

ПОДОБИЕ В ГЕОМЕТРИИ

ПОДОВНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Подольская А. В.
ГОУ СОШ №316

2008 г.

ТЕМА «ПОДОБИЕ»

- Теоретический материал.
- Задачи.





ПЛАН

- Пропорциональные отрезки.
- Свойство биссектрисы треугольника.
- Определение подобных треугольников.
- Отношение периметров подобных фигур.
- Отношение площадей подобных фигур.
- Признаки подобия треугольников.



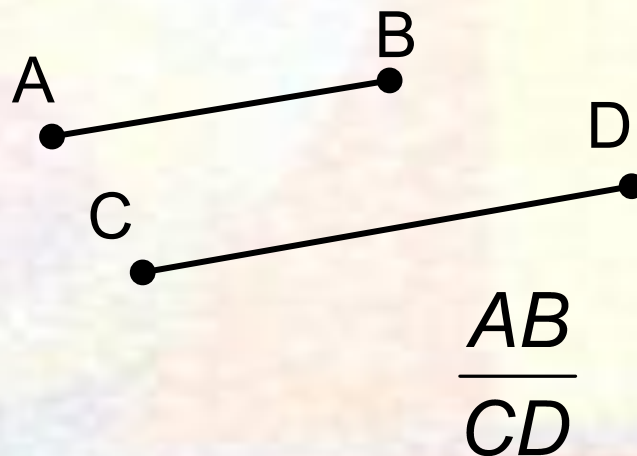
ЗАДАЧИ

- Разминка.
- Решение задач.
- Задачи на признаки подобия.
- Тест



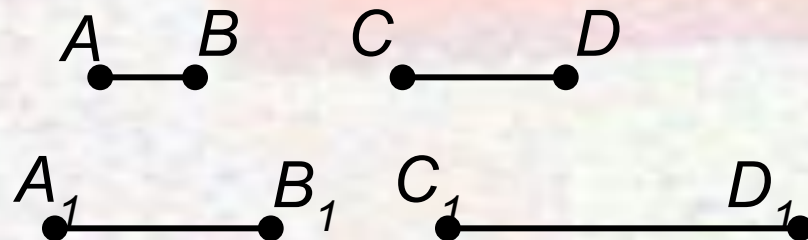
Пропорциональные отрезки

- Отношением отрезков называется отношение их длин.



- Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 , если

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$$



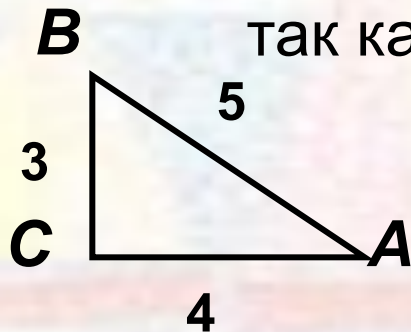
ПРИМЕР



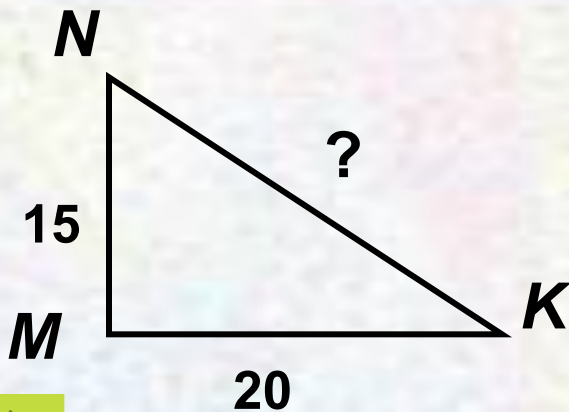
ПРИМЕР

- Даны два прямоугольных треугольника

Стороны BC и CA пропорциональны MN и MK ,
так как



$$\frac{BC}{MN} = \frac{3}{15} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{MK} = \frac{4}{20}$$



т.е.

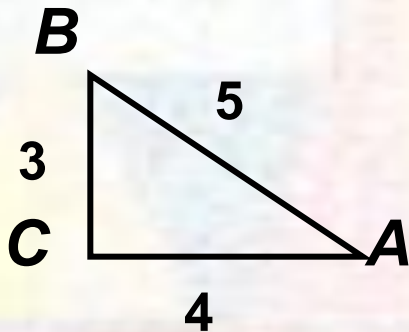
$$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MK} = \frac{1}{5}$$

НАЙДИТЕ ГИПОТЕНУЗУ БОЛЬШЕГО
ТРЕУГОЛЬНИКА.



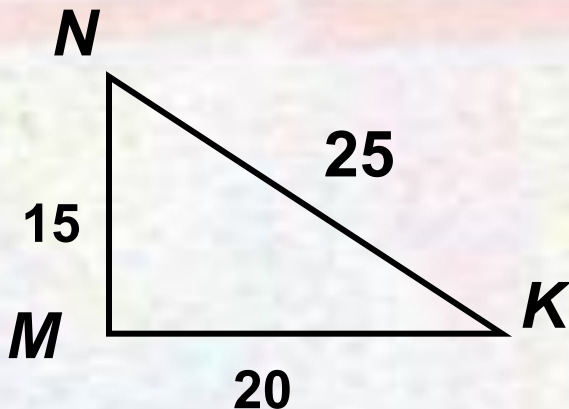
Пропорциональность отрезков

- Понятие пропорциональности вводится для любого числа отрезков.



например

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MK} = \frac{AB}{NK}$$



Подобные фигуры

Предметы одинаковой формы, но разных размеров



Здание и его макет



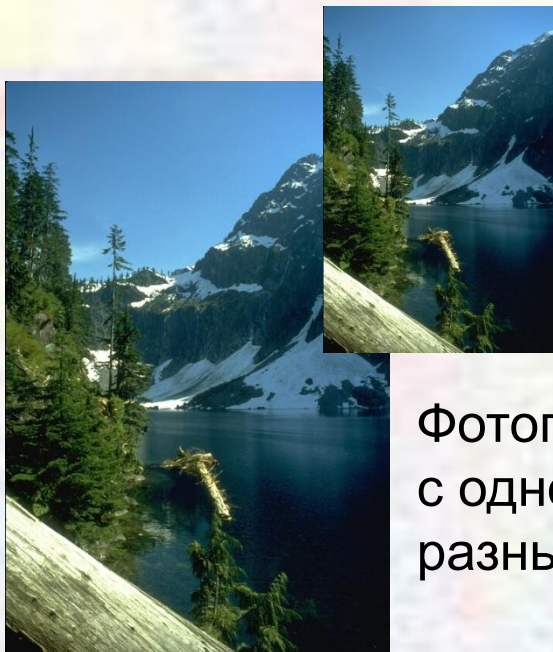
1 : 10 000



1 : 25 000

Планы, географические карты одного и того же района, выполненные в разных масштабах.

Фотографии, отпечатанные с одного негатива, но с разными увеличениями;



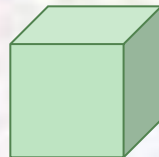
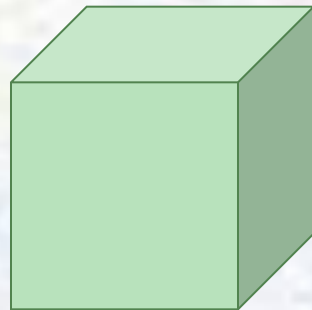
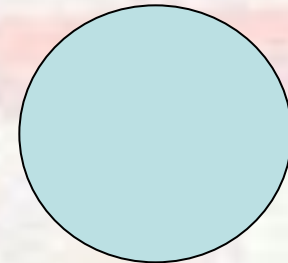
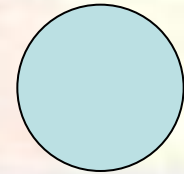
Подобные фигуры

- В геометрии фигуры одинаковой формы называют *подобными* фигурами

Подобными
являются любые
два квадрата



Подобными
являются любые
два круга



два куба

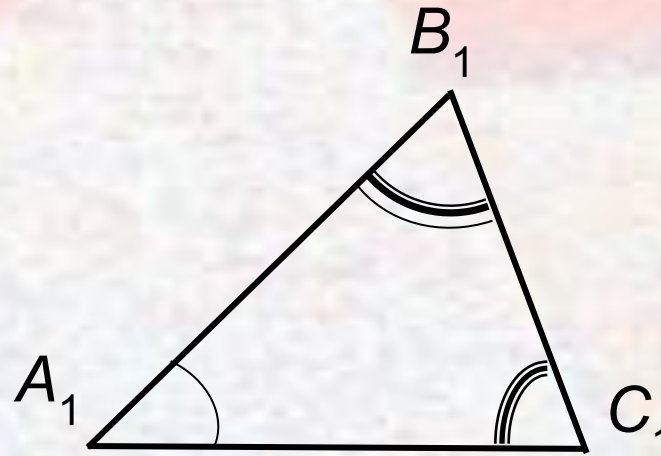
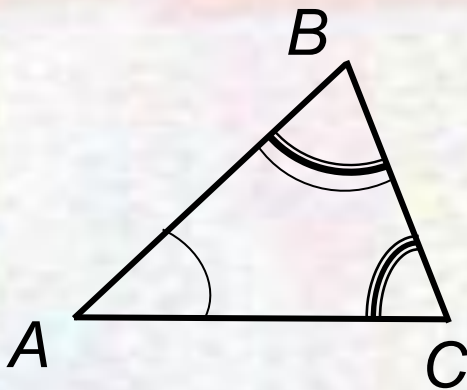


два шара



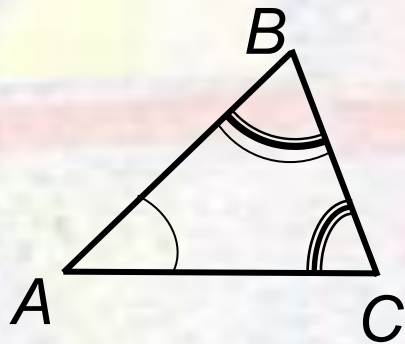
Подобные треугольники

- Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$,
у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.
Стороны AB и A_1B_1 , AC и A_1C_1 , BC и B_1C_1 ,
лежащие против равных углов, называют
сходственными



Определение

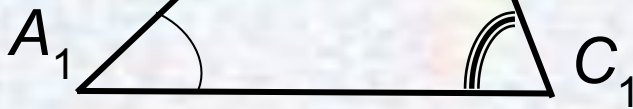
- Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

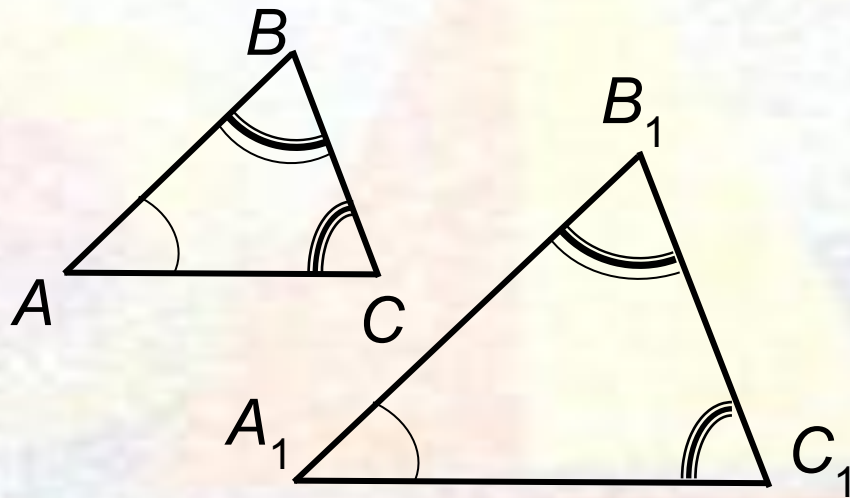


Коэффициент подобия



$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$



k – коэффициент подобия.

- Число *k*, равное отношению сходственных сторон, называется коэффициентом подобия.



Дополнительные свойства

- Отношение *высот* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия*.
- Отношение *медиан* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия*.
- Отношение *биссектрис* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия*.

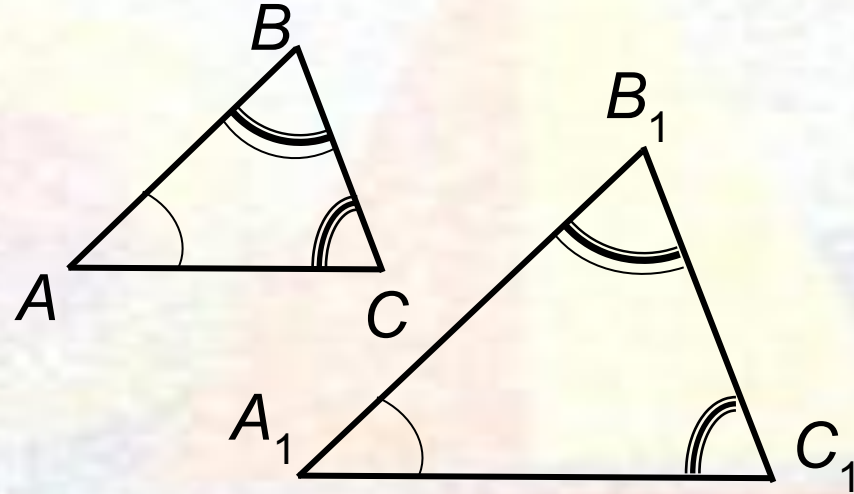


Отношение периметров

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$$



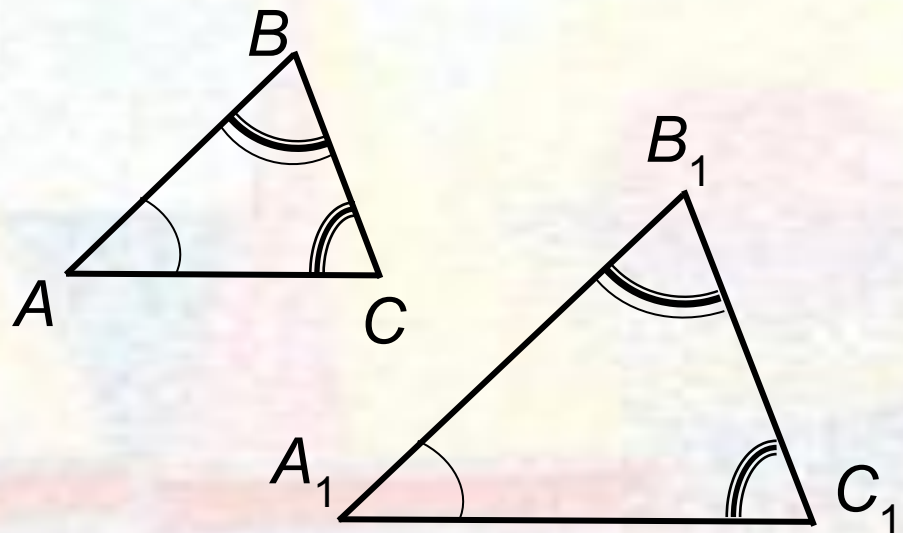
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- Отношение периметров подобных треугольников равно
- коэффициенту подобия.





Отношение периметров



$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

$$AB = kA_1B_1$$

$$BC = kB_1C_1$$

$$AC = kA_1C_1$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1}$$

Выносим общий множитель за скобку и сокращаем дробь.

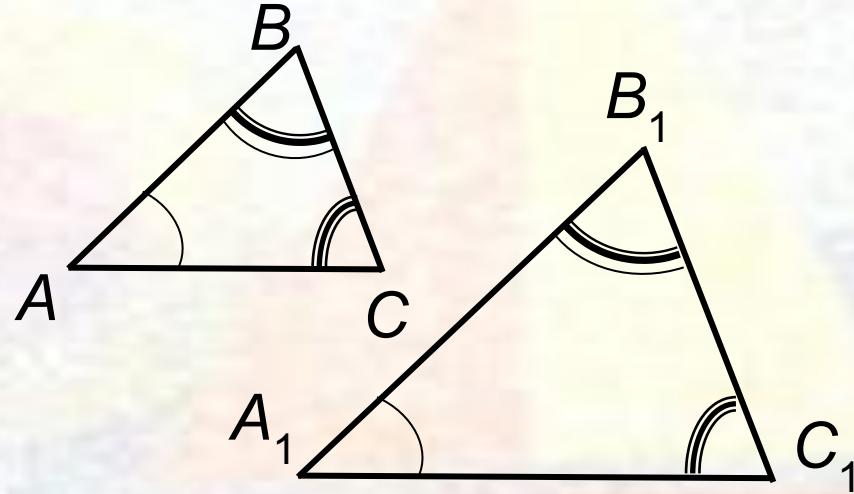
$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$$



Отношение площадей

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$



- **Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.**

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$$

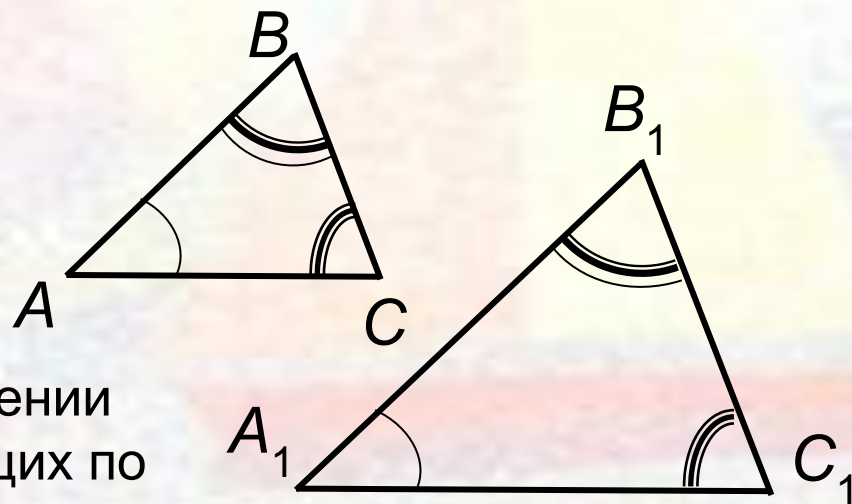
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Отношение площадей

Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$,
коэффициент подобия k

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$



$\angle A = \angle A_1$, по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, имеем

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$$

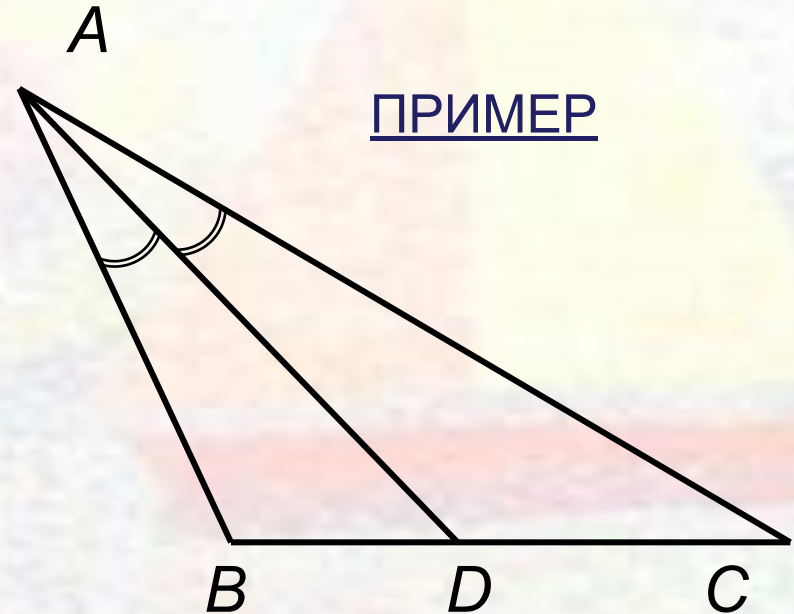


Свойство биссектрисы треугольника



ПРИМЕР

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

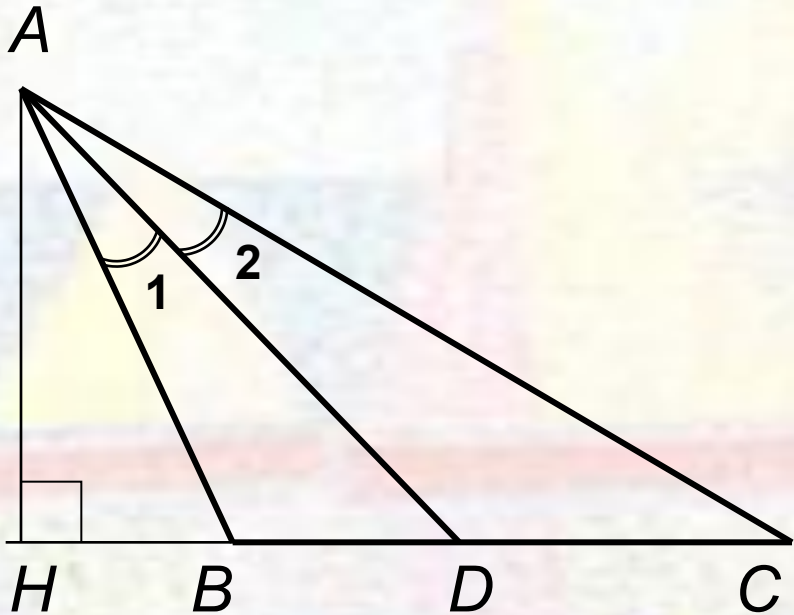


$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Свойство биссектрисы треугольника



- $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ имеют общую высоту AH
- $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{DB}{DC}$
- $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ имеют равные углы $\angle 1 = \angle 2$

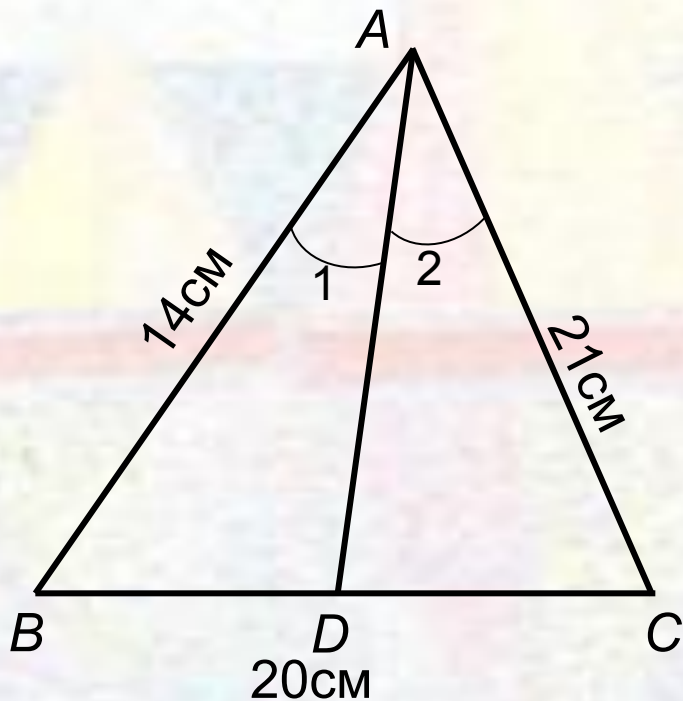
ИМЕЕМ

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AD \cdot AC} = \frac{AB}{AC}$$



Свойство биссектрисы треугольника



Дано: $\triangle ABC$

AD – биссектриса

$AB = 14$ см

$BC = 20$ см

$AC = 21$ см

Найти: BD, CD .

Решение:



Свойство биссектрисы треугольника



Решение:

Пусть $BD = x$ см,

тогда $CD = (20 - x)$ см.

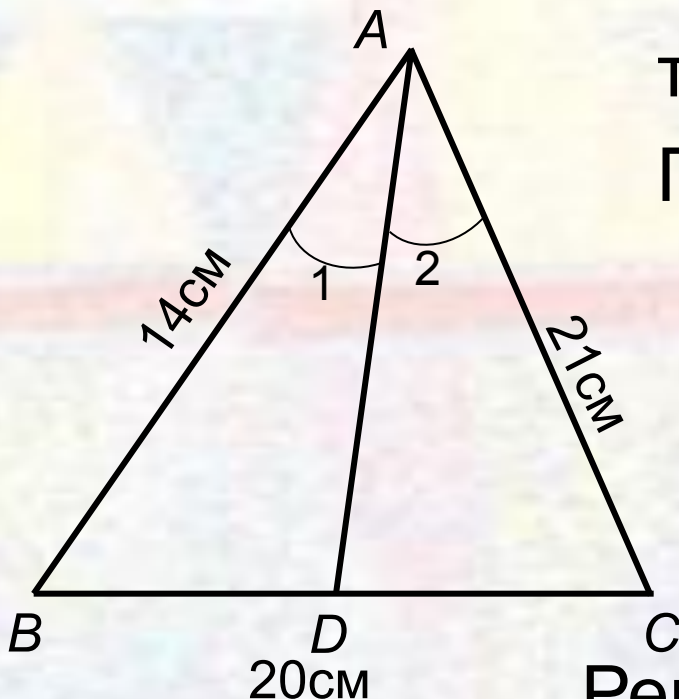
По свойству биссектрисы

треугольника $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

имеем $\frac{x}{14} = \frac{20 - x}{21}$

Решая уравнение, получим $x = 8$

$BD = 8$ см, $CD = 12$ см.



Признаки подобия треугольников

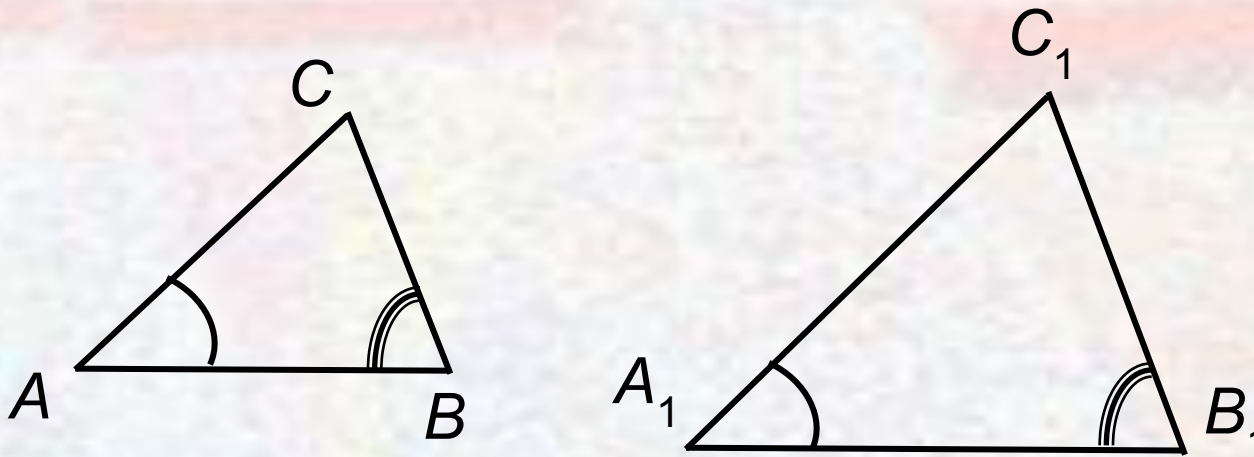


- Первый признак подобия треугольников.
(по двум углам)
- Второй признак подобия треугольников.
(по углу и двум пропорциональным сторонам)
- Третий признак подобия треугольников.
(по трем пропорциональным сторонам)

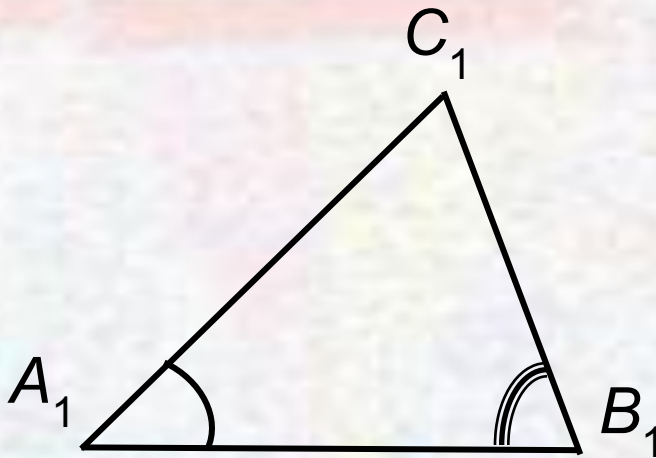
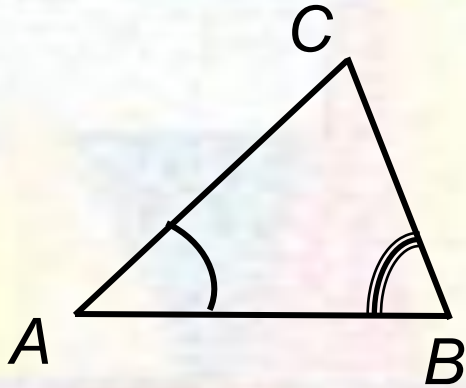


Первый признак подобия треугольников.

- Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



Первый признак подобия треугольников.



Дано:

$\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$,

$\angle A = \angle A_1$,

$\angle B = \angle B_1$.

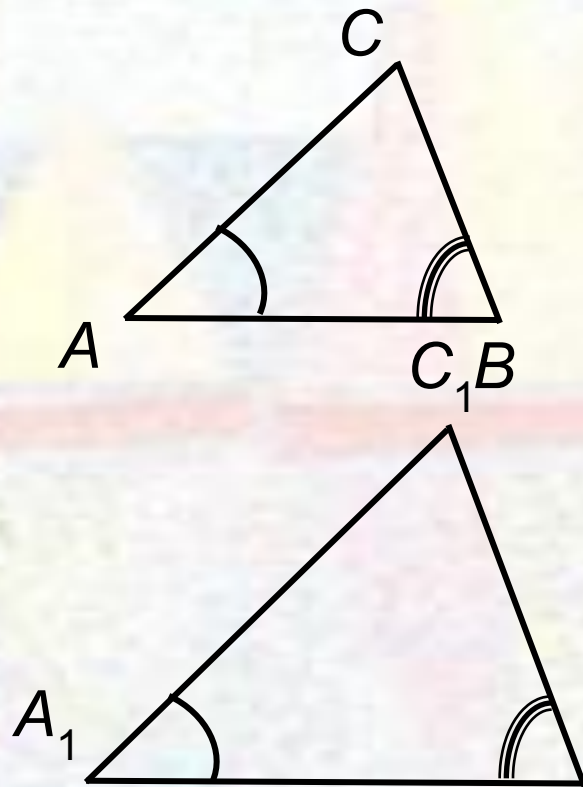
Доказать:

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:



Первый признак подобия треугольников.



Доказательство:

- $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.
 $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$,
 $\angle C_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1$.
 $\angle C = \angle C_1$

Таким образом углы
 A , B , C треугольников
соответственно равны.



Первый признак подобия треугольников.

Доказательство:



$$\begin{aligned} \bullet \quad \angle A = \angle A_1, \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} &= \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \\ \angle B = \angle B_1. \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} &= \frac{AB \cdot BC}{A_1B_1 \cdot B_1C_1} \end{aligned}$$

Имеем $\frac{BC}{A_1C_1} = \frac{AC}{B_1C_1}$

Аналогично, рассматривая равенство углов

$\angle C = \angle C_1, \angle A = \angle A_1$, получим $\frac{BC}{A_1B_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$

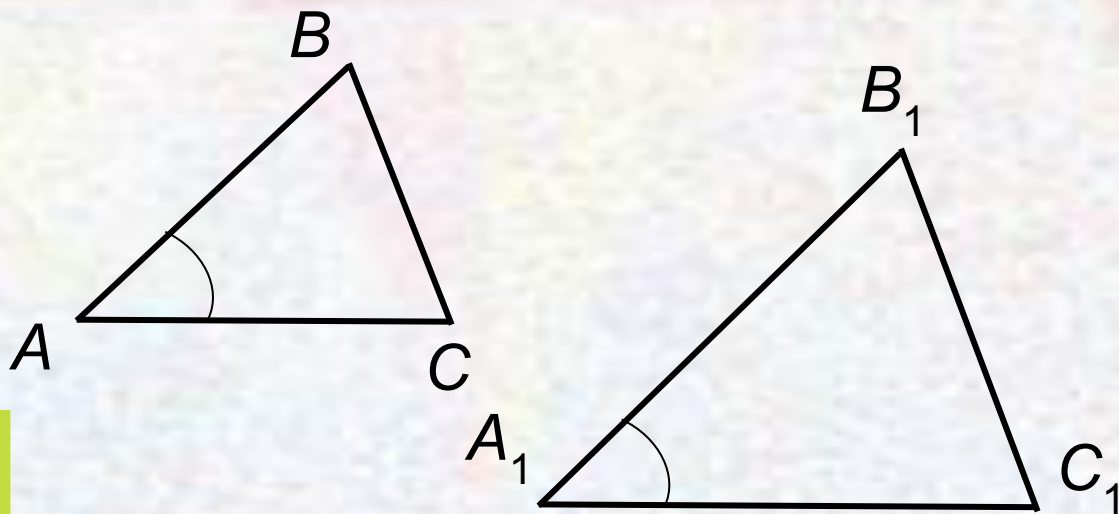
Итак, сходственные стороны пропорциональны.



Второй признак подобия треугольников.



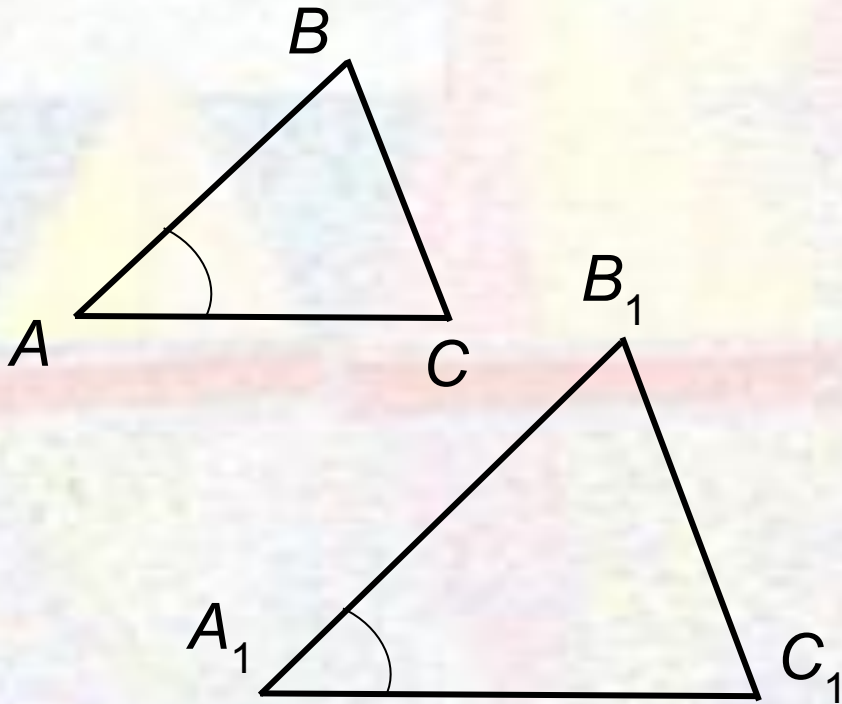
- Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$



Второй признак подобия треугольников.



Дано:

$\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$,

$$\angle A = \angle A_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

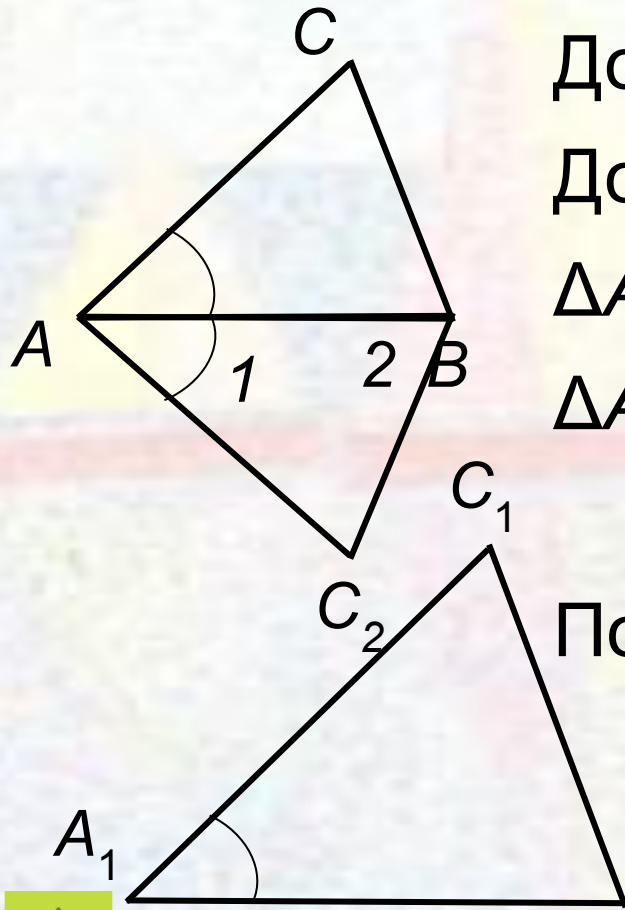
Доказать:

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:



Второй признак подобия треугольников.



Доказательство:

Достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

$\triangle ABC_2$, $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$,

$\triangle ABC_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум углам.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1} \quad (\text{из подобия}).$$

По условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$

$$AC = AC_2.$$

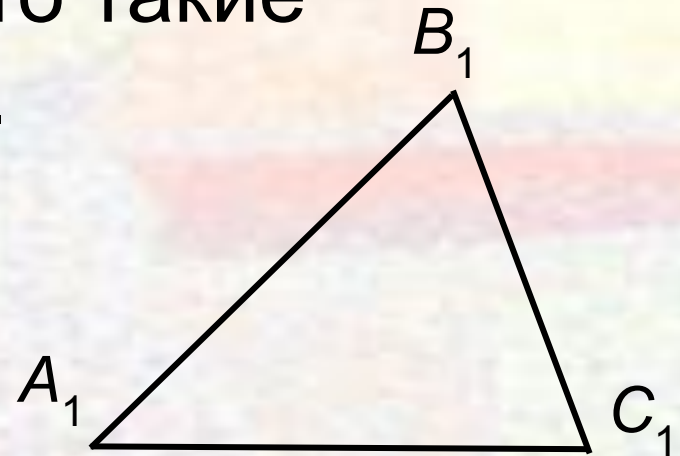
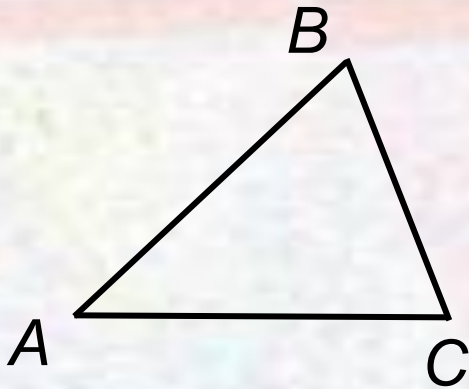
$\triangle ABC = \triangle ABC_2$, т.е. $\angle B = \angle B_1$.



Третий признак подобия треугольников.



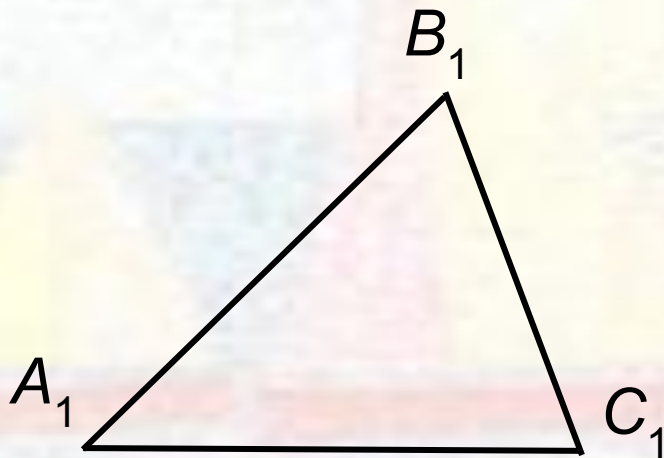
- Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$



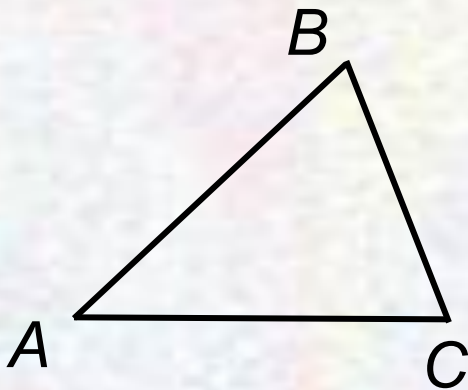
Третий признак подобия треугольников.



Дано:

$\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$



Доказать:

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:



Третий признак подобия треугольников.



Доказательство:

Достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$

$\triangle ABC_2$, $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$,

$\triangle ABC_2 \sim \triangle A_1 B_1 C_1$ по двум углам.

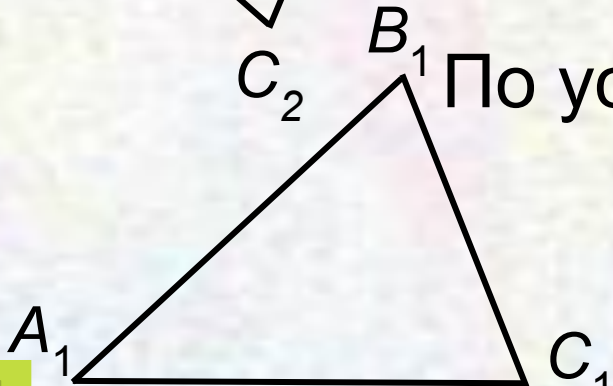
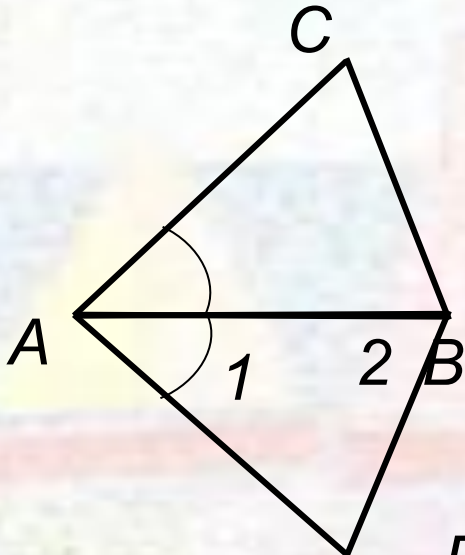
Отсюда $\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{BC_2}{B_1 C_1} = \frac{AC_2}{A_1 C_1}$

По условию

$$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} = \frac{AC}{A_1 C_1}$$

$\triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$ по трем

сторонам, т.е. $\angle A = \angle A_1$



Разминка



1

- Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам MN и PK .
- Найдите MN ,
если $AB = 3$, $CD = 4$, $PK = 2$.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PK} \quad \frac{3}{4} = \frac{MN}{2} \quad MN = 1,5$$



Разминка



2

- Даны два подобных прямоугольных треугольника.
- Коэффициент подобия 1,5
- Стороны одного из них 3, 4 и 5.
- Найдите гипотенузу другого.

$$5 \cdot 1,5 = 7,5$$

7,5

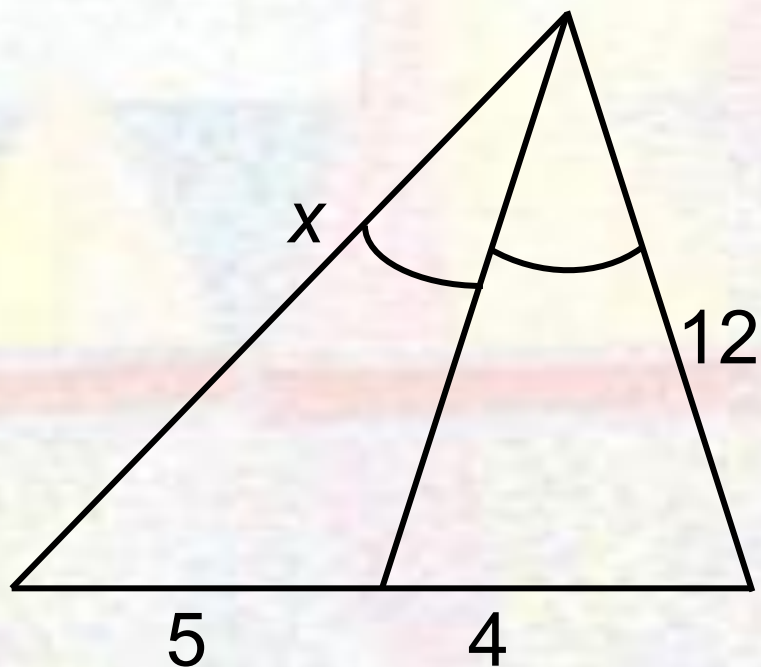


Разминка



3

- По данным на рисунке найдите x .



$$\frac{x}{5} = \frac{12}{4}$$

$$x = 15$$



Разминка



4

- Длины двух окружностей 2π и 8π .
- Найдите отношение их радиусов.

$$2\pi : 8\pi = 1 : 4$$

0,25



Разминка



5

- Отношение площадей двух квадратов равно $9 : 1$.
- Найдите сторону большего из них, если сторона меньшего равна 2.

$$k^2 = 9, k = 3$$

Коэффициент подобия

$$3 \cdot 2 = 6$$

сторона большего квадрата

6





Решение задач

Пропорциональные отрезки	1	2	3
Свойство биссектрисы	4	5	6
Определение подобных треугольников	7	8	9
Отношение периметров подобных фигур	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$
Отношение площадей подобных фигур	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$



1 задача

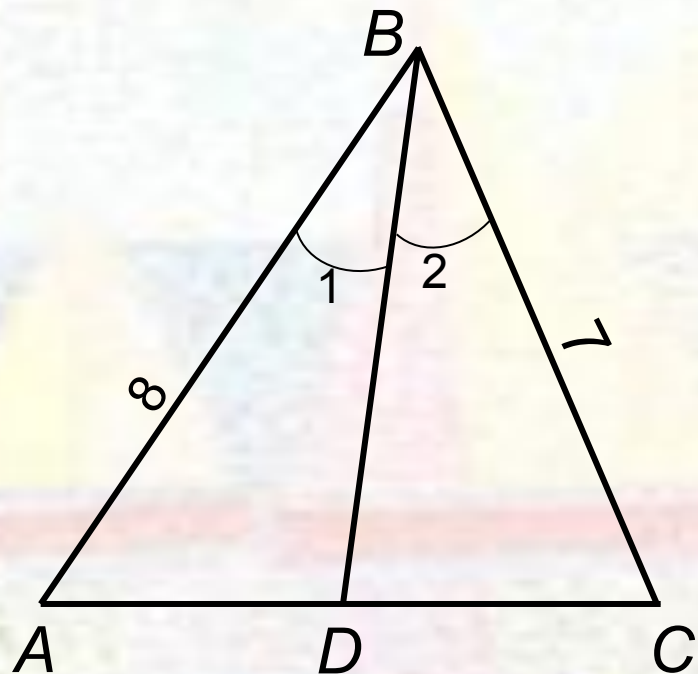
Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам EF и MN .

Найдите EF ,

если $AB = 5$ см, $CD = 80$ мм, $MN = 1$ дм.



4 задача



В треугольнике ABC

$AC = 6$ см,

$BC = 7$ см,

$AB = 8$ см,

BD – биссектриса.

Найдите, AD , CD .



7 задача

Треугольник со сторонами 2 см, 3 см, 4 см подобен треугольнику

со сторонами 5 мм, 7,5 мм и 1 см.

Найдите коэффициент подобия.



10 задача

Сходственные стороны подобных
треугольников относятся как 1 : 3.

Найдите периметр большего
треугольника, если периметр
меньшего 15 см.



13 задача

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1,$$

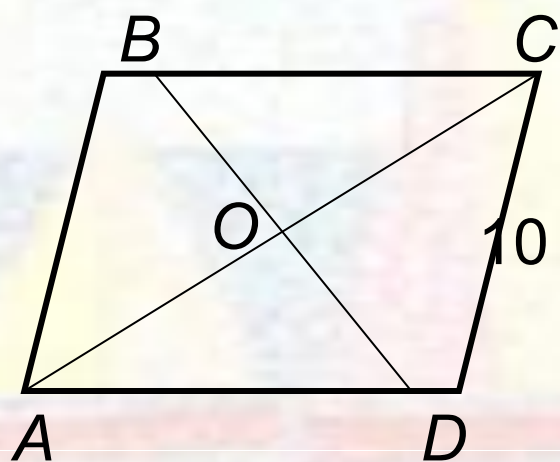
$$AB : A_1B_1 = k = 4$$

$$S_{\triangle ABC} = 48 \text{ м}^2.$$

Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.



2 задача



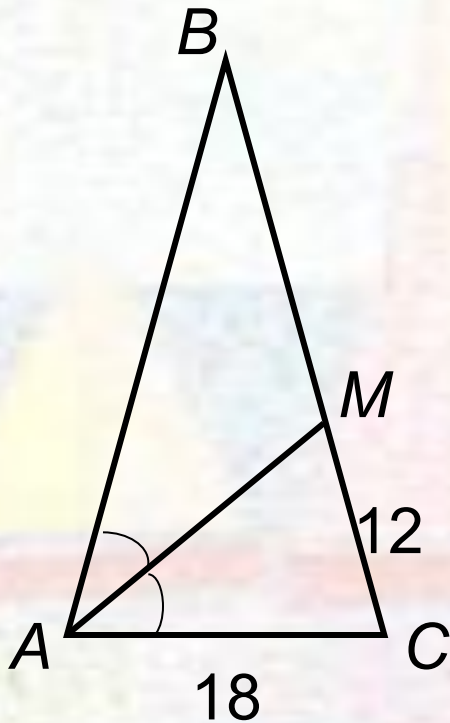
В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , $CD = 10$ см.

Найдите периметр параллелограмма, если

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{OC}$$



5 задача

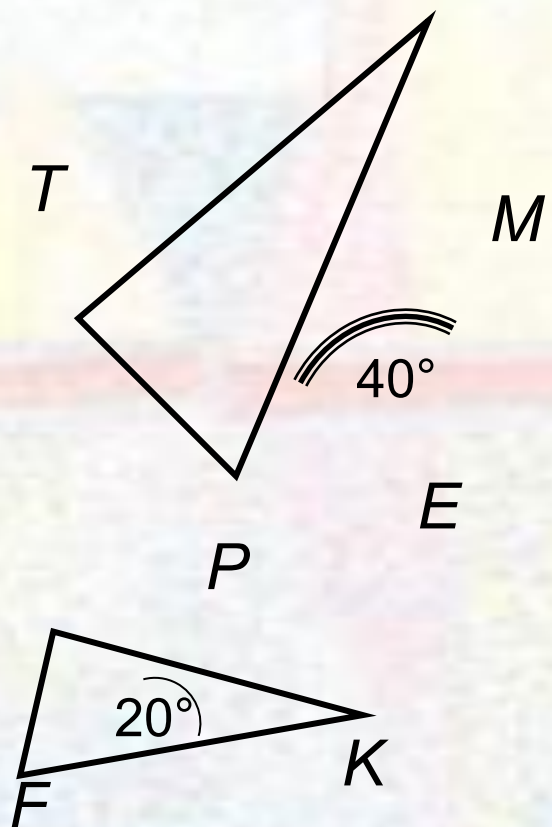


Основание равнобедренного треугольника равно 18 мм, а биссектриса делит боковую сторону на отрезки, из которых прилежащий к основанию равен 12 мм. Найдите периметр треугольника



8 задача

Треугольники KPF и EMT подобны, причем



$$\frac{KP}{ME} = \frac{PF}{MT} = \frac{KF}{ET}$$

$$\angle F = 20^\circ, \angle E = 40^\circ.$$

Найдите остальные углы этих треугольников.



11 задача

Периметры подобных треугольников
12 мм и 108 мм соответственно.

Стороны одного из них 3 мм, 4 мм и 5 мм.

Найдите стороны другого и
определите его вид.



14 задача

Площади двух подобных треугольников равны 16 см^2 и 25 см^2 .

Одна из сторон первого треугольника равна 2 см.

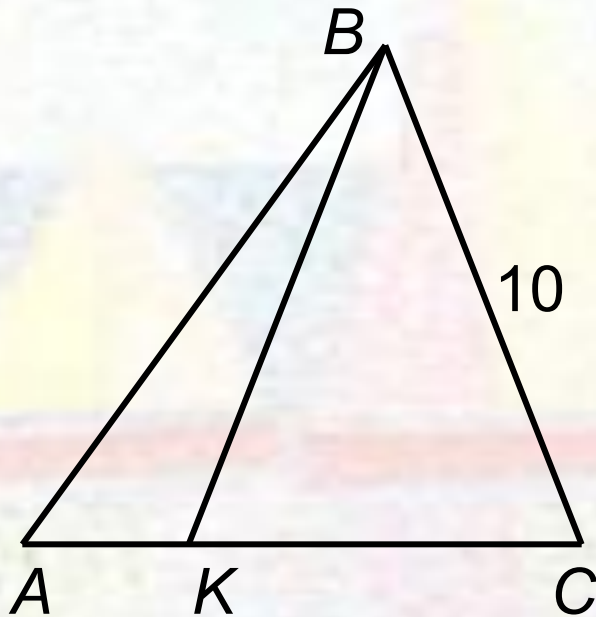
Найдите сходственную ей сторону второго треугольника.



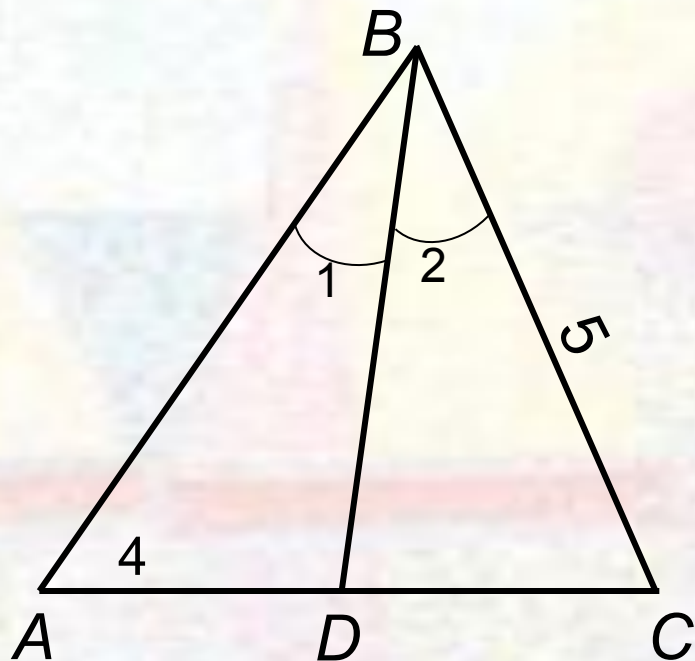
3 задача

В треугольнике ABC
точка K лежит на стороне
 AC . Площади
треугольников ABK и
 KBC относятся
как $1 : 3$,

$BC = 10$ см. Найдите AC ,
если $\frac{BC}{AC} = \frac{AK}{KC}$



6 задача



$$AD = 4$$

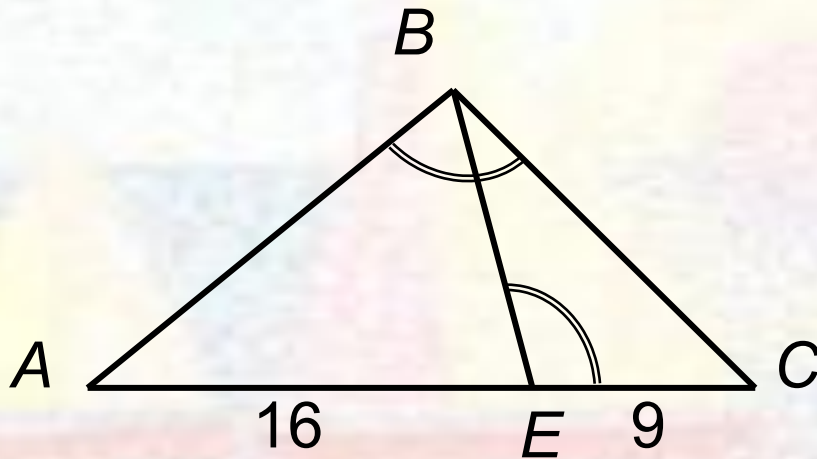
$$BC = 5$$

$$AB + DC = 12$$

Найти AB , DC , AC



9 задача



На рисунке

$$\triangle BEC \sim \triangle ABC,$$

$$AE = 16 \text{ см},$$

$$CE = 9 \text{ см. Углы}$$

ABC и BEC тупые.

Найдите BC .



12 задача

Масштаб плана 1 : 1000.

Какова длина ограды участка,

если на плане размеры

прямоугольника,

изображающего участок 2 см x 5 см.



15 задача

Периметры подобных треугольников
относятся как 2 : 3,
сумма их площадей равна 260 см^2 .
Найдите площадь каждого
треугольника.



ЗАДАЧИ



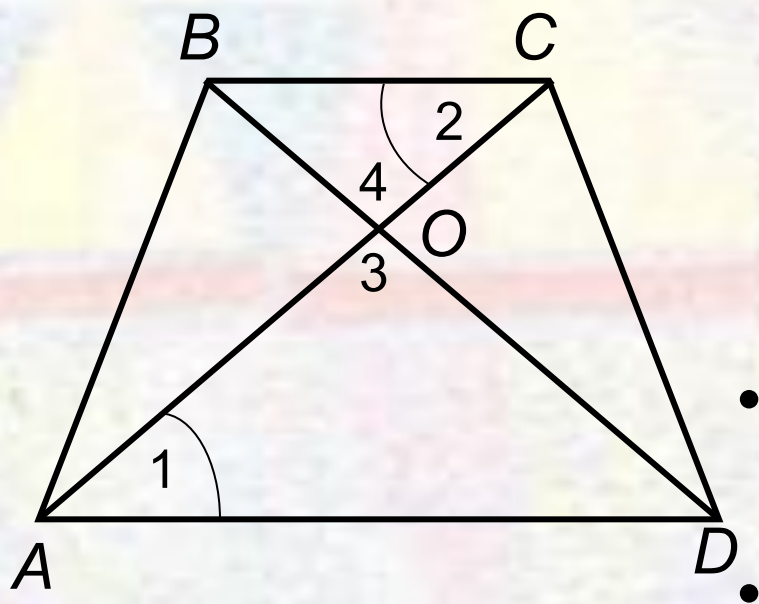
1.

Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Площади треугольников BOC и AOD относятся как $1 : 9$. Сумма оснований BC и AD равна $4,8$ см. Найдите основания трапеции.

Решение:



Решение



- Рассмотрим $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$:

$\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$, и секущей AC ;

$\angle 3 = \angle 4$ (вертикальные)

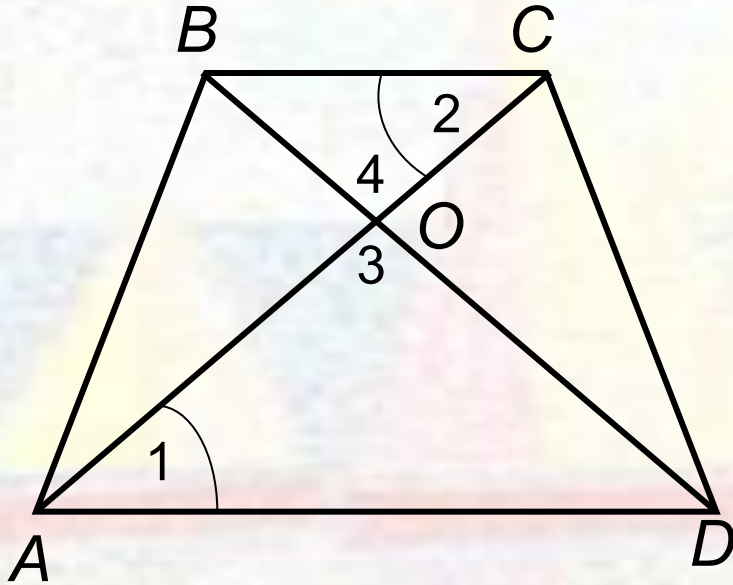
- $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ (по двум углам)

$$\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = k$$





Решение



$$\bullet \frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta BOC}} = k^2 = \frac{9}{1}$$
$$k = 3$$

$$\bullet AD + BC =$$
$$= 3BC + BC = 4BC$$

$$AD + BC = 4,8 \text{ см}$$

(по условию)

$$\bullet BC = 1,2 \text{ см}$$

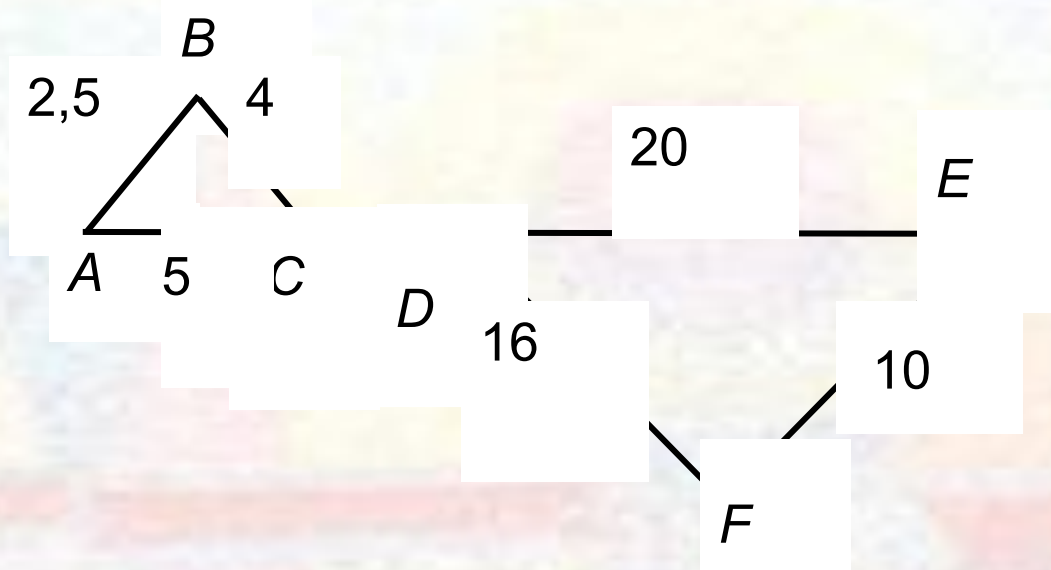
$$\bullet AD = 3,6 \text{ см}$$



Ответ: $BC = 1,2 \text{ см}$ $AD = 3,6 \text{ см}$



ЗАДАЧИ



2.

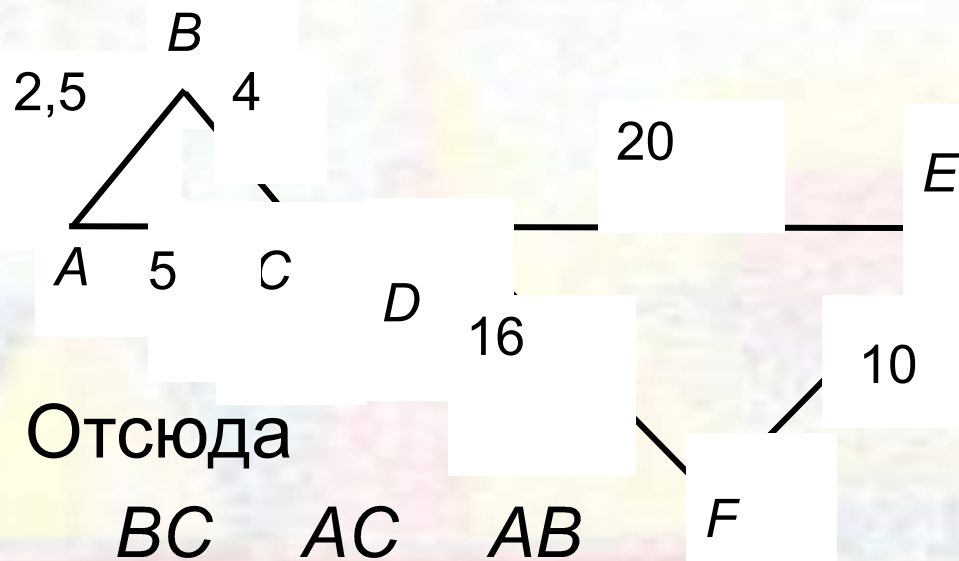
Докажите, что треугольники, изображенные на рисунке, подобны, и выясните взаимное положение прямых CB и DF .



Решение:



Решение



- Отсюда

$$\frac{BC}{DF} = \frac{AC}{DE} = \frac{AB}{EF}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

по трем пропорциональным
сторонам

- Найдем
отношение
сходственных
сторон данных
треугольников

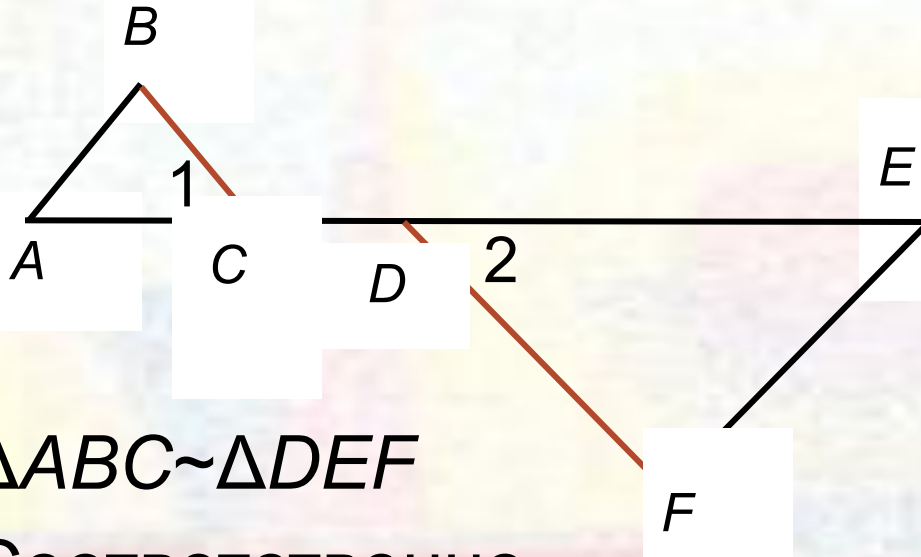
$$\frac{AB}{EF} = \frac{2,5}{10} = 0,25$$

$$\frac{AC}{ED} = \frac{5}{20} = 0,25$$

$$\frac{BC}{DF} = \frac{4}{16} = 0,25$$



Решение



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Соответственно

$$\angle A = \angle E$$

$$\angle B = \angle F$$

$$\angle ACB = \angle EDF$$

Рассмотрим
прямые BC и DF ,
секущую AE

$$\angle 1 = \angle 2$$

(внешние накрест
лежащие)

$$BC \parallel DF.$$



ЗАДАЧИ



3.

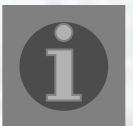
Отрезки AB и CD пересекаются

в точке O , причем $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$.

Докажите, что $\angle CBO = \angle DAO$.

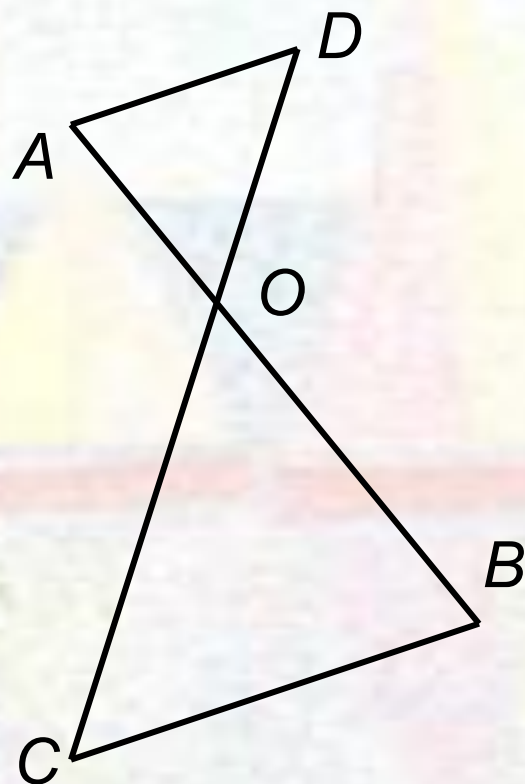


Решение:





Решение



- Рассмотрим $\triangle AOD$ и $\triangle COB$
- $\angle DOA = \angle COB$
(вертикальные).
- $$\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC} .$$
- $\triangle AOD \sim \triangle COB$ по углу и двум пропорциональным сторонам.
- $\angle CBO = \angle DAO$ (из подобия).



ЗАДАЧИ



4. В треугольнике ABC

$AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$.

Точка E лежит на стороне AB .

Внутри треугольника взята точка M так, что $MB = 5,25$, $ME = 4,5$, $AE = 1$.

Прямая BM пересекает AC в точке P .

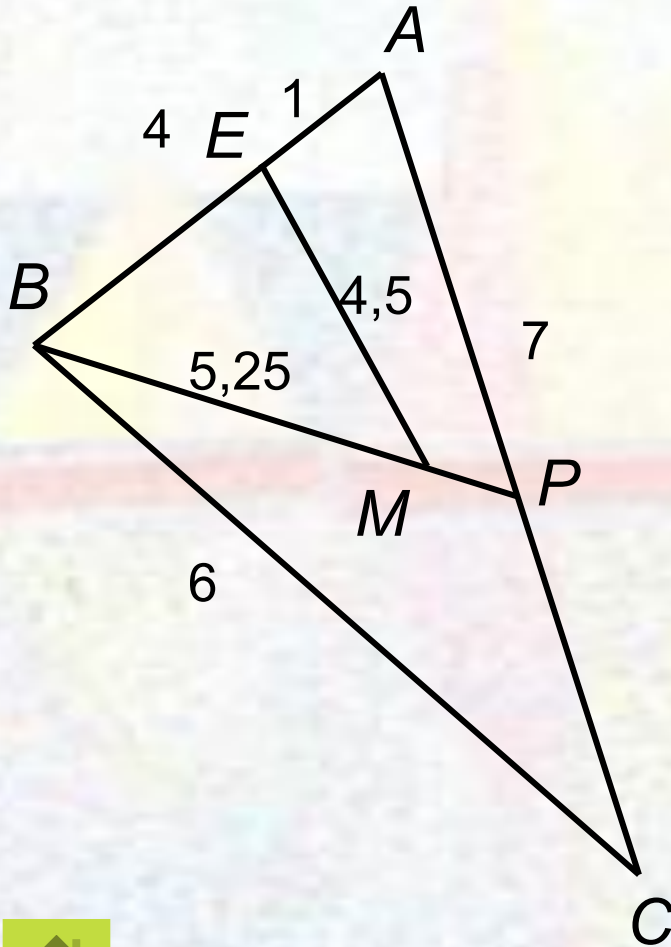
Докажите, что $\triangle APB$ равнобедренный.



Решение:



Решение



- Рассмотрим $\triangle BEM$ и $\triangle ABC$
 $BE = AB - AE = 4 - 1 = 3$
 $BE : AB = 3 : 4 = 0,75$
 $EM : BC = 4,5 : 6 = 0,75$
 $BM : AC = 5,25 : 7 = 0,75,$
т.е. стороны треугольников
пропорциональны



Решение



- $\triangle BEM \sim \triangle ABC$ по трем пропорциональным сторонам.
Следовательно, $\angle BME = \angle ACB$
 $\angle EBM = \angle BAC$
 $\angle BEM = \angle ABC.$

- Рассмотрим треугольник ABP :
 $\angle EBM = \angle BAC$, т.е. $\angle ABP = \angle BAP$.
 $\triangle ABP$ – равнобедренный, что и требовалось доказать.



ЗАДАЧИ



5.

Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 90 .

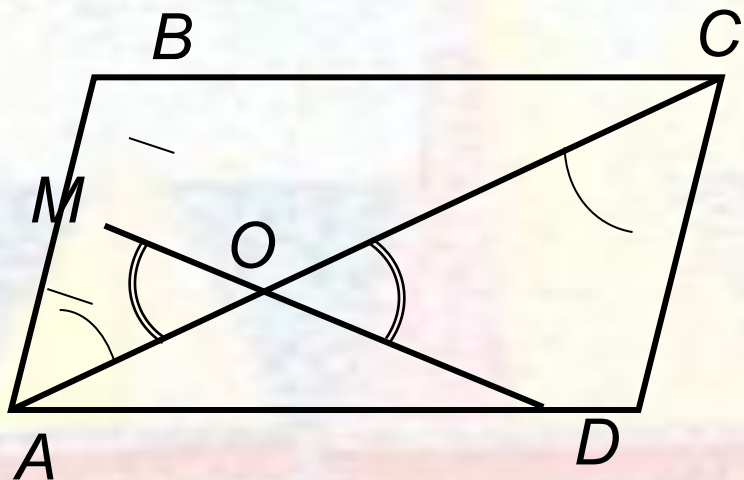
Середина M стороны AB соединена с вершиной D .

Отрезок MD пересекает AC в точке O .
Найдите отрезки AO и CO .

Решение:



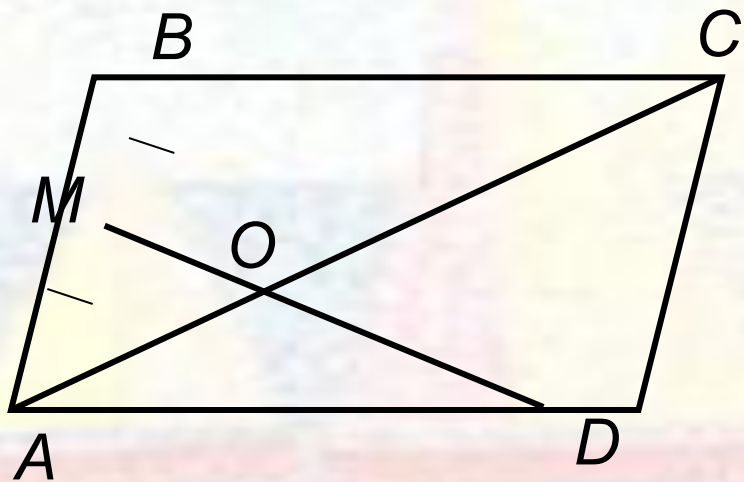
Решение



- Рассмотрим $\triangle AOM$ и $\triangle COD$
 $\angle AOM = \angle COD$
(вертикальные),
 $\angle MAO = \angle OCD$
(накрест лежащие при $AB \parallel DC$ и секущей AC).
Отсюда $\triangle AOM \sim \triangle COD$
по двум углам.



Решение



- $AM = \frac{1}{2} AB$ (по условию)
 $AB = CD$ ($ABCD$ - параллелограмм),
 $AM : CD = 1 : 2$

- $\triangle AOM \sim \triangle COD$

$$\frac{AO}{OC} = \frac{OM}{OD} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{2} \quad \text{т.е. } AO = 0,5CO$$

- $AO = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3} \cdot 90 = 30$
 $CO = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60$





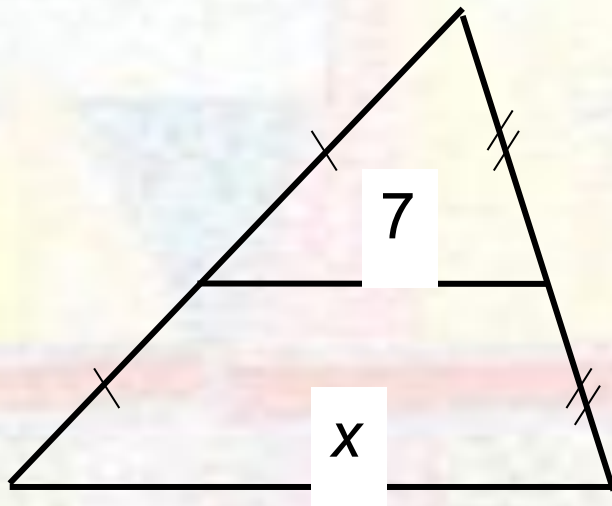
ТЕСТ

Решите задачи, отметьте нужные ячейки

	А	Б	В	Г
<u>1</u>				
<u>2</u>				
<u>3</u>				
<u>4</u>				
<u>5</u>				



ТЕСТ



1. По данным рисунка x равен

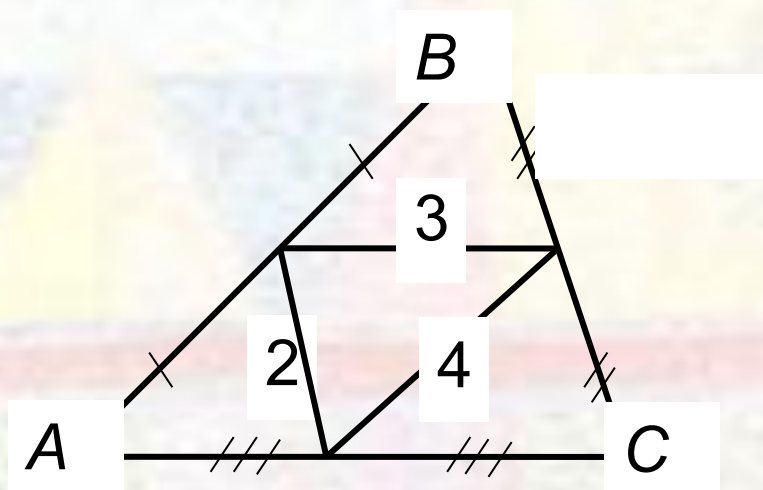
- А) 7
- Б) 14
- В) 3,5
- Г) $14/3$



ТЕСТ



2) По данным рисунка
периметр $\triangle ABC$
равен



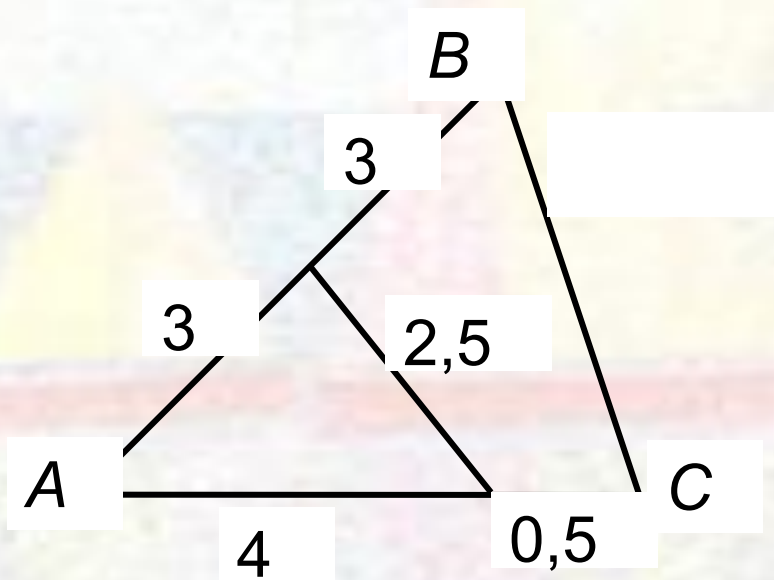
- А) 9
- Б) 27
- В) 36
- Г) 18



ТЕСТ



3) По данным рисунка отрезок BC равен



А) 3,75

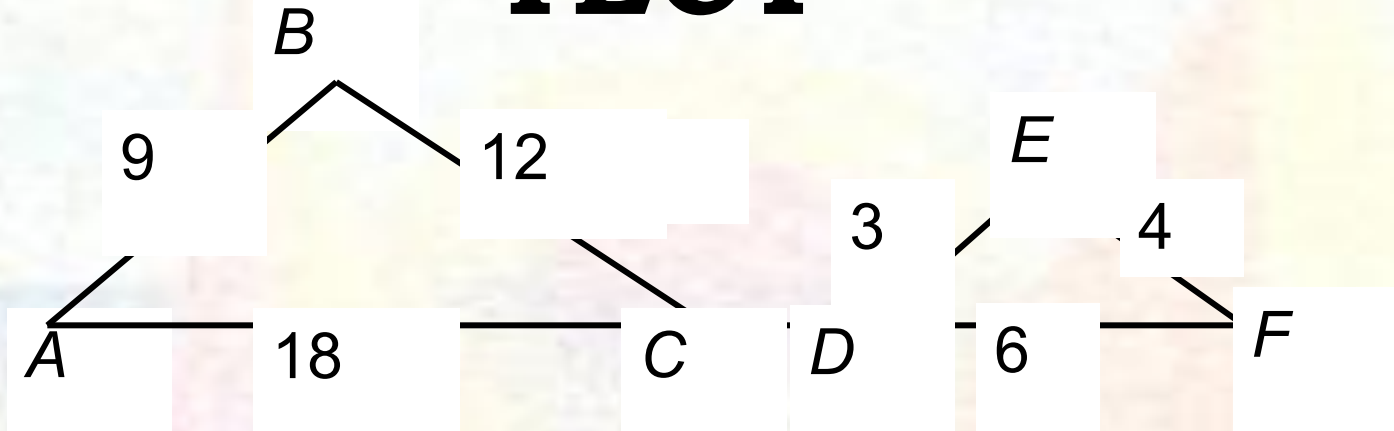
Б) 7,5

В) 5

Г) 4,5



ТЕСТ

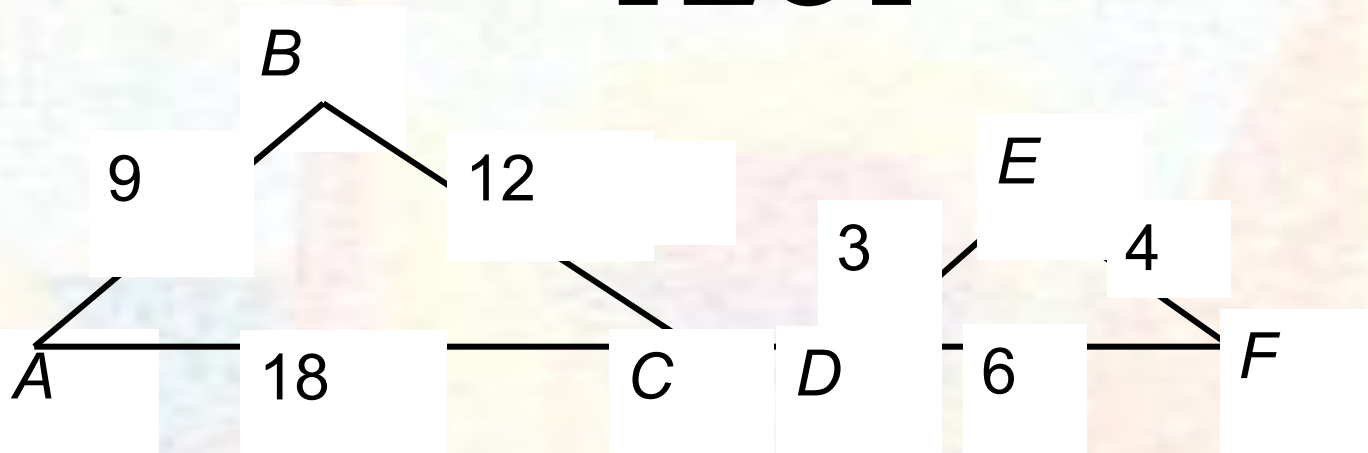


4) По данным рисунка площади данных треугольников относятся

- A) 3 : 1
- Б) 9 : 1
- В) 6 : 1
- Г) 9 : 4



ТЕСТ



5) по данным рисунка прямые AB и DE






- А) нельзя ответить
- Б) пересекаются
- В) параллельны





ТЕСТ

ОТВЕТЫ:

	А	Б	В	Г
1				
2				
3				
4				
5				



Помощь в управлении презентацией

- **управление презентацией осуществляется с помощью левой клавиши мыши**
- **переход от одного слайда к другому и на гиперссылки по одиночному щелчку**
- **завершение презентации при нажатии кнопки выход**



Возврат в содержание



Переход по слайдам



Возврат к гиперссылке



Справка