

# Решение простейших тригонометрических неравенств

- Решение неравенств, содержащих тригонометрические функции обычно сводится к решению простейших неравенств вида:

$$\sin(t) < (\leq; >; \geq) a;$$

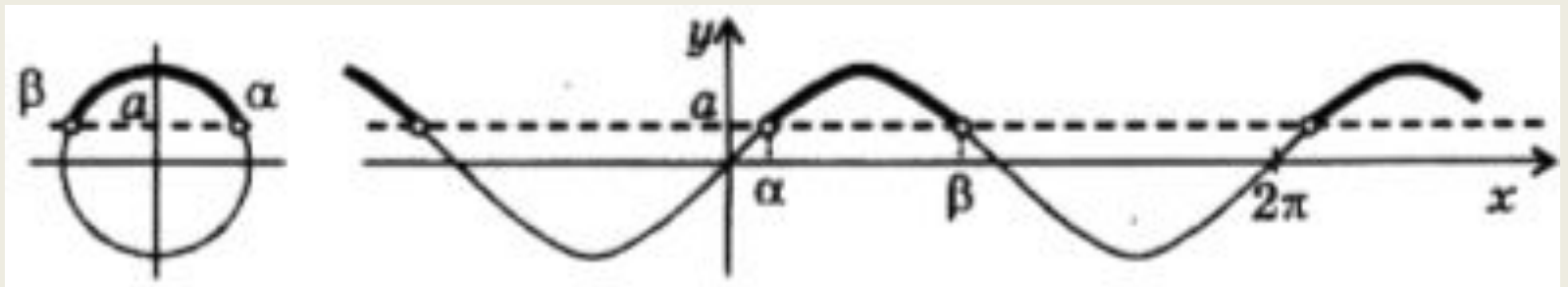
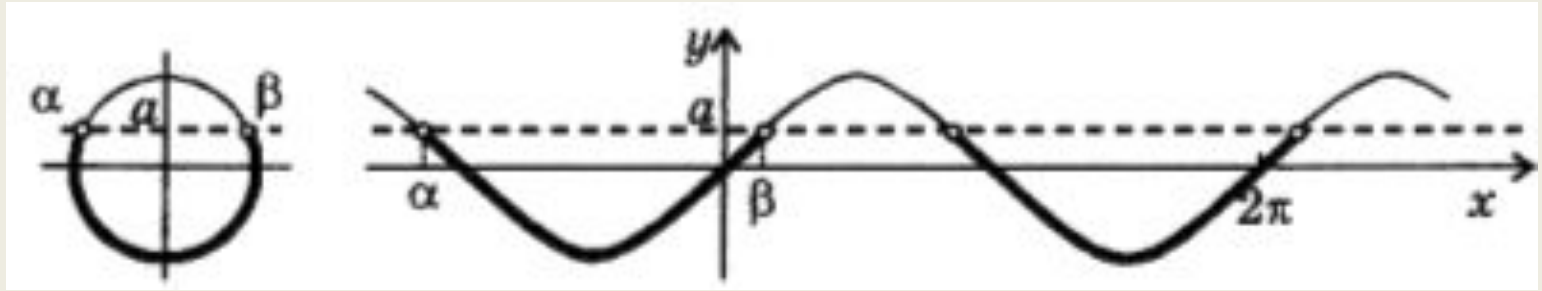
$$\cos(t) < (\leq; >; \geq) a;$$

$$\operatorname{tg}(t) < (\leq; >; \geq) a;$$

$$\operatorname{ctg}(t) < (\leq; >; \geq) a;$$

Способы решения этих неравенств совершенно очевидным образом вытекают из представления тригонометрических функций на единичном круге.

Вид неравенства	Множество решений неравенства
$\sin x > a ( a  < 1)$	$x (\arcsin a + 2\pi n, \pi - \arcsin a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\sin x < a ( a  < 1)$	$x (-\pi - \arcsin a + 2\pi n, \arcsin a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\cos x > a ( a  < 1)$	$x (-\arccos a + 2\pi n, \arccos a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\cos x < a ( a  < 1)$	$x (\arccos a + 2\pi n, 2\pi - \arccos a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x > a$	$x (\operatorname{arctg} a + \pi n, \pi/2 + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x < a$	$x (-\pi/2 + \pi n, \operatorname{arctg} a + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x > a$	$x (\pi n, \operatorname{arcctg} a + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x < a$	$x (\operatorname{arcctg} a + \pi n, \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$

$\cong$  $\cong$ 

$$a = -1$$

$$\begin{aligned} \sin x < -1 & - \text{решений нет} \\ \sin x \leq -1 & \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2\pi n \\ \sin x > -1 & \Leftrightarrow x \neq -\pi/2 + 2\pi n \\ \sin x \geq -1 & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$a < -1$$

$$\begin{aligned} \sin x < a \cdot (\leq a) & - \text{решений нет} \\ \sin x > a \cdot (\geq a) & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$a = 1$$

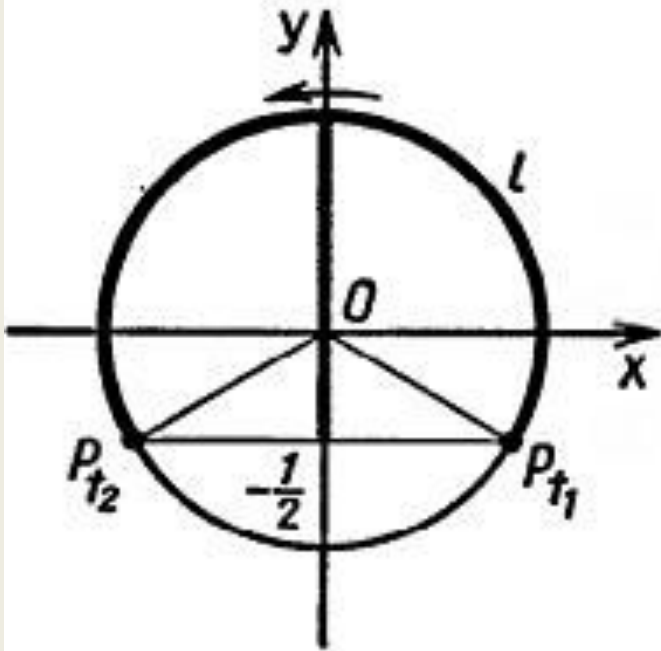
$$\begin{aligned} \sin x < 1 & \Leftrightarrow x \neq \pi/2 + 2\pi n \\ \sin x \leq 1 & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ \sin x > 1 & - \text{решений нет} \\ \sin x \geq 1 & \Leftrightarrow x = \pi/2 + 2\pi n \end{aligned}$$

$$a > 1$$

$$\begin{aligned} \sin x < a \cdot (\leq a) & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ \sin x > a \cdot (\geq a) & - \text{решений нет} \end{aligned}$$

# Тригонометрическое неравенство $\sin(t) \geq a$ .

Все точки  $P_t$  единичной окружности при значениях  $t$ , удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату, большую или равную  $-1/2$ . Множество таких точек это дуга  $l$ , которая выделена жирным на рисунке ниже.

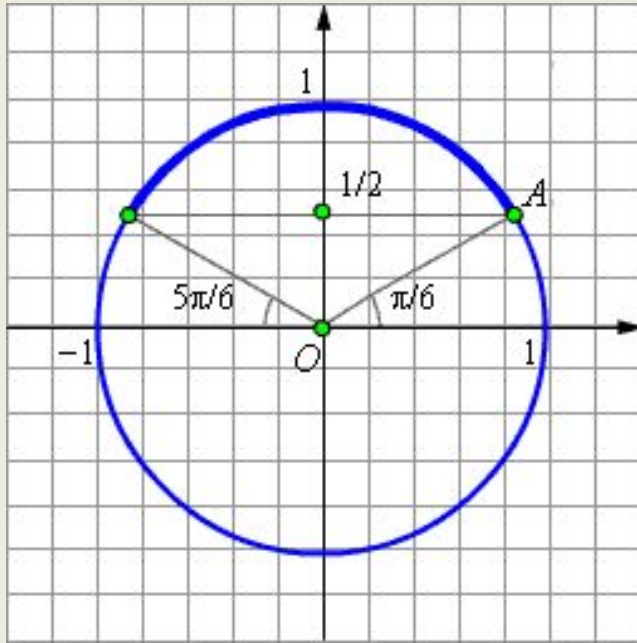


Найдем условие принадлежности точки  $P_t$  этой дуге. Точка  $P_t$  лежит на правой полуокружности, ордината  $P_t$  равна  $1/2$ , и, следовательно, в качестве  $t_1$  удобно взять значение  $t_1 = \arcsin(-1/2) = -\pi/6$ . Представим себе, что мы совершаем обход дуги  $l$  от точки  $P_{t_1}$  к  $P_{t_2}$  против часовой стрелки. Тогда  $t_2 > t_1$ , и, как легко понять,  $t_2 = \pi - \arcsin(-1/2) = 7\pi/6$ . Таким образом, получаем, что точка  $P_t$  принадлежит дуге  $l$ , если  $-\pi/6 \leq t \leq 7\pi/6$ . Таким образом, решения неравенства, принадлежащие промежутку  $[-\pi/2 ; 3\pi/2]$  длиной  $2\pi$  таковы:  $-\pi/6 \leq t \leq 7\pi/6$ . Вследствие периодичности синуса остальные решения получаются добавлением к найденным чисел вида  $2\pi n$ , где  $n$  - целое.

Таким образом, мы приходим к ответу:

$$-\pi/6 + 2\pi n \leq t \leq 7\pi/6 + 2\pi n, \quad n - \text{целое.}$$

# Пример 1



Решите неравенство  $\sin x \geq \frac{1}{2}$ .

Нарисуем тригонометрическую окружность и отметим на ней точки, для которых ордината превосходит  $\frac{1}{2}$ .

Для  $x \in [0; 2\pi]$  решением данного неравенства

будут  $x \in \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$ . Ясно также, что если некоторое число  $x$  будет отличаться от какого-нибудь числа из указанного интервала на  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , то  $\sin x$  также будет не меньше  $\frac{1}{2}$ . Следовательно, к

концам найденного отрезка решения нужно просто добавить  $2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ , окончательно, получаем, что решениями исходного неравенства

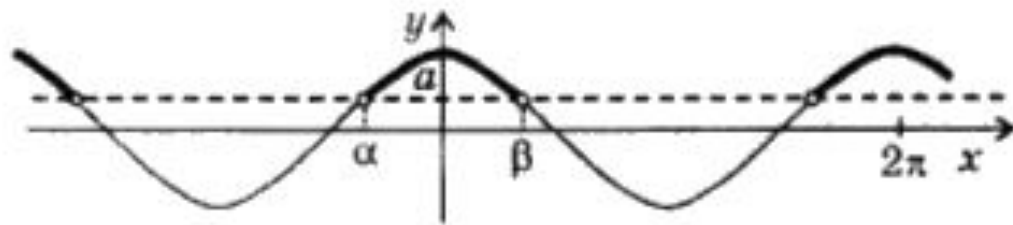
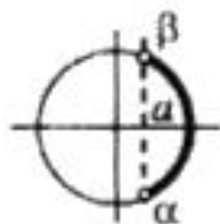
будут все  $x \in \left[ \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ,

Ответ.

$$x \in \left[ \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right], \text{ где } n \in \mathbb{Z},$$

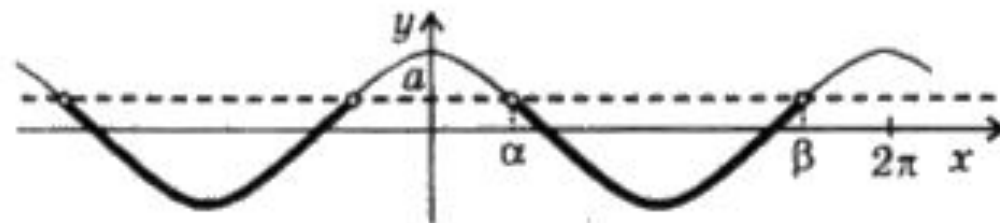
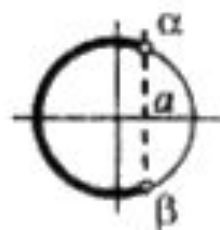
$$|a| < 1$$

$$\cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$



$$\alpha = -\arccos a; \quad \beta = \arccos a$$

$$\cos x < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$



$$\alpha = \arccos a; \quad \beta = 2\pi - \arccos a$$



$$a = -1$$

$$\begin{aligned} \cos x < -1 & - \text{решений нет} \\ \cos x \leq -1 & \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n \\ \cos x > -1 & \Leftrightarrow x \neq \pi + 2\pi n \\ \cos x \geq -1 & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$a = 1$$

$$\begin{aligned} \cos x < 1 & \Leftrightarrow x \neq 2\pi n \\ \cos x \leq 1 & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ \cos x > 1 & - \text{решений нет} \\ \cos x \geq 1 & \Leftrightarrow x = 2\pi n \end{aligned}$$

$$a < -1$$

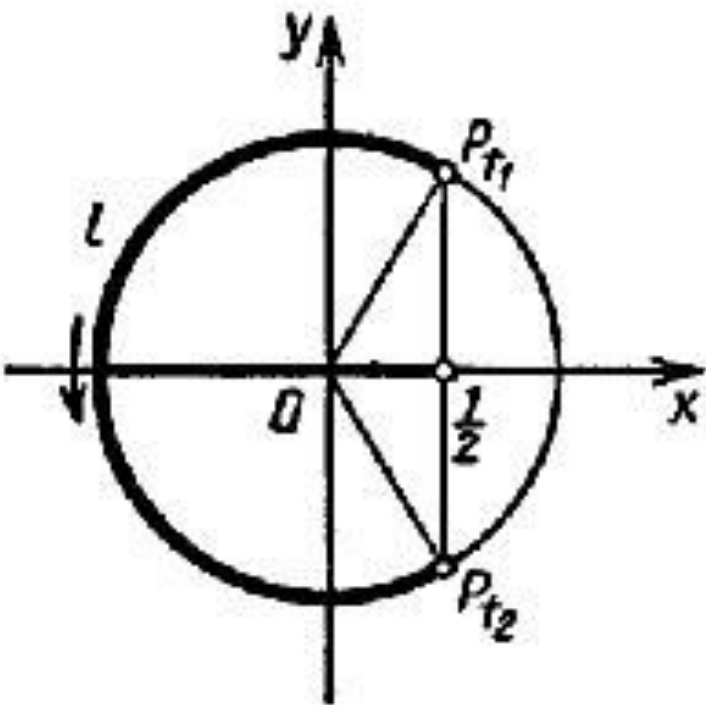
$$\begin{aligned} \cos x < a \cdot \left. \begin{matrix} (\leq a) \\ (\geq a) \end{matrix} \right\} & - \text{решений нет} \\ \cos x > a \cdot \left. \begin{matrix} (\leq a) \\ (\geq a) \end{matrix} \right\} & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$a > 1$$

$$\begin{aligned} \cos x < a \cdot \left. \begin{matrix} (\leq a) \\ (\geq a) \end{matrix} \right\} & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ \cos x > a \cdot \left. \begin{matrix} (\leq a) \\ (\geq a) \end{matrix} \right\} & - \text{решений нет} \end{aligned}$$

# Тригонометрическое неравенство $\cos(t) < a$

Рассмотрим решение простейших тригонометрических неравенств с косинусом на примере решения неравенства  $\cos(t) < 1/2$ .



Множество точек единичной окружности, абсциссы которых меньше  $1/2$  левее прямой  $x=1/2$ . Значит, множество всех таких точек есть дуга  $l$ , выделенная на рисунке ниже жирным, причем ее концы  $P_{t_1}$  и  $P_{t_2}$  не входят в это множество. Необходимо найти точки  $t_1$  и  $t_2$ . Точка  $P_{t_1}$  расположена на верхней полуокружности, абсцисса  $P_{t_1}$  равна  $1/2$ , следовательно  $t_1 = \arccos(1/2) = 5\pi/3$ . При переходе от точки  $P_{t_1}$  к  $P_{t_2}$  по дуге  $l$  выполняем обход против движения часовой стрелки, тогда  $t_2 > t_1$  и  $t_2 = 2\pi - \arccos(1/2) = 5\pi/3$ . Точка принадлежит выделенной дуге  $l$  (исключая ее концы) при условии, что  $\pi/3 < t < 5\pi/3$ . Решения неравенства, принадлежащие промежутку  $[0; 2\pi]$  длиной  $2\pi$ , таковы:  $\pi/3 < t < 5\pi/3$ . Вследствие периодичности косинуса остальные решения получаются добавлением к найденным чисел вида  $2\pi n$ , где  $n$  - целое.

Таким образом, мы приходим к окончательному ответу:

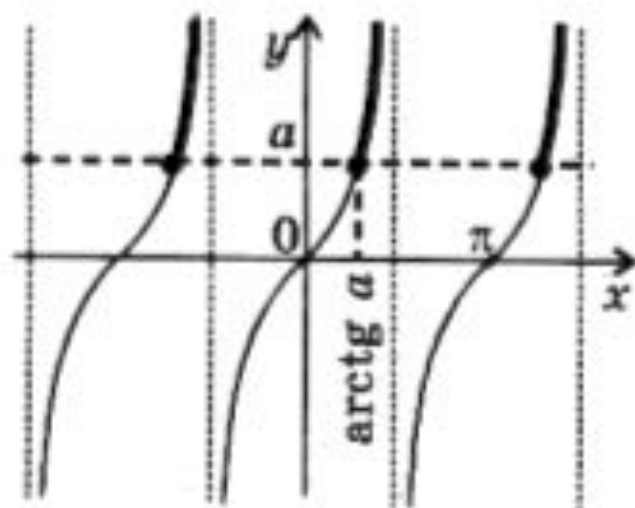
$$\pi/3 + 2\pi n < t < 5\pi/3 + 2\pi n, \quad n - \text{целое.}$$

$$\operatorname{tg} x > a$$

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x > a$$

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$

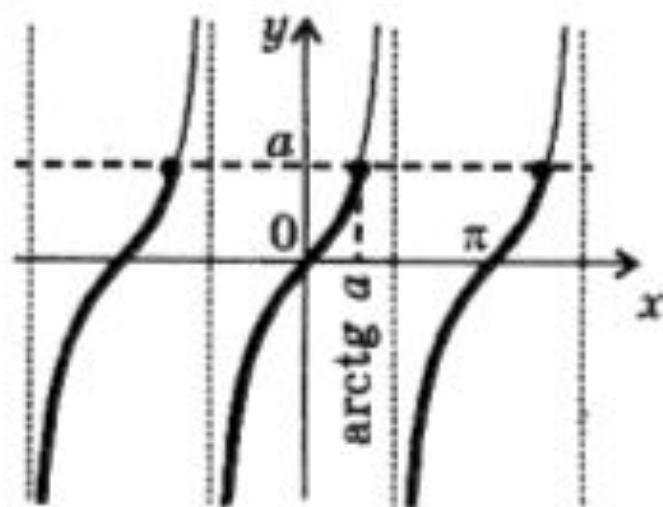


$$\operatorname{tg} x < a$$

$$-\pi/2 + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$

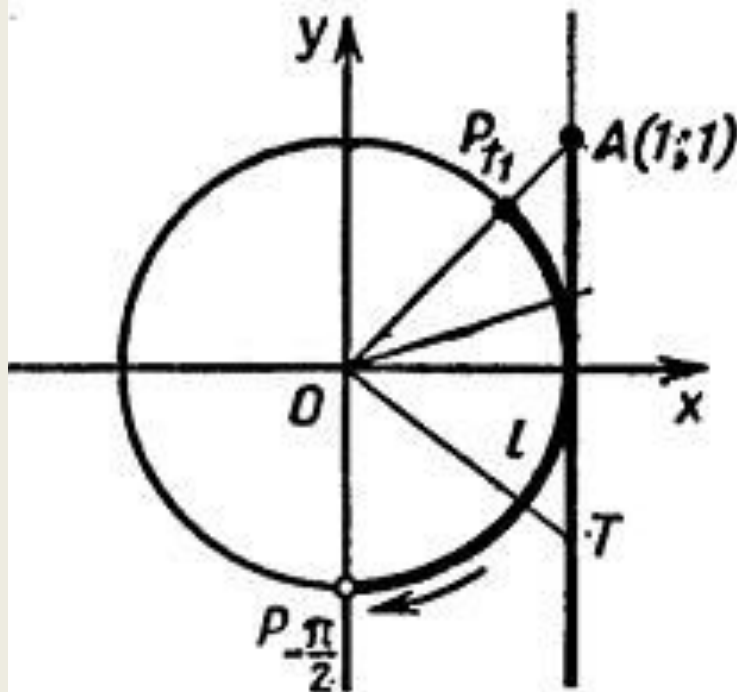
$$\operatorname{tg} x < a$$

$$-\pi/2 + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$



# Тригонометрическое неравенство $\operatorname{tg}(t) \leq a$

Рассмотрим способ решения тригонометрического неравенства с тангенсом на примере неравенства  $\operatorname{tg}(t) \leq 1$ .



период тангенса равен  $\pi$ . Найдем сначала все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку  $(-\pi/2; \pi/2)$ , а затем воспользуемся периодичностью тангенса. Для выделения всех точек  $P_t$  правой полуокружности, значения  $t$  которых удовлетворяют данному неравенству, обратимся к линии тангенсов. Если  $t$  является решением неравенства, то ордината точки  $T$  - луч  $AT$  (см. рисунок ниже). Множество точек  $P_t$ , соответствующих точкам этого луча, - дуга  $l$ , выделенная на рисунке жирным. Следует отметить, что точка  $P_{t_1}$  принадлежит рассматриваемому множеству, а  $P_{t_2}$  нет.

Найдем условие, при котором точка  $P_t$  принадлежит дуге  $l$ .  $t_1$  принадлежит интервалу  $(-\pi/2; \pi/2)$ , и  $\operatorname{tg}(t_1)=1$ , следовательно  $t_1 = \operatorname{arctg}(1) = \pi/4$ . Значит  $t$  должно удовлетворять условию  $-\pi/2 < t \leq \pi/4$ . Все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку  $(-\pi/2; \pi/2)$ , таковы:  $(-\pi/2; \pi/4]$ .

учитывая периодичность тангенса, приходим к окончательному ответу:

$$-\pi/2 + \pi n < t \leq \pi/4 + \pi n, \quad n - \text{целое.}$$

Сабитова Файруза Рифовна  
преподаватель математики  
ГАОУ СПО «Сармановский аграрный  
колледж»