

Решение простейших тригонометрических неравенств

- Решение неравенств, содержащих тригонометрические функции обычно сводится к решению простейших неравенств вида:

$$\sin(t) < (\leq; >; \geq) a;$$

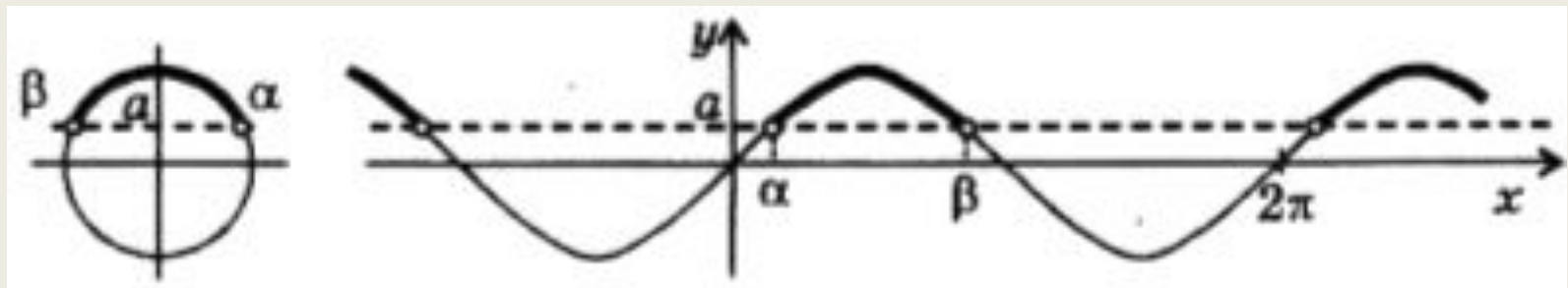
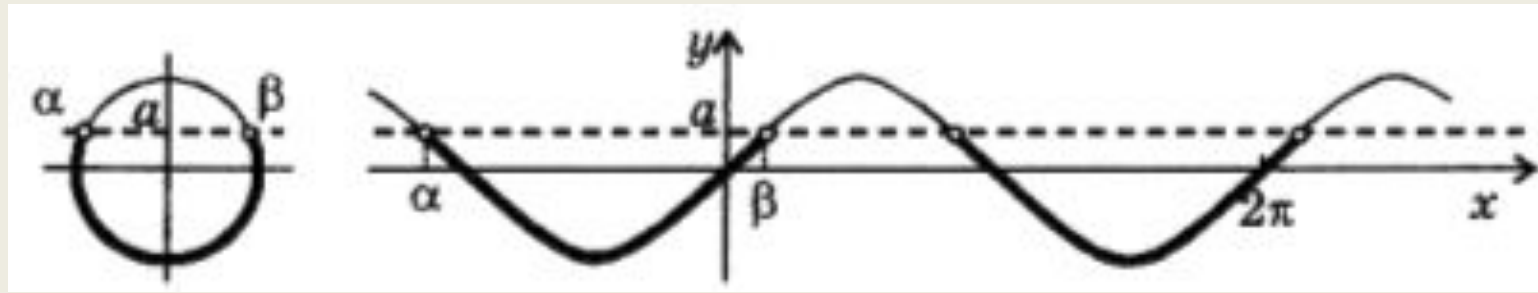
$$\cos(t) < (\leq; >; \geq) a;$$

$$\operatorname{tg}(t) < (\leq; >; \geq) a;$$

$$\operatorname{ctg}(t) < (\leq; >; \geq) a;$$

Способы решения этих неравенств совершенно очевидным образом вытекают из представления тригонометрических функций на единичном круге.

Вид неравенства	Множество решений неравенства
$\sin x > a (a < 1)$	$x (\arcsin a + 2\pi n, \pi - \arcsin a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\sin x < a (a < 1)$	$x (-\pi - \arcsin a + 2\pi n, \arcsin a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\cos x > a (a < 1)$	$x (-\arccos a + 2\pi n, \arccos a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\cos x < a (a < 1)$	$x (\arccos a + 2\pi n, 2\pi - \arccos a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x > a$	$x (\operatorname{arctg} a + \pi n, \pi/2 + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x < a$	$x (-\pi/2 + \pi n, \operatorname{arctg} a + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x > a$	$x (\pi n, \operatorname{arcctg} a + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x < a$	$x (\operatorname{arcctg} a + \pi n, \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$

\cong \cong 

$$a = -1$$

$$\begin{aligned} \sin x < -1 & - \text{решений нет} \\ \sin x \leq -1 & \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2\pi n \\ \sin x > -1 & \Leftrightarrow x \neq -\pi/2 + 2\pi n \\ \sin x \geq -1 & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$a = 1$$

$$\begin{aligned} \sin x < 1 & \Leftrightarrow x \neq \pi/2 + 2\pi n \\ \sin x \leq 1 & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ \sin x > 1 & - \text{решений нет} \\ \sin x \geq 1 & \Leftrightarrow x = \pi/2 + 2\pi n \end{aligned}$$

$$a < -1$$

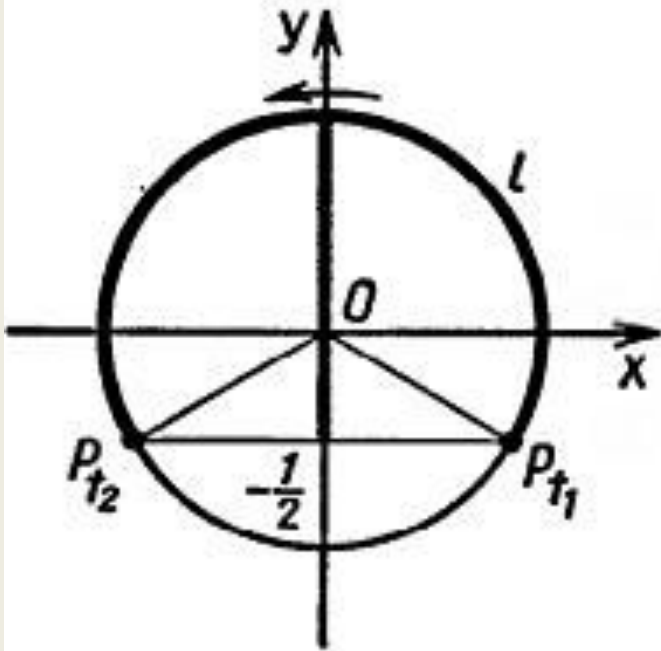
$$\begin{aligned} \sin x < a \cdot (\leq a) & - \text{решений нет} \\ \sin x > a \cdot (\geq a) & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$a > 1$$

$$\begin{aligned} \sin x < a \cdot (\leq a) & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ \sin x > a \cdot (\geq a) & - \text{решений нет} \end{aligned}$$

Тригонометрическое неравенство $\sin(t) \geq a$.

Все точки P_t единичной окружности при значениях t , удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату, большую или равную $-1/2$. Множество таких точек это дуга l , которая выделена жирным на рисунке ниже.

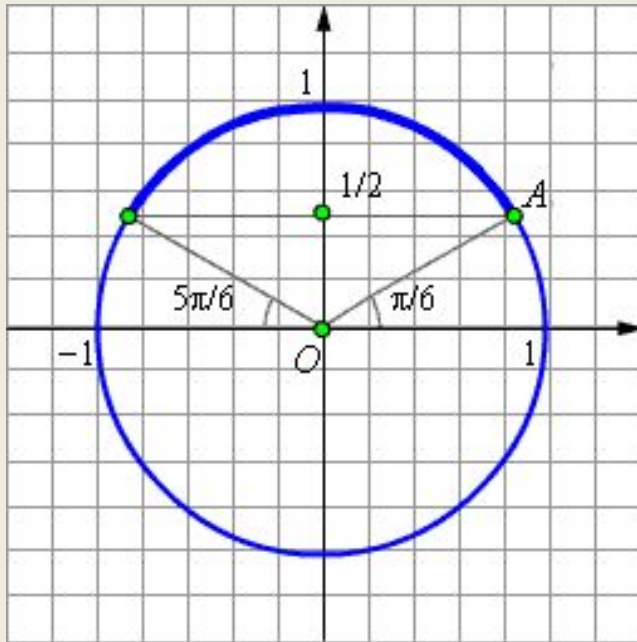


Найдем условие принадлежности точки P_t этой дуге. Точка P_t лежит на правой полуокружности, ордината P_t равна $1/2$, и, следовательно, в качестве t_1 удобно взять значение $t_1 = \arcsin(-1/2) = -\pi/6$. Представим себе, что мы совершаем обход дуги l от точки P_{t_1} к P_{t_2} против часовой стрелки. Тогда $t_2 > t_1$, и, как легко понять, $t_2 = \pi - \arcsin(-1/2) = 7\pi/6$. Таким образом, получаем, что точка P_t принадлежит дуге l , если $-\pi/6 \leq t \leq 7\pi/6$. Таким образом, решения неравенства, принадлежащие промежутку $[-\pi/2 ; 3\pi/2]$ длиной 2π таковы: $-\pi/6 \leq t \leq 7\pi/6$. Вследствие периодичности синуса остальные решения получаются добавлением к найденным чисел вида $2\pi n$, где n - целое.

Таким образом, мы приходим к ответу:

$$-\pi/6 + 2\pi n \leq t \leq 7\pi/6 + 2\pi n, \quad n - \text{целое.}$$

Пример 1



Решите неравенство $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Нарисуем тригонометрическую окружность и отметим на ней точки, для которых ордината превосходит $\frac{1}{2}$.

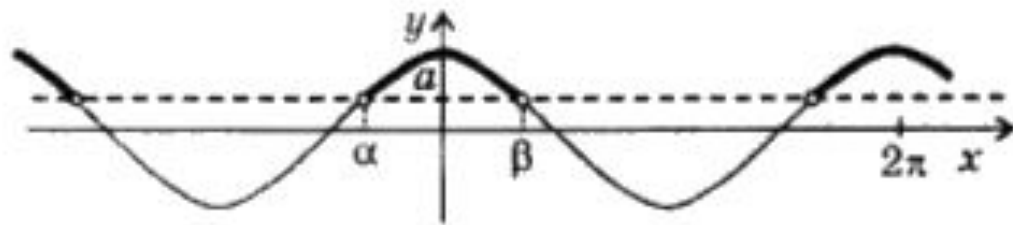
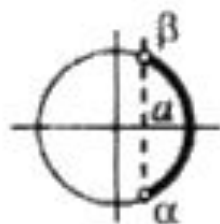
Для $x \in [0; 2\pi]$ решением данного неравенства

будут $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$. Ясно также, что если некоторое число x будет отличаться от какого-нибудь числа из указанного интервала на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, то $\sin x$ также будет не меньше $\frac{1}{2}$. Следовательно, к концам найденного отрезка решения нужно просто добавить $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Окончательно, получаем, что решениями исходного неравенства будут все $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right]$, где $n \in \mathbb{Z}$,

Ответ. $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right]$, где $n \in \mathbb{Z}$,

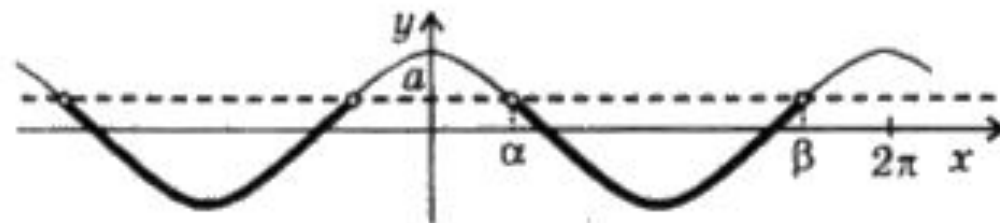
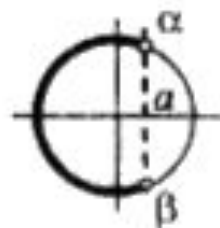
$$|a| < 1$$

$$\cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$



$$\alpha = -\arccos a; \quad \beta = \arccos a$$

$$\cos x < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$



$$\alpha = \arccos a; \quad \beta = 2\pi - \arccos a$$

$$a = -1$$

$$\begin{aligned} \cos x < -1 & - \text{решений нет} \\ \cos x \leq -1 & \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n \\ \cos x > -1 & \Leftrightarrow x \neq \pi + 2\pi n \\ \cos x \geq -1 & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$a < -1$$

$$\begin{aligned} \cos x < a \cdot \left. \begin{matrix} \leq a \\ \geq a \end{matrix} \right\} & - \text{решений нет} \\ \cos x > a \cdot \left. \begin{matrix} \leq a \\ \geq a \end{matrix} \right\} & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$a = 1$$

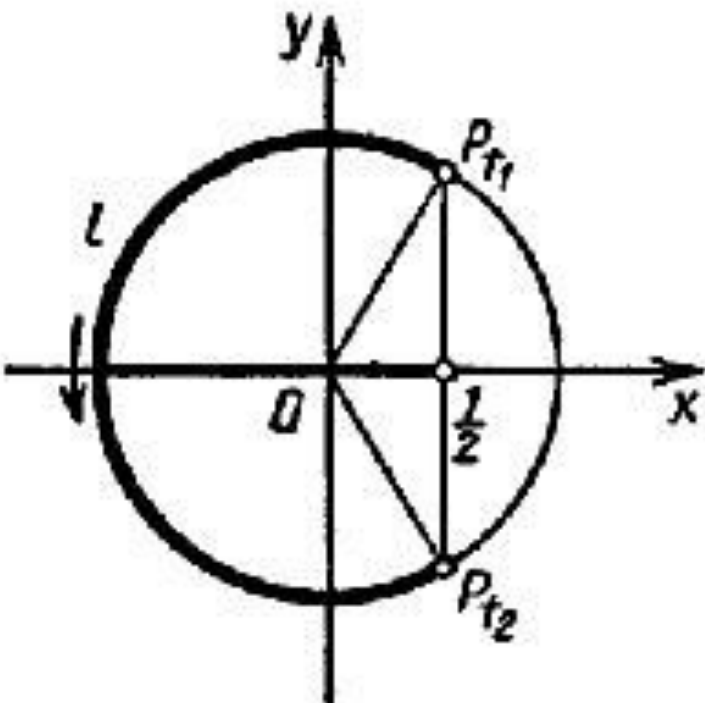
$$\begin{aligned} \cos x < 1 & \Leftrightarrow x \neq 2\pi n \\ \cos x \leq 1 & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ \cos x > 1 & - \text{решений нет} \\ \cos x \geq 1 & \Leftrightarrow x = 2\pi n \end{aligned}$$

$$a > 1$$

$$\begin{aligned} \cos x < a \cdot \left. \begin{matrix} \leq a \\ \geq a \end{matrix} \right\} & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ \cos x > a \cdot \left. \begin{matrix} \leq a \\ \geq a \end{matrix} \right\} & - \text{решений нет} \end{aligned}$$

Тригонометрическое неравенство $\cos(t) < a$

Рассмотрим решение простейших тригонометрических неравенств с косинусом на примере решения неравенства $\cos(t) < 1/2$.



Множество точек единичной окружности, абсциссы которых меньше $1/2$ левее прямой $x=1/2$. Значит, множество всех таких точек есть дуга l , выделенная на рисунке ниже жирным, причем ее концы P_{t_1} и P_{t_2} не входят в это множество. Необходимо найти точки t_1 и t_2 . Точка P_{t_1} расположена на верхней полуокружности, абсцисса P_{t_1} равна $1/2$, следовательно $t_1 = \arccos(1/2) = 5\pi/3$. При переходе от точки P_{t_1} к P_{t_2} по дуге l выполняем обход против движения часовой стрелки, тогда $t_2 > t_1$ и $t_2 = 2\pi - \arccos(1/2) = 5\pi/3$. Точка принадлежит выделенной дуге l (исключая ее концы) при условии, что $\pi/3 < t < 5\pi/3$. Решения неравенства, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$ длиной 2π , таковы: $\pi/3 < t < 5\pi/3$. Вследствие периодичности косинуса остальные решения получаются добавлением к найденным чисел вида $2\pi n$, где n - целое.

Таким образом, мы приходим к окончательному ответу:

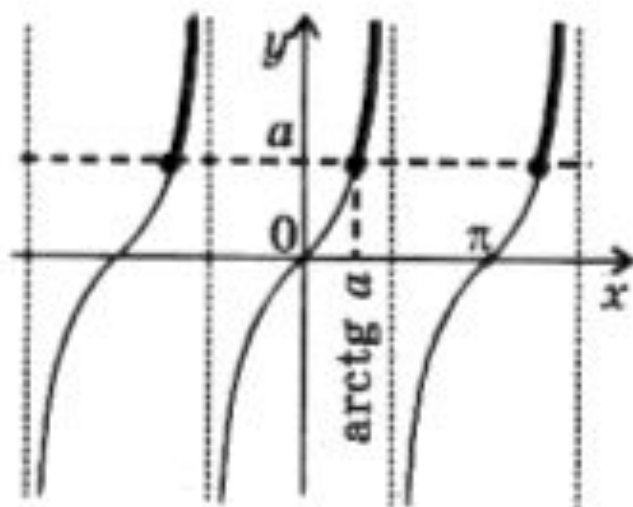
$$\pi/3 + 2\pi n < t < 5\pi/3 + 2\pi n, \quad n - \text{целое.}$$

$$\operatorname{tg} x > a$$

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x > a$$

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$

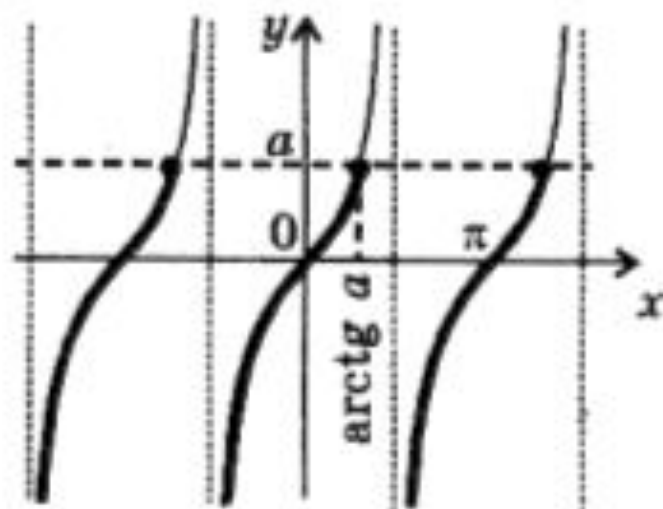


$$\operatorname{tg} x < a$$

$$-\pi/2 + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$

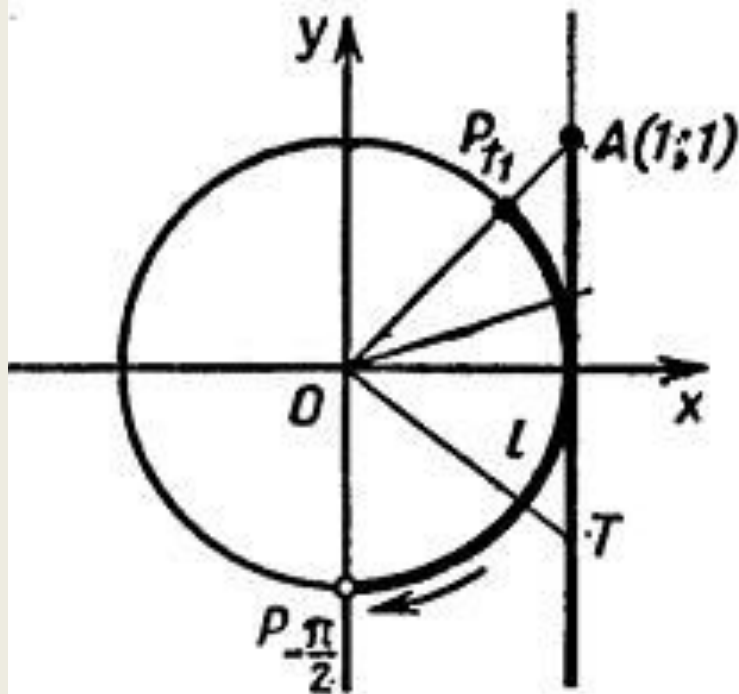
$$\operatorname{tg} x < a$$

$$-\pi/2 + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$



Тригонометрическое неравенство $\operatorname{tg}(t) \leq a$

Рассмотрим способ решения тригонометрического неравенства с тангенсом на примере неравенства $\operatorname{tg}(t) \leq 1$.



период тангенса равен π . Найдем сначала все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку $(-\pi/2; \pi/2)$, а затем воспользуемся периодичностью тангенса. Для выделения всех точек P_t правой полуокружности, значения t которых удовлетворяют данному неравенству, обратимся к линии тангенсов. Если t является решением неравенства, то ордината точки T - луч AT (см. рисунок ниже). Множество точек P_t , соответствующих точкам этого луча, - дуга l , выделенная на рисунке жирным. Следует отметить, что точка P_{t_1} принадлежит рассматриваемому множеству, а P_{t_2} нет.

Найдем условие, при котором точка P_t принадлежит дуге l . t_1 принадлежит интервалу $(-\pi/2; \pi/2)$, и $\operatorname{tg}(t_1)=1$, следовательно $t_1 = \operatorname{arctg}(1) = \pi/4$. Значит t должно удовлетворять условию $-\pi/2 < t \leq \pi/4$. Все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку $(-\pi/2; \pi/2)$, таковы: $(-\pi/2; \pi/4]$.

учитывая периодичность тангенса, приходим к окончательному ответу:

$$-\pi/2 + \pi n < t \leq \pi/4 + \pi n, \quad n - \text{целое.}$$

Сабитова Файруза Рифовна
преподаватель математики
ГАОУ СПО «Сармановский аграрный
колледж»