ТРИГОНОМЕТРИЯ.

Тригономе́трия (от греч. τρίγονο (*треугольник*) и греч. μετρειν (*измерять*), то есть *измерение треугольников*) — раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их приложения к геометрии. Данный термин впервые появился в 1595 г. как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (1561—1613), а сама наука ещё в глубокой древности использовалась для расчётов в астрономии, геодезии и архитектуре.

Разделы тригонометрии.

- Тригонометрия делится на плоскую, или прямолинейную, и сферическую тригонометрию. Теория тригонометрических функций (гониометрия) и её приложения к решению плоских прямоугольных и косоугольных треугольников изучаются в средней школе

Основные формулы плоской тригонометрии

- Пусть a, b, c — стороны треугольника, A, B, C — противолежащие им углы ($A+B+C$ = p), h_a, h_b, h_c — высоты, 2p — периметр, S — площадь, 2R — диаметр окружности, описанной около треугольника.

Основные формулы плоской тригонометрии

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

теоре
$a^2 = b$

Основные формулы плоской тригонометрии

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Основные формулы плоской тригонометрии

Теорема тангенсов:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{A-B}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{A+B}{2}}$$

Основные формулы плоской тригонометрии

Площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{a^2}{2} \frac{\sin B \sin C}{\sin(B + C)} = p^2 tg \frac{A}{2} tg \frac{B}{2} tg \frac{C}{2}$$

Основные формулы плоской тригонометрии

Углы треугольника, если известны стороны, могут быть найдены по теореме косинусов или по формулам вида:

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

История создания.

- Для компенсации отсутствия таблицы хорд математики времен Аристарха иногда использовали хорошо известную теорему, в современной записи — $\sin \alpha / \sin \beta < \alpha/\beta < \tan \alpha / \tan \beta$, где $0° < \beta < \alpha < 90°$, совместно с другими теоремами.

Первые тригонометрические таблицы были, вероятно, составлены Гиппархом Никейским (180—125 лет до н. э.). Гиппарх был первым, кто свёл в таблицы соответствующие величины дуг и хорд для серии углов. Систематическое использование полной окружности в 360° установилось в основном благодаря Гиппарху и его таблице хорд.

- Менелай Александрийский (100 н. э.) написал «Сферику» в трёх книгах. В первой книге он представил основы для сферических треугольников. Вторая книга «Сферики» применяет сферическую геометрию к астрономии. Третья книга содержит «теорему Менелая», известную также как «правило шести величин».

- Теорема Птолемея, которая говорит о том, что сумма произведений противоположных сторон выпуклого вписанного четырёхугольника равна произведению диагоналей, влечёт за собой эквивалентность четырёх формул суммы и разности для синуса и косинуса. Позднее Птолемей вывел формулу половинного угла. Птолемей использовал эти результаты для создания своих тригонометрических таблиц, хотя, возможно, эти таблицы были выведены из работ Гиппарха.

Плоская тригонометрия начала развиваться позже сферической, хотя отдельные теоремы её встречались и раньше. Например, 12-я и 13-я теоремы второй книги "Начал" Евклида (3 в. дон. э.) выражают по существу теорему косинусов. Плоская тригонометрия получила развитие у аль-Баттани (2-я половина 9 — начало 10 вв.), Абу-ль-Вефа (10 в.), Бхаскара (12 в.) и Насирэддина Туси (13 в.), которым была уже известна теорема синусов. Теорема тангенсов была получена Региомонтаном (15 в.). Дальнейшие работы в области Т. принадлежат Н. Копернику (1-я половина 16 в.), Т. Браге (2-я половина 16 в.), Ф. Виету (16 в.), И. Кеплеру (конец 16 — 1-я половина 17 вв.). Современный вид тригонометрия получила в работах Л. Эйлера (18 в.).

Другие источники сообщают, что именно замена хорд синусами стала главным достижением Средневековой Индии. Такая замена позволила вводить различные функции, связанные со сторонами и углами прямоугольного треугольника. Таким образом, в Индии было положено начало тригонометрии как учению о тригонометрических величинах.

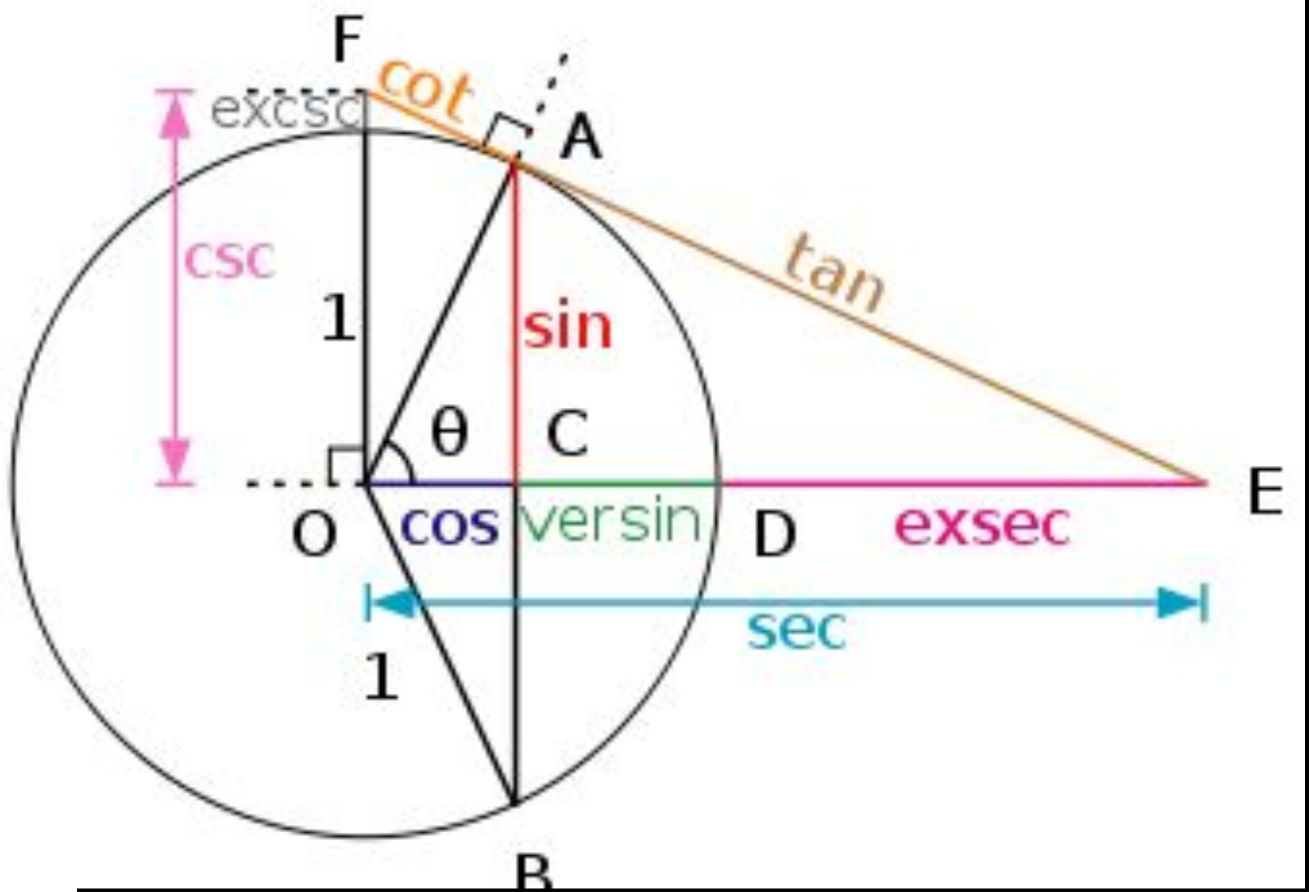
Индийские учёные пользовались различными тригонометрическими соотношениями, в том числе и теми, которые в современной форме выражаются как

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \cos(90 - \alpha)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

Индийцы также знали формулы для кратных углов $\sin n$, $\cos n$, где $n = 2,3,4,5$.



Тригонометрические функции угла θ внутри единичной окружности

Синус — отношение противолежащего катета к гипотенузе.
Косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе.
Тангенс — отношение противолежащего катета к прилежащему.
Котангенс — отношение прилежащего катета к противолежащему.
Секанс — отношение гипотенузы к прилежащему катету.
Косеканс — отношение гипотенузы к противолежащему катету.

Данные определения позволяют вычислить значения функций для острых углов, то есть от 0° до 90° (от 0 до радиан). В XVIII веке Леонард Эйлер дал современные, более общие определения, расширив область определения этих функций на всю числовую ось. Рассмотрим в прямоугольной системе координат окружность единичного радиуса (см. рисунок) и отложим от горизонтальной оси угол θ (если величина угла положительна, то откладываем против часовой стрелки, иначе по часовой стрелке). Точку пересечения построенной стороны угла с окружностью обозначим *A*. Тогда:

Синус угла θ определяется как ордината точки *A*.

Косинус — абсцисса точки *A*.

Тангенс — отношение синуса к косинусу.

Котангенс — отношение косинуса к синусу (то есть величина, обратная тангенсу).

Секанс — величина, обратная косинусу.

Косеканс — величина, обратная синусу.

Для острых углов новые определения совпадают с прежними.

Применение

- Тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела. Большое значение имеет техника триангуляции, позволяющая измерять расстояния до недалёких звёзд в астрономии, между ориентирами в географии, контролировать системы навигации спутников. Также следует отметить применение тригонометрии в таких областях, как теория музыки, акустика, оптика, анализ финансовых рынков, электроника, теория вероятностей, статистика, биология, медицина (включая ультразвуковое исследование (УЗИ) и компьютерную томографию), фармацевтика, химия, теория чисел (и, как следствие, криптография), сейсмология, метеорология, океанология, картография, многие разделы физики, топография и геодезия, архитектура, фонетика, экономика, электронная техника, машиностроение, компьютерная графика, кристаллография.

Спасибо за внимание!!!

Работу выполнила
ученица 11а класса
Мокрушина Марина