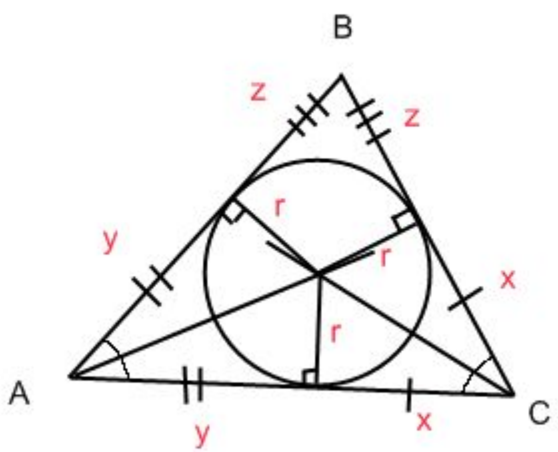
Вписанная и описанная окружность около треугольника.

Треугольник. Вписанная окружность.

1) Центр вписанной окружности в треугольник – точка пересечения биссектрис.
2) Центр вписанной окружности равноудалён от сторон треугольника.
3) $r = \frac{S\Delta}{p}$, р – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной окружности



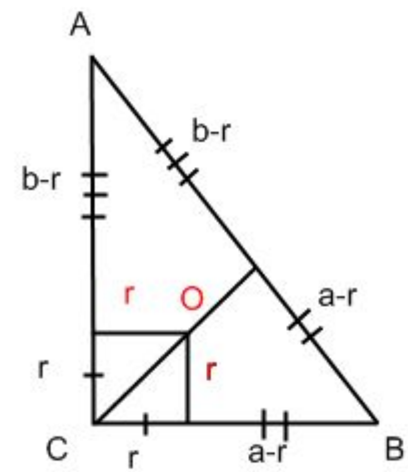
В правильном треугольнике

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

С – гипотенуза

$$C = p - r$$

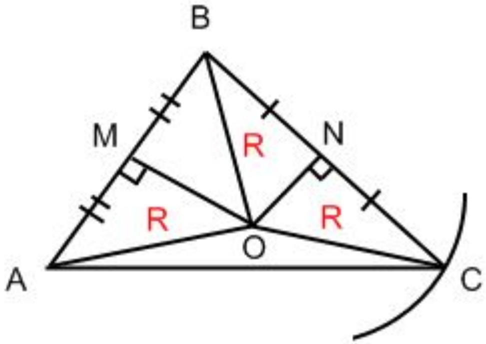
р - полупериметр



$$r = \frac{a+b+c}{2}$$

Треугольник. Описанная окружность.

1) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

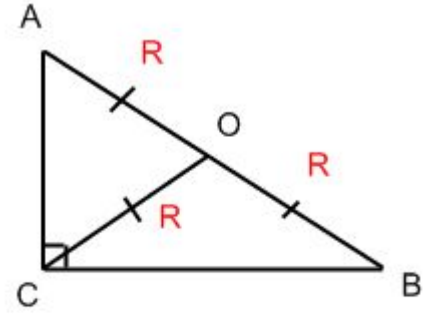


$\angle AOB = 2\angle C$

2) Центр описанной окружности равноудалён от всех вершин треугольника.

3) Центр окружности, описанной около Прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы.

$$R = \frac{1}{2} AB$$

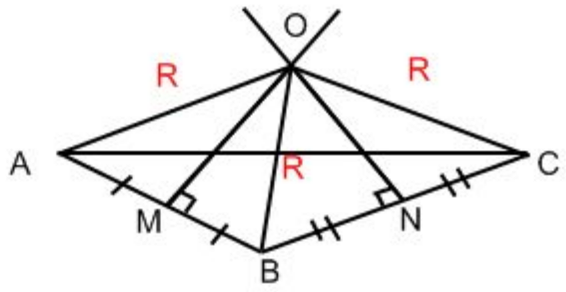


Треугольник. Описанная окружность

4) R – радиус описанной окружности
R=OA=OB=OC в любом треугольнике.

5) Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, находится вне треугольника.

$$R=\frac{a}{\sqrt{3}}$$ **- Для правильного треугольника**



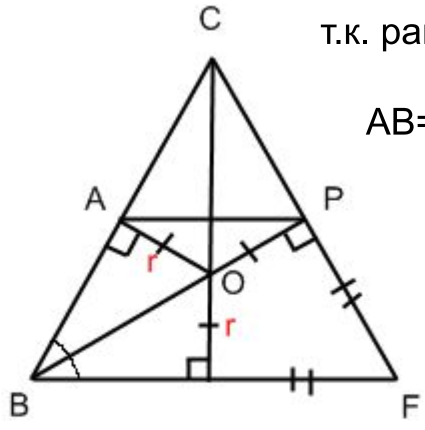
$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S\Delta}$$

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

Задачи!

Основание равнобедренного треугольника равно 36 см. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках А и Р, АР=12 см. Найти: перимерт треугольника.

Решение:



О – центр вписанной окружности. СН – высота, биссектриса и медиана, т.к. равнобедренный ΔBCF. $HF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}\cdot 36 = 18$. $AP \| BF$ т.к. АВ=РF. Значит $\Delta ACP \infty \Delta ACF$. ΔACP - равнобедренный.

$k = \frac{AP}{BF} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Т.к. О – центр описанной окружности, то

HF=PF= $\frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}\cdot 36 = 18$. $\frac{CP}{CF} = \frac{AP}{HF} = \frac{1}{3}$, тогда $\frac{CP}{CP+18} = \frac{1}{3}$,

3CP=CP+18, значит CP=9. CF=9+18=27.

P_{BCF}=2CF+BF=2*27+36=54+36=90.

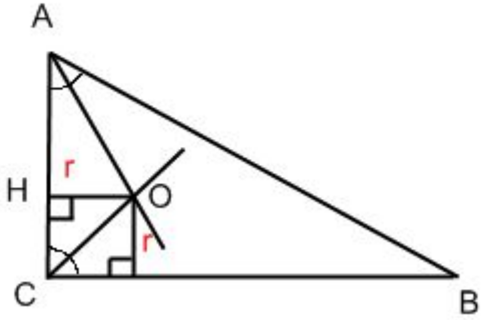
Ответ. 90

<u>Задача 2</u>

Расстояние, от вершины прямого угла треугольника до центра вписанной окружности в треугольник, равно $2\sqrt{2}$. $S\Delta=30$. *Найти: длину гепотенузы.*

Решение: Р – полупериметр.

О – точка пересечения биссектрис.



$\angle HCO=45^0$, OH = r, CO = $2\sqrt{2}$.

Тогда $r=CO\sin 45^0=2$.

$P=\dfrac{S\Delta}{r}=15$

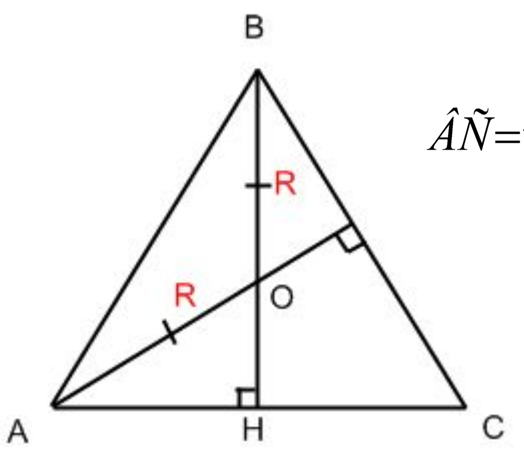
$C=P-r=13$.

Ответ. 13

<u>Задача 3</u>

В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

Решение: BH=AC=4. R – радиус описанной окружности. $R=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4S\Delta}$, $HC=\dfrac{1}{2}AC=2$,



$$\hat{A}\tilde{N}=\sqrt{BH^2+HC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

$$AB=BC=2\sqrt{5}.$$

$$S\Delta=\frac{1}{2}AC\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8 .$$

$$R=\frac{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 4}{4\cdot 8}=2{,}5$$

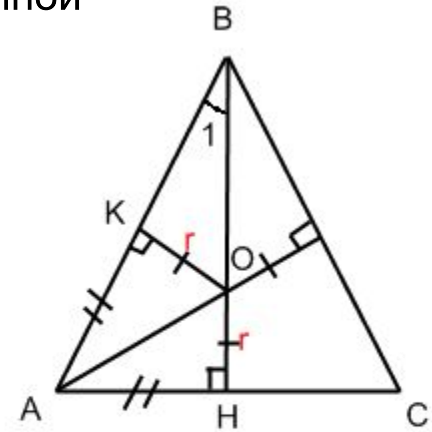
Ответ. 2,5

<u>Задача 4!</u>

В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 10, а радиус вписанной окружности равен 4. Найти диаметр, описанной около этого треугольника, окружности.

Решение: O – центр вписанной окружности, точка пересечения биссектрис.

r = OH = OK = 4. BH=10, BO=BH-OH=10-4=6. D – диаметр описанной окружности, D=2K. ΔKBO - прямоугольный: KO=4, BO=6.



$$\sin\angle 1=\frac{KO}{OB}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\ , \qquad \cos\angle 1\sqrt{1-\sin^2\angle 1}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}\ .$$

$$tg\angle 1=\frac{\sin\angle 1}{\cos\angle 1}=\frac{2}{\sqrt{5}}\ . \qquad tg\angle 1=\frac{AH}{BH}, AH=BH\cdot tg\angle 1=4\sqrt{5}$$

AC=2AH=$8\sqrt{5}$. $\angle B=2\angle 1$, $\sin\angle B=\sin 2\angle 1=2\sin\angle 1\cdot\cos\angle 1=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

D=2R=$\dfrac{AC}{\sin\angle B}=8\sqrt{5}:\dfrac{4\sqrt{5}}{9}=18$

Ответ. 18

Задачи для самостоятельного решения.

1) Около ΔABC описана окружность с центром в точке О. СН –высота. Найти $\angle OCH$, если $\angle A = 60^0, \angle B = 70^0$. Ответ. 10^0

2) Около равнобедренного треугольника описана окружность, $R = 7\sqrt{2}$. Её диаметр пересекает сторону ВС в точке Е. Найти диаметр окружности описанной около ΔACE.

Ответ.14

3) Остроугольный равнобедренный треугольник вписан в окружность с центром О и радиусом 10. Найти S_{BOC}

Ответ.40

4) Точка касания окружности, вписанной в треугольник, делит катет на отрезки 3 и 5. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

Ответ. 8,5