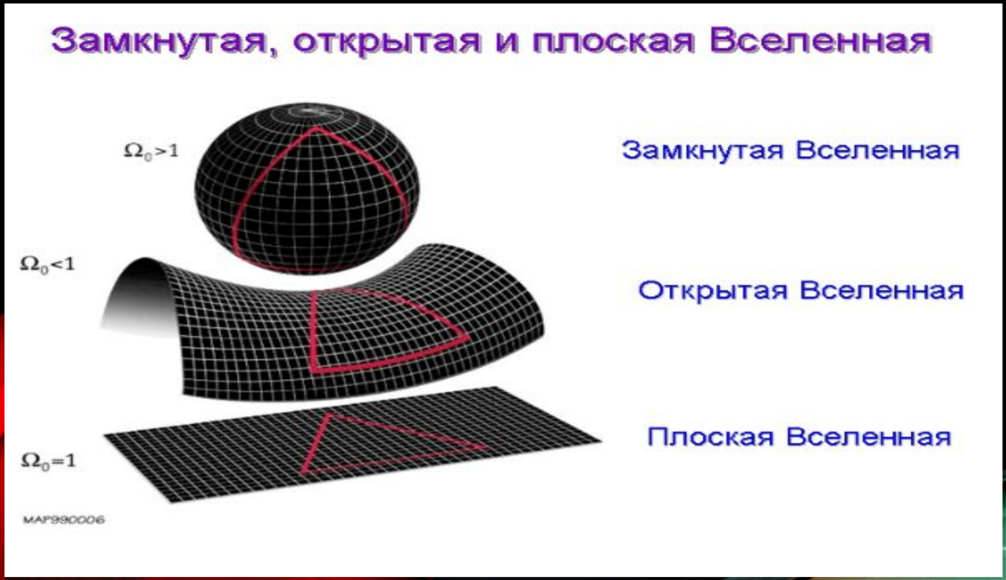
МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 5

ТРИ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЮ ВСЕЛЕННОЙ

Направление: Геометрия



Руководитель:
Сидько Светлана Николаевна

Автор:
ПИНСКИХ ЕЛЕНА ОЛЕГОВНА
Ученица 10 класса

г.Лермонтов 2014

Строение и развитие Вселенной всегда занимало ученых и будет их занимать. Вопросы мироздания ставились и решались наукой. Поэтому не удивительно, что к одному открытию одновременно подходили и физики и математики.

Пространство. Какова его природа? Как оно связано с геометрией Вселенной? Или оно отделено от нее? Может оно есть лишь создание человеческого ума или ума божественного?

Только наука может установить истинное строение пространства, а значит дает ответ, какой геометрией описывается его строение.

Объектом исследования моей работы является геометрия Вселенной

Предмет исследования – три вида пространства:

- евклидово пространство(плоская Вселенная)

- сферическое пространство(замкнутая Вселенная)

-Гиперболическое пространство(открытая Вселенная)

Целью данной работы является:
Сопоставить три точки зрения на геометрию Вселенной

В ходе работы решались следующие задачи:

1) Описать совпадения и отличия суждений ученых: Евклида, Лобачевского и Римана на геометрию Вселенной

2) Выяснить от чего зависит геометрия Вселенной

3) Установить, применимы ли к сферическому и гиперболическому пространству теоремы обыкновенной геометрии, которую мы учим в школе?

Евклид -греческий математик, живший в

IV-III веках до нашей эры.

В каждой науке наступает время, когда необходимо собрать воедино всё уже известное и из отдельных частей построить здание.

Таким строителем в геометрии стал Евклид. Он поставил своей задачей найти законы, которым подчиняются все линии и тела в природе, и расположить эти законы в стройной системе.

Основные требования (постулаты), аксиомы, которым должны подчиняться элементы или первоначальные допущения, на которых строится вся геометрия, были:

1. Чтобы от каждой точки к каждой точке можно было провести прямую.

2. И чтобы ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой.

3. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любого радиуса.

4. И чтобы все прямые углы были друг другу равны.

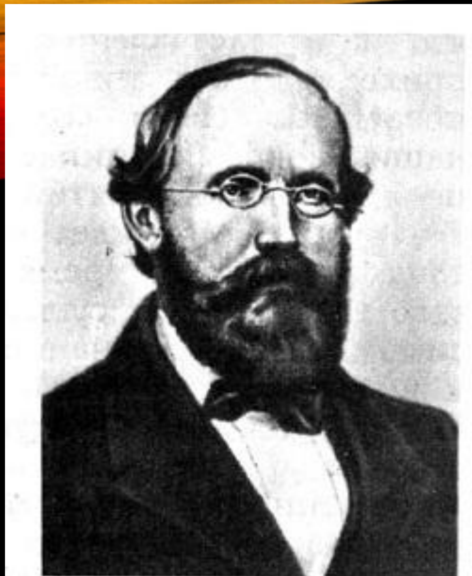
5. И чтобы всякий раз, как прямая, пересекая две прямые, образует с ними внутренние односторонние углы, составляющие вместе менее дух прямых, эти прямые при неограниченном продолжении пересеклись с той стороны, с которой эти углы составляют менее двух прямых.

Николай Иванович Лобачевский

(1792-1856), российский математик.

Он утверждал, что геометрия Евклида справедлива для сравнительно небольших расстояний одной Солнечной системы с однородной массой и кривизной пространства, равной нулю, то есть связал геометрию с физикой. Он рассмотрел пространство с отрицательной кривизной, и поэтому геометрию Лобачевского называют гиперболической.

Однако, в 19 веке нашим соотечественником - Николаем Ивановичем Лобачевским была создана новая, удивительная геометрия.



Георг Фридрих Бернхард Риман, немецкий математик (1826 - 1866)

Несколько отличное направление предложил немецкий математик Бернхард Риман, который выдвинул ряд новых идей геометрии на поверхности. Риман целиком пересмотрел основы геометрии Евклида, вместо них предложил свои собственные принципы построения геометрии. В отличие от Лобачевского, Риман описывает свою геометрию словесно, без всяких математичес выкладок. Примером пространства Римана может служить шаровая сфера, то есть пространство замкнутое.

Попробую показать, что представляют собой эти три пространства: евклидова плоскость, сфера и гиперболическое пространство.

Я думаю, что любому человеку, изучавшему геометрию в школе, не составит труда представить евклидову плоскость: представьте, что стол, за которым вы сидите, простирается до бесконечных размеров.

Сферические предметы также окружают нас повсюду: возьмите воздушный шар, глобус, футбольный мяч.

Но что такое гиперболическая поверхность, понять гораздо сложнее, чем вообразить сферу. Один способ изобразить эту загадочную поверхность был обнаружен великим французским математиком Анри Пуанкаре. В диске Пуанкаре гиперболическая поверхность смоделирована в круге.

Модель Диска Пуанкаре

В работе “Предел Круга III ” красные, зеленые, синие и желтые рыбы составляют мозаику их мира в созвучии треугольников и квадратов. В работе “Предел Круга IV” ангелы и демоны заключены в гиперболической троице, остальная плоскость заполнена шестиугольниками и восьмиугольниками.

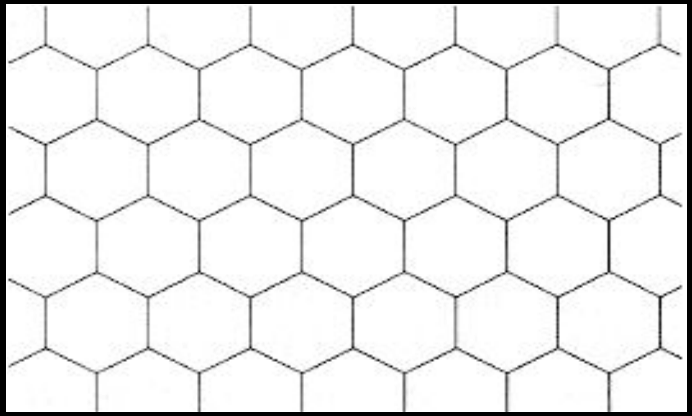
“Предел Круга III” “Предел Круга IV”

Попытаемся представить его на евклидовой плоскости. Но здесь мы сможем изобразить поверхность, состоящую только из шестиугольников (классический образец улья).

Это пример Евклидова пространства.

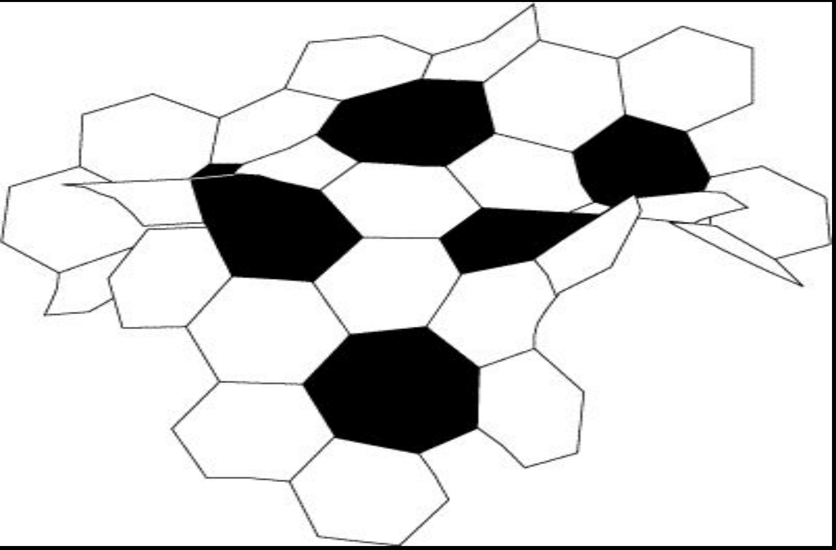
ДАВАЙТЕ ПОСМОТРИМ НА ОБЫЧНЫЙ ФУТБОЛЬНЫЙ МЯЧ, И ПРЕДСТАВИМ СЕБЕ ЕГО В КАЖДОМ ПРОСТРАНСТВЕ. МЯЧ СОСТАВЛЕН ИЗ ШЕСТИУГОЛЬНИКОВ И ПЯТИУГОЛЬНИКОВ: РЯДЫ БЕЛЫХ ШЕСТИУГОЛЬНИКОВ ОКРУЖАЕТ МЕНЬШЕЕ ЧИСЛО ЧЕРНЫХ ПЯТИУГОЛЬНИКОВ.

ЭТО ПРИМЕР ПРОСТРАНСТВА РИМАНА.



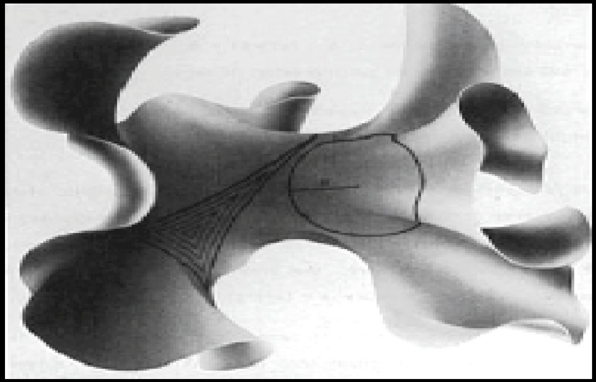
На плоскости каждый шестиугольник (то есть фигура, которая имеет шесть сторон), окружен шестью другими, и они все сложены вместе и точно заполняют плоскость.

Теперь, вместо замыкания в сферу поверхность раскрывается: появляется избыток поверхности. Эффект этот подобен тому, что мы видим в листьях салата и некоторых типах водорослей, где растительная поверхность расширяется от середины листа. **Это пример пространства Лобачевского.**



Существует несколько различных вариантов изображения гиперболического пространства:

Компьютерная модель гиперболической поверхности Викса



Так гиперболическую поверхность воспроизвел на компьютере математик Джеффри Викс.

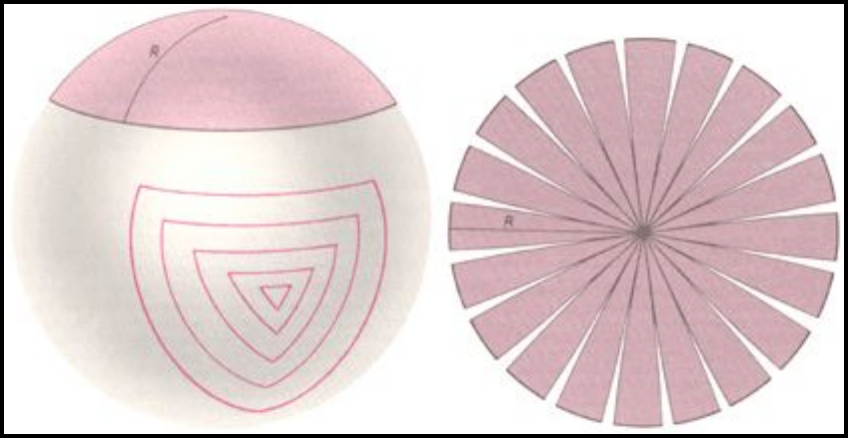
Вязаная модель гиперболической поверхности

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СКЛАДКИ МАНТИИ МОРСКОГО МОЛЮССКА

Естественные примеры гиперболической геометрии математики видят в листьях салата и водорослей, а также в мантиях морских моллюсков

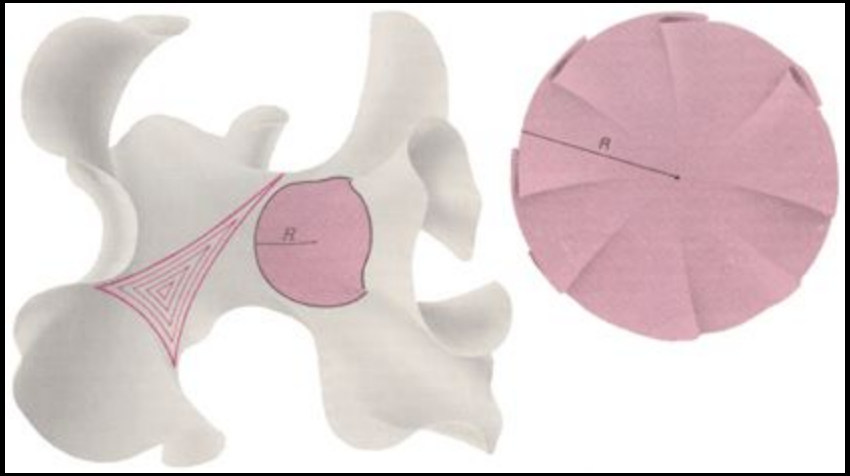
Оригинальный способ представления гиперболической поверхности изобрела математик Корнуэльского университета Дайна Таймина – с помощью вязания.

Вернемся к сфере. Если плоскую фигуру поместить на сферу, то полного соприкосновения не будет, так как кривизна у них различная. Кривизна плоских фигур равна нулю. Отрезанная от сферы круглая «шапочка» при распластывании на плоскости разрывается точно так же, как выпуклый кусочек кренделя. Значит, длина окружности круга на сфере меньше длины окружности плоского круга, имеющего такой же радиус. Поэтому говорят, что сфера имеет постоянную положительную кривизну.



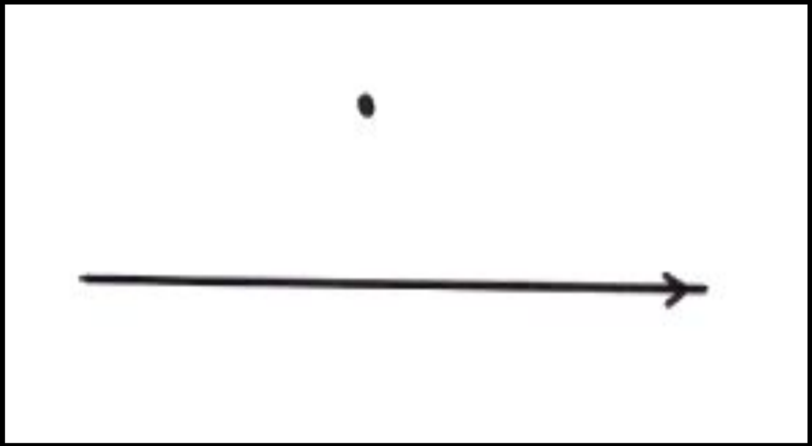
ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

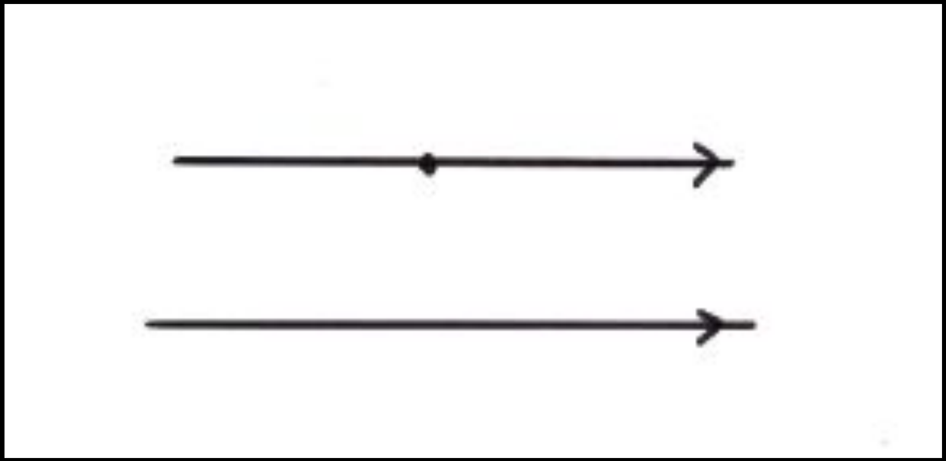
Если же вырезать круг из гиперболической поверхности, то при распластывании он будет сморщиваться и накладываться сам на себя. Значит, его площадь больше площади плоского круга того же радиуса. Говорят, что гиперболическая поверхность имеет постоянную отрицательную кривизну.



Итак, теперь мы знаем, что представляют собой возможные типы поверхностей: евклидова плоскость, сфера и гиперболическая поверхность. Но применимы ли к последним двум поверхностям теоремы обыкновенной стереометрической геометрии, которую мы учим в школе? На первый взгляд, применимы. Между тем, если присмотреться к сфере и гиперболической поверхности внимательнее - а для этого подойдёт обыкновенный глобус и вязаная модель, - легко обнаружить немало удивительного.

Рассмотрим пятый постулат Евклида, который определяет условия параллельности линий. Проведем прямую и возьмем точку, не лежащую на этой прямой.





Теперь проведем прямую через точку. Каков результат? Пятый постулат Евклида говорит, что есть только одна прямая, которую можно провести через точку, которая никогда не будет пересекать первоначальную.
Все другие линии отклонились бы относительно первоначальной линии и в конечном итоге пересекли бы ее. Мы говорим, что параллельные линии не пересекаются. Это кажется неоспоримым. Но Лобачевский и Риман предложили опровержение этого постулата.

При пересечении сферы её диаметральными, проходящими через центр, плоскостями образуются большие окружности, которым отводится роль прямых в сферической геометрии (на глобусе это экватор и меридианы). В отличие от обычной геометрии любые две сферические прямые пересекаются в двух диаметрально противоположных точках - на сфере отсутствует само понятие параллельности. Другое существенное отличие прямой на сфере от прямой на плоскости заключается в том, что сферическая прямая замкнута: двигаясь по ней всё время в одну сторону, мы в конце концов вернёмся в исходную точку. То есть точка не разбивает сферическую прямую на две части, подобные лучам обычной прямой.

ПРЯМЫЕ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

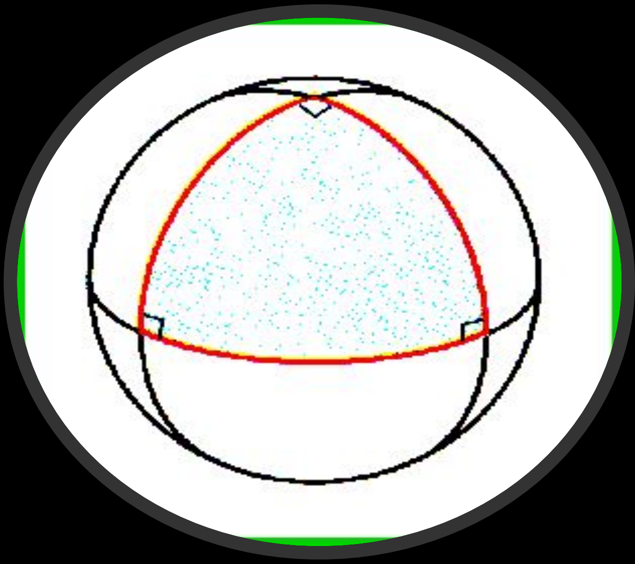
Если мы возьмем гиперболическую поверхность и проведем на ней прямую линию, то она также как и на сфере не будет восприниматься как прямая на плоскости. Она будет казаться очень сильно искривленной, но можно проверить, что это не соответствует действительности. Так, желтые линии в модели, изогнутые на вид, на самом деле представляют собой прямые.

Ученые Направления	Евклид	Лобачевский	Риман
Основные понятия	Точка, прямая, плоскость	Точка, прямая, плоскость Лобачевского	Точка, прямая, плоскость Римана
Описание	Математические выкладки	Математические выкладки	Описывает свою геометрию словами.
Аксиомы (постулаты)	Пять аксиом абсолютной геометрии	Принимает все аксиомы абсолютной геометрии, кроме пятого постулата. Предлагает свою аксиому, обратную пятому постулату.	Полностью пересмотрел основы геометрии Евклида, вместо них предложил свой собственный принцип построения геометрии
Пятый постулат	Через точку вне прямой на плоскости в этой плоскости можно провести единственную прямую параллельную данной.	Через точку вне прямой на плоскости в этой плоскости можно провести более одной прямой, не пересекающей данную.	Отсутствует понятие параллельности

Из школьной программы мы знаем, что сумма углов треугольника всегда равна 180 градусов. Это верно на евклидовой плоскости, но это не верно на сфере или на гиперболической поверхности.

Многие свойства сферического треугольника почти дословно повторяют свойства обычного треугольника, например, три признака равенства треугольников.

Но однако, на сфере, сумма внутренних углов треугольника всегда больше чем 180 градусов, поэтому треугольник на сфере может иметь сразу три прямых угла, если, например, он ограничен двумя перпендикулярными меридианами и экватором.



ТРЕУГОЛЬНИК НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

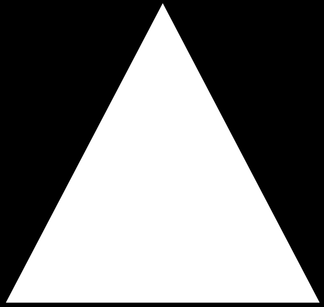
На гиперболической поверхности сумма углов треугольника меньше, чем 180 градусов. Кроме того, с увеличением длины сторон, углы треугольника будут уменьшаться. А если вершины треугольника бесконечно далеко удалить друг от друга для создания наибольшего треугольника, углы будут стремиться к нулевой величине!

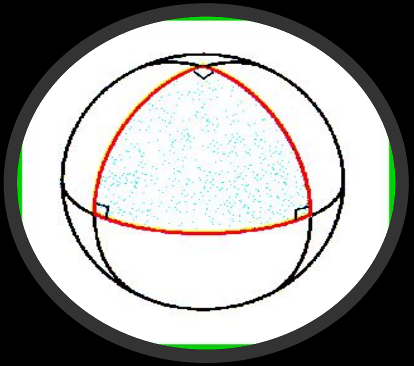
Ученые Направления	**Евклид**	**Лобачевский**	**Риман**
Сумма углов треугольника	Сумма углов треугольника равна 180°	Сумма углов треугольника меньше 180°	Сумма углов треугольника больше 180°
Пространство (Вселенная)	Плоская Вселенная R − радиус кривизны. Пространство с кривизной равной нулю $1/R = 0$	Открытая Вселенная. R − радиус кривизны. Пространство с отрицательной кривизной $1/R<0$, При $R\to\infty$, $1/R \to 0$, получаем пространство Евклида	Замкнутая Вселенная. R − радиус кривизны Пространство с положительной кривизной. $1/R>0$ Риман высказывает догадки о существовании других пространств и измерений.

На основании результатов сопоставления трех различных точек зрения на геометрию Вселенной мы пришли к следующим выводам:

а) если в геометрии Евклида через точку не лежащую на данной прямой , можно провести только одну прямую, параллельную данной, а в геометрии Лобачевского – две и более, то в геометрии Римана вовсе не существует параллельных прямых.

б) Сумма углов треугольника в геометрии Евклида равна 180 градусов, у Лобачевского она всегда меньше 180 градусов, а в геометрии Римана эта сумма всегда больше 180 градусов.





Результаты в ходе данного исследования так же показали, **будущее Вселенной зависит от ее геометрии:**

1. Если Вселенная имеет сферическую геометрию, то она в конце концов будет сжиматься.
   2. Если ее геометрия гиперболическая, то расширение будет продолжаться вечно.
3. Если же геометрия Вселенной евклидова, то она тоже будет вечно расширяться, но скорость расширения будет стремиться к нулю.
   Споры о том, что представляет Вселенная: евклидово пространство (плоская Вселенная), сферическое пространство (замкнутая Вселенная) или гиперболическое (открытая Вселенная) не разрешены до настоящего времени.

С П А С И Б О З А В Н И М А Н И Е !