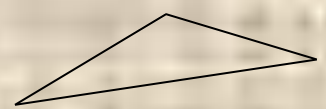
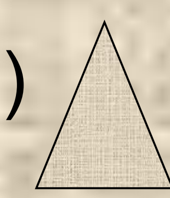
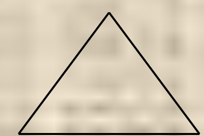
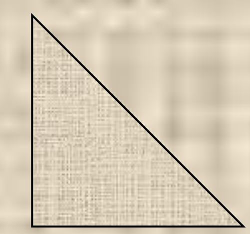
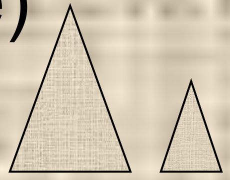
Треугольники

Треугольник- плоская фигура, ограниченная тремя прямыми. У треугольника могут быть три неравные стороны (разносторонний треугольник), две равные стороны (равнобедренный треугольник) или три равные стороны (равносторонний треугольник). В равнобедренном треугольнике углы, лежащие против равных сторон, равны; в равностороннем треугольнике все углы равны.

Виды треугольников

- Разносторонний (а)
- Равнобедренный (b)
- Равносторонний (с)
- Прямоугольный (d)
- Подобные треугольники (е)

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 
- e) 

Бермудский треугольник

- «…Здесь бесследно исчезало множество кораблей и самолётов – большинство из них после 45 года. Здесь же в течении последних 26 лет погибло более 1000 человек. Однако при поисках не удалось обнаружить ни одного трупа или обломка…» Этими словами начинается описание таинственного Бермудского треугольника у американского писателя Ч.Берлитца, теперь эту фразу с удовольствием цитируют как противники, так и сторонники гипотезы существования между Флоридой, Кубой и Бермудами некоего странного загадочного места, иначе говоря - аномальной зоны.

Астрономия

- **Маленькое созвездие к юго-востоку от Андромеды. У его западной границы видна спиральная галактика М 33, или Туманность Треугольника (5,7 зв. вел.), повёрнутая к нам почти плашмя. Её английское прозвище Pinwheel переводится как «цевочное колесо»-разновидность зубчатого колеса со стерженьками вместо зубьев; оно довольно точно передаёт видимую форму галактики. Она, как и Туманность Андромеды (М 31), член Местной группы галактик. Обе они расположены симметрично относительно звезды Мирах (В Андромеды), что существенно облегчает поиск более слабой М 33. Обе галактики находятся от нас примерно на одинаковом расстоянии, но Туманность Треугольника чуть дальше, на расстоянии 2,6 млн. световых лет.**

Теорема Пифагора

- **Как известно, «Теорема Пифагора» является едва ли не самой знаменитой теоремой геометрии, которую помнит каждый человек, который когда-либо учился в средней школе и, возможно, сумел «начисто забыть» всю математику. Суть этой теоремы чрезвычайно проста. Теорема утверждает, что в прямоугольном треугольнике катеты *a* и *b* связаны с гипотенузой *c* следующим простым соотношением:**
- $a^2 + b^2 = c^2$

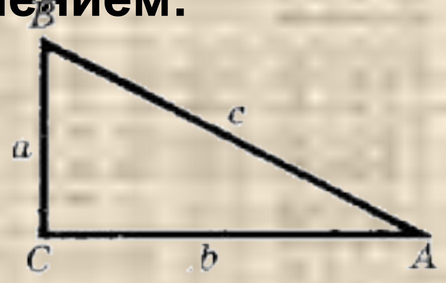


Рис. 24

- **Несмотря на ее предельную простоту, теорема Пифагора, по мнению многих математиков относится к разряду наиболее выдающихся математических теорем за всю историю математики. Гениальный астроном Иоганн Кеплер выразил свое восхищение теоремой Пифагора в следующих словах:**
- ***«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».***

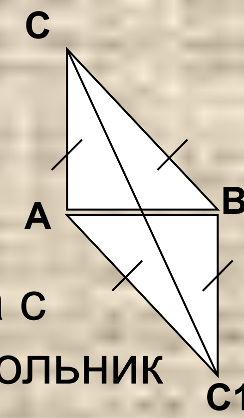
Базовая задача геометрии треугольника

В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны соответственно 3 и 4 (5 и 12).

Найти:

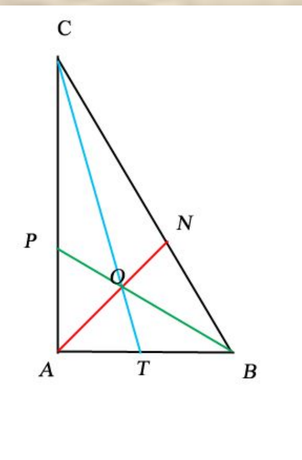
1. BC
2. S_{ABC}
3. AH – высоту, опущенную на гипотенузу. (Вывести формулу для вычисления высоты, опущенной на гипотенузу:)
4. CH:HB (можно провести вычислительную работу CH и HB по Пифагору, но обязательно закрепить теорему: проекции катетов на гипотенузу относятся, как квадраты катетов)
5. S_{AHC} и $S_{AHB.}$ (опять-таки, можно и нужно вычислить их площади, как половина произведения катетов, но очень важно из геометрии площадей обосновать, что S_{AHC}: S_{AHB}= HC:HB = AC^2:AB^2 = 16:9.). Далее воспользоваться делением площади Δ ABC в данном отношении.
6. R – радиус описанной окружности. (R = $^1/_2$BC).
7. r – радиус вписанной окружности.(S = p×r,). Обе формулы доказываются, показывается универсальность первой (для любого описанного многоугольника – метод “долек”) и принадлежность второй только к классу прямоугольных треугольников.

Базовая задача геометрии треугольника



- 8. Длины медиан АМ и СК. Задача о медиане АМ связана с задачами определения R, Sabc, умением достроить треугольник АВС до прямоугольника и сделать с помощью этой конструкции необходимые выводы. Медиана СК определяется по теореме Пифагора. Так как в произвольном треугольнике это правило не срабатывает, то необходимо "притянуть за уши" формулу длины медианы произвольного треугольника: $4CK^2=2AC^2+2BC^2-AB^2$. Эта формула тяжеловата для запоминания, поэтому более эффективно запомнить её "первообразные" – достраивание треугольника до параллелограмма (что очень важно для выработки конструкторских умений) и следствие из этой теоремы косинусов: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Ну и вместо этого просто пошаговая работа теоремой косинусов "туда и обратно". Из треугольника АВС по теореме косинусов (если это произвольный треугольник) определяем косинус угла В, и, зная его, опять таки по теореме косинусов из ΔСКВ находим СК.

Базовая задача геометрии треугольника



- 9. Длины отрезков AP, PC, CN, NB, TB и AT, где AN, BP и CT – биссектрисы Δ ABC (отрабатывается одно из основных свойств биссектрис и работа в делении величины в данном отношении)
- 10. Отношения PO:OB, AO:ON; CO:OT (теорема об отношении, в котором делятся биссектрисы точкой их пересечения – AO:ON = (AC + AB) : CB).
- 11. Длины биссектрис AN, CT и BP. Здесь можно отработать три метода:

Базовая задача геометрии треугольника

1) ΔANB: $AB=3$; $BN=5*3/7=15/7$; $\cos\angle B=3/5$. По теореме косинусов: $AN^2=9+225/49-2*3*15/7*3/5=(9*16*2)/49$; $AN=\frac{12\sqrt{2}}{7}$

2) Геометрия площадей: Scan + Sanb= Scab

$1/2AN*4*\sin45°+1/2AN*3*\sin45°=6$; $AN\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 7=12$ $\quad AN=\frac{24}{7\sqrt{2}}=\frac{12\sqrt{2}}{7}$

3) И формула (теорема) о длине биссектрисы:

$AN^2=AC*AB-CN*BN$

$AN^2=3*4-(5*5*3*4)/7*7=12(1-25/49)=12*24/49$; $AN=\frac{12}{7}\sqrt{2}$

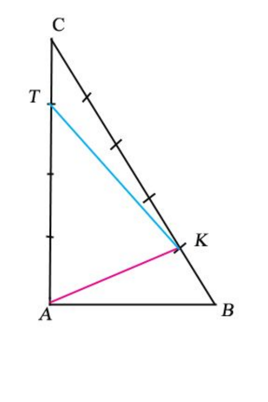
12. Длины отрезков CO, OT, AO, ON, BO, OP. Эта задача является следствием 10 и 11. Зная длины биссектрис и отношения, в которых они делятся точкой пересечения, закрепляем действие деления в данном отношении.

13. Площади шести треугольников, образовавшихся при проведении биссектрис:

1) Если учитывать предшествующие задачи, то мы знаем в каждом треугольнике основания – отрезки CP, PA, AT, TB, BN, NC и высоту – r.

Базовая задача геометрии треугольника

- **2)** Если задача решается изолированно, без предшествующих, то из геометрии площадей следует Saot:Stob=AT:TB=4:5, Stbo:Sboc:Scoa=3:5:4. (опять ссылка на равенство высот в этих треугольниках). И далее вновь отрабатывается действие деления величины в данном отношении. Ну и любопытное замечание – площади численно будут равны длинам соответствующих оснований AT, TB, BN, NC, PC, PA. Распространится ли это на прямоугольный треугольник:5,12,13? На другие треугольники? Как, используя полученные результаты, определить синусы любого из углов этой геометрической конструкции?
- **14.** Площади треугольников, получившихся при пересечении медиан (получившиеся шесть треугольников равновелики в любом треугольнике).
- **15.** а)длина AK,если BK:CK=1:4
б)длину TK, если AY:TC=3:1
в)косинус ∟TKA – одношаговые упражнения
с использованием теоремы косинусов.



Базовая задача геометрии треугольника

- **16.** а)площадь ΔCTK
  б)площадь ΔTKA
  Здесь уместно кроме вычислительного метода:
  Sctk=½CT*CK*sin∟C=½*1*4*3/=6/5, Sctk=Sabc – Stck – Sakb
  отработать применение теоремы об отношении площадей треугольников с равными углами.
  Sctk/Sabc=CT*CK/CA*CB=1/4*4/5=1/5
  Sctk=1/5*6=6/5
  Sakb/Sabc=1*3/5*3=1/5, Sakb=1/5*6=6/5
  Stka=6-12/5=18/5=3,6
- **17.** Радиус окружности, вписанной в ΔCTK (формула S=r*p)
- **18.** Радиус окружности, описанной около ΔCTK (следствие из теоремы синусов – AK/sinATK=2R, sin∟ATK=sin∟CTK)
- **19.** Расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей для ΔABC (Формула Эйлера: $d^2=R^2-2Rr$) в произвольном треугольнике и отдельно для прямоугольного треугольника:

Базовая задача геометрии треугольника

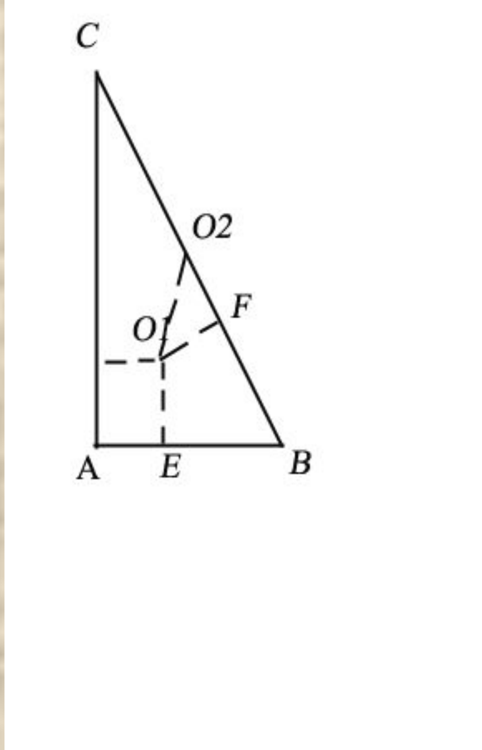
- O1F=1=r, O2B=R=2,5, FB=EB=3-1=2; O2F=2,5-2=0,5

$O1O2^2=0,5^2+1=0,25+1=5/4$

O1O2= $\frac{\sqrt{5}}{2}$

И по формуле Эйлера: $d^2=R^2-2Rr=2,5(2,5-2)=2,5*0,5=5/4$;

d= $\frac{\sqrt{5}}{2}$



Формула Герона

$$s/p = \quad r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

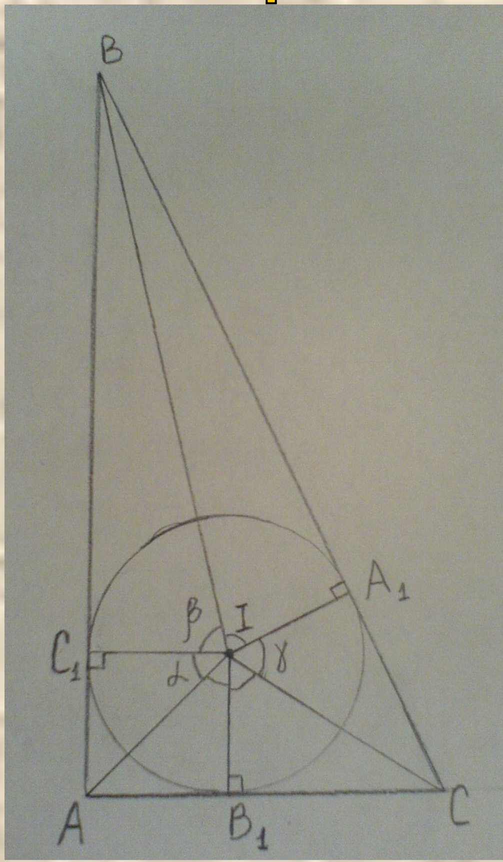
$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

симметричный вывод формулы Герона

Точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника обозначим через $A_1B_1C_1$. Треугольники AIB_1 и AIC_1 BIA и BIC_1 CIA_1 CIB_1 попарно равны, как прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу и равные углы.



Обозначим **BC=a, AC=b, AB=c**.Тогда $AB_1 = b - CB_1, AC_1 = c - BC_1$

$$AB_1 + AC_1 = 2AB_1 = 2AC_1 = b + c - (CB_1 + BC_1) = b + c - (CA_1 + BA_1) = b + c - a$$

откуда $AB_1 = AC_1 = \frac{b+c-a}{2}$

аналогично $CA_1 = CB_1 = \frac{a+b-c}{2}$

. И $BA_1 = BC_1 = \frac{a+c-b}{2}$,

.

Обозначим углы $\angle C_1B_1 = \alpha$, $\angle C_1A_1 = \beta$, $\angle A_1B_1 = \gamma$.

В треугольнике AIB_1 катеты связаны соотношением: $r = \frac{AB_1}{tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c-a}{2tg\frac{\alpha}{2}}$

Откуда $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{b+c-a}{2r}$

Аналогично

$$tg\frac{\beta}{2}=\frac{a+c-b}{2} \quad \text{и} \quad tg\frac{\gamma}{2}=\frac{a+b-c}{2}$$

Так как $\frac{\alpha}{2}\pi+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=$

То легко доказать $tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}=tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}$ (*)

Подставив в (*) выражения $tg\frac{\alpha}{2}$ $tg\frac{\beta}{2}$ $tg\frac{\gamma}{2}$

Через **a,b,c** и **r,** получим $\frac{a+b+c}{2r}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3}$

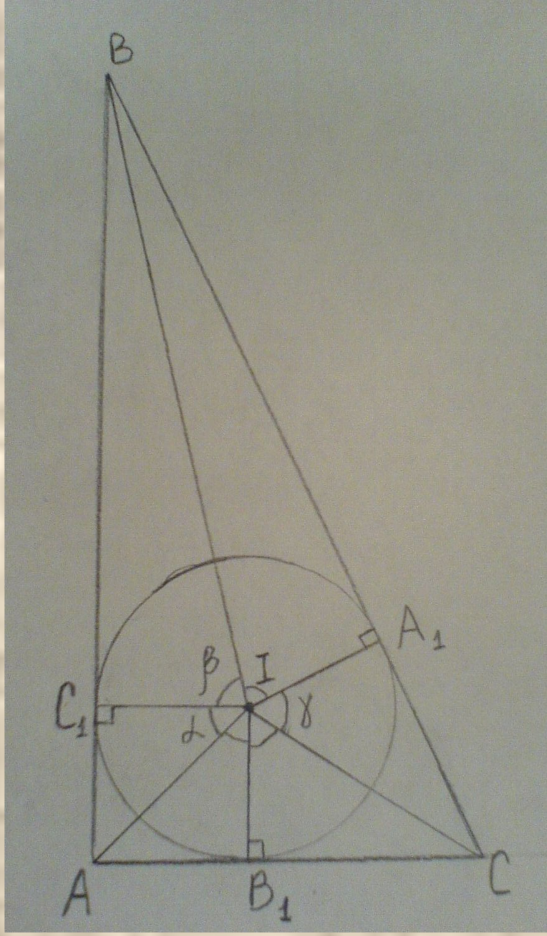
Откуда

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Так как ,то отсюда следует **формула Герона:**

$$S_{ABC}=rp$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



Вывод:

- Ну вот, пожалуй, можно остановиться в наборе основных проблем треугольника. Работа в формировании знаний, умений и навыков, связанных с этой Задачей, начинается с пятого класса – пропедевтического курса геометрии (геометрии площадей, деления отрезка данном отношении, конструктивные навыки – построение биссектрис, медиан и высот произвольным набором инструментов (метрической линейкой, транспортиром, угольником)) и длится практически до окончания курса планиметрии. Многие теоремы используются в работе задолго до их доказательства, подготовляя сознание детей к логическим операциям с используемыми понятиями. Например, биссектриса треугольника может быть построена как с помощью транспортира, так и с использованием факта деления противоположной стороны в известном отношении и только спустя значительное время это получает как чёткую логическую, так и конструктивную основу.

Литература

- **1.** Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, Наука, 1948. 48 с
- **2.** Green T. M., Hamberg C. L. Pascal’s Triangle. Palo Alto: Dale Seymour? 1986.
- **3.** Бондаренко Б. А. Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фрактали, графы и приложения. Ташкент: Фан, 1990. 192 с.
- **4.** Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А. и др. Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1990. 208 с.
- **5.** Кузьмин О. В. Некоторые комбинаторные числа в обобщенной пирамиде Паскаля // Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа. Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1997. С. 90-100.
- **6.** Колокольникова Н. А., Кузьмин О. В. Обобщения триномиальных коэффициентов // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца М.: 1983. Вып. 63. С. 60-67.

- Рецензент статьи Ю. П. Соловьев.