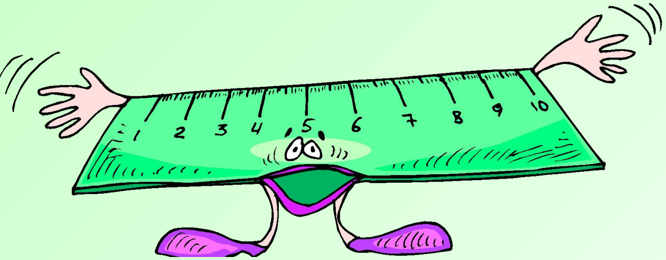
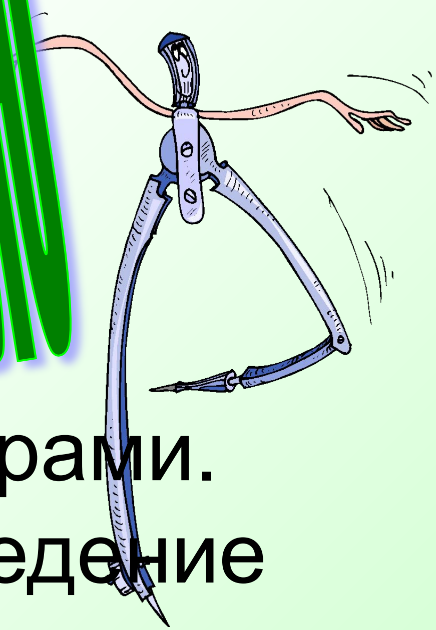


Угол между прямой и плоскостью



Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.

11 класс.

Повторяем теорию:

- ***Как находят координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?***

$$\overrightarrow{AB}\left\{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right\}$$

- ***Как находят координаты середины отрезка?***

$$\frac{x_A + x_B}{2}; \quad \frac{y_A + y_B}{2}; \quad \frac{z_A + z_B}{2}$$

- ***Как находят длину вектора?***

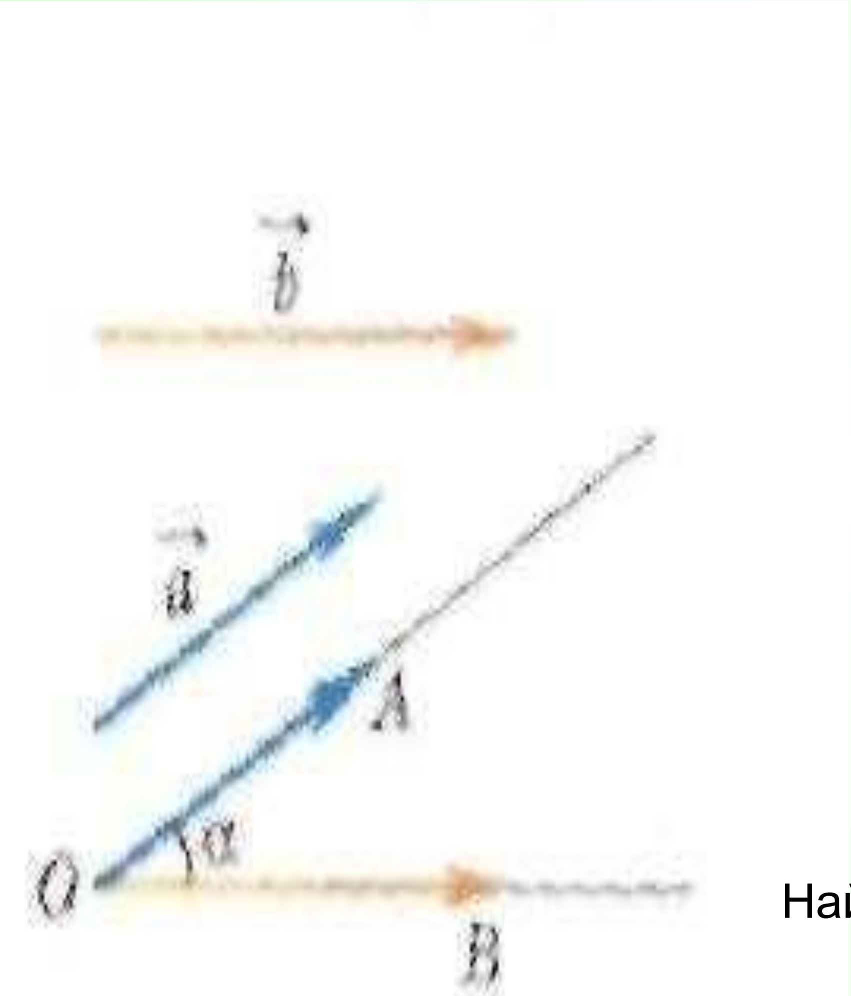
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

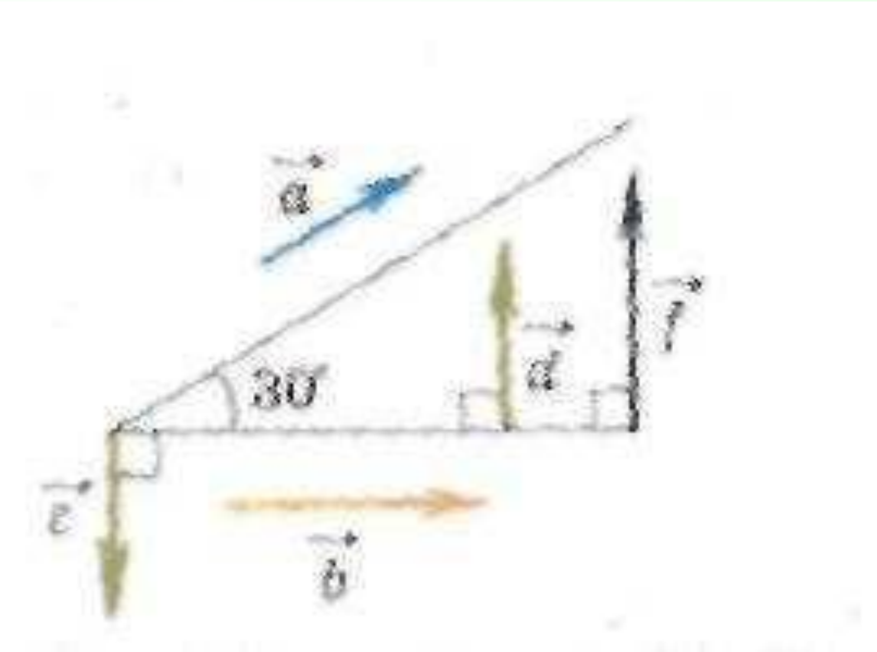
- ***Как находят расстояние между точками?***

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$$

- ***Как вы понимаете выражение «угол между векторами»?***

Угол между векторами





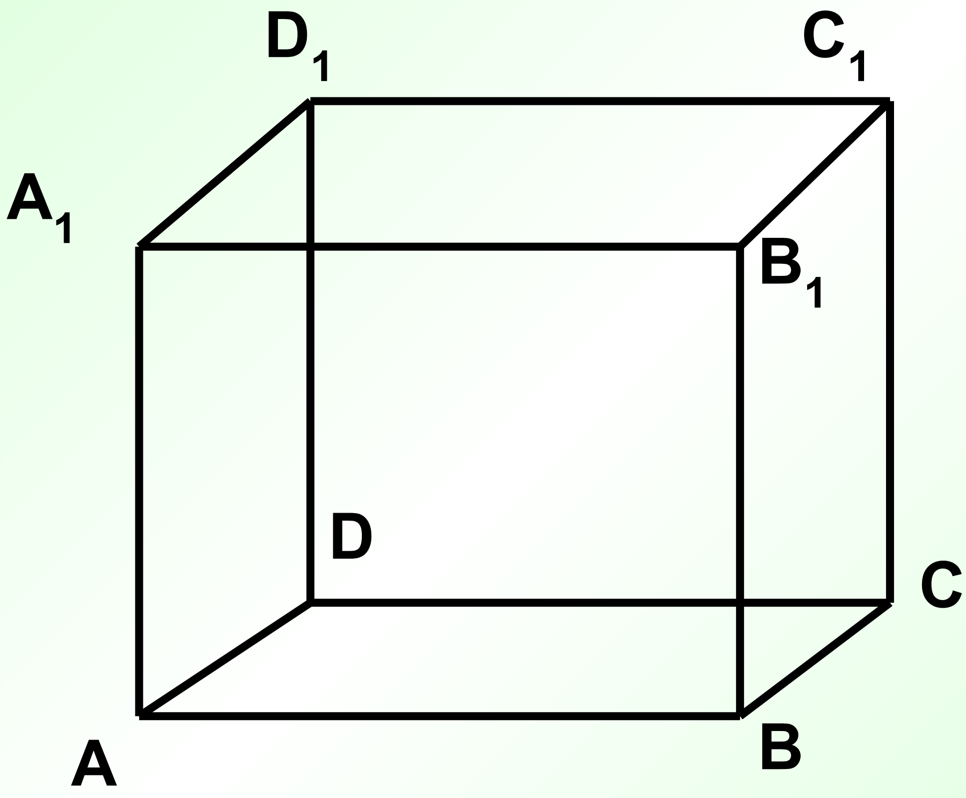
Найдите углы между векторами a и b? a и c? a и d? B и c? d и f? d и c?

Условие коллинеарности векторов: $$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

- ***Какие векторы называются перпендикулярными?***

Условие перпендикулярности векторов: $x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$

Задача №441



Повторяем теорию:

- ***Что называется скалярным произведением векторов?***

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b$$

- ***Чему равно скалярное произведение перпендикулярных векторов?***

0

- ***Чему равен скалярный квадрат вектора?***

$$\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2=x_a^2+y_a^2+z_a^2$$

- ***Свойства скалярного произведения?***

$$\overrightarrow{a^2}\geq 0 \qquad \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$$

$$\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a} \qquad k\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$$

Задача №444

Косинус угла между векторами

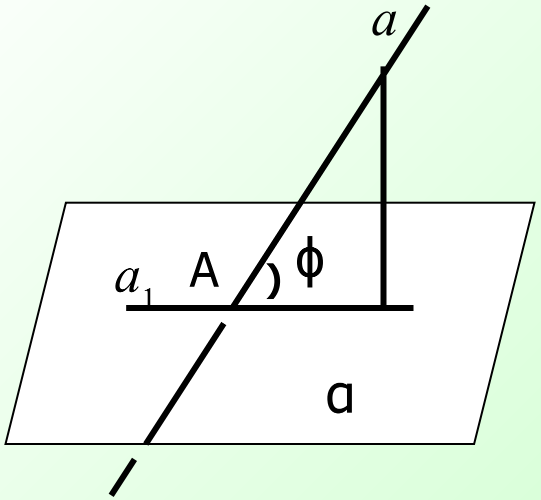
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

Задача №451(а)

Задача №453

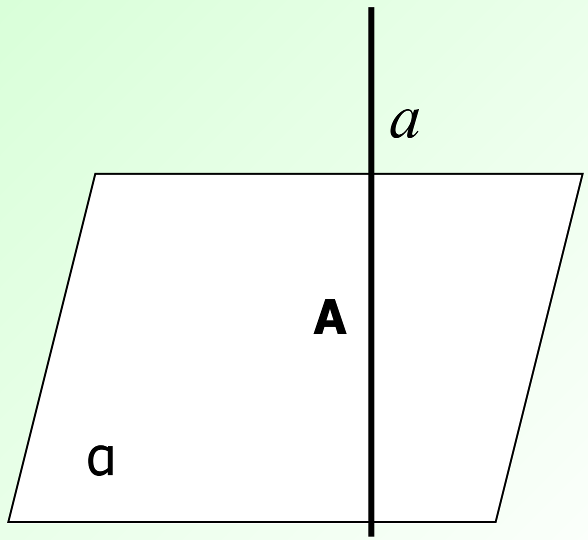
Вычисление углов между прямыми и плоскостями

- Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярную к ней, называют угол между прямой и её проекцией на плоскость.



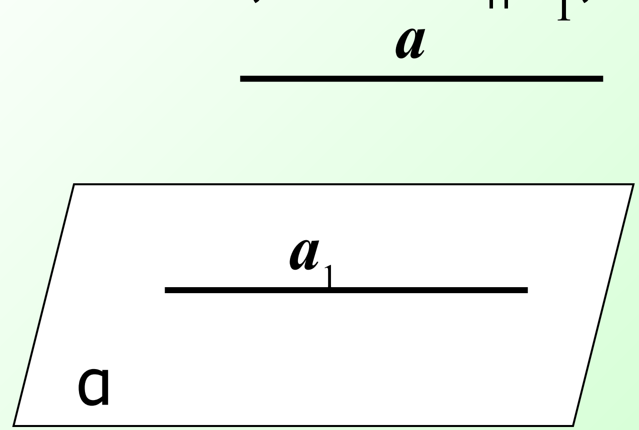
1. Если $a \perp \alpha$, то проекцией a на α является т. А

А=$a \cap \alpha$ $(a,\alpha)=90°$

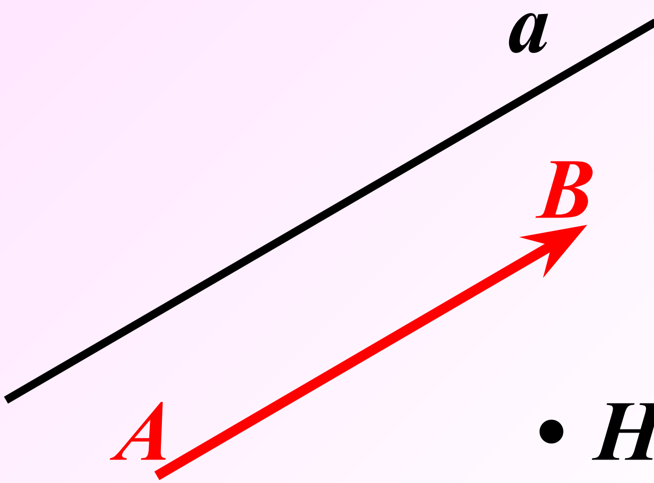


2. Если $a \| \alpha$, a_1 - проекция a на α, то $a \| a_1$, $a_1 \subset \alpha$.

$(a,\alpha)=0°$



Направляющий вектор прямой.

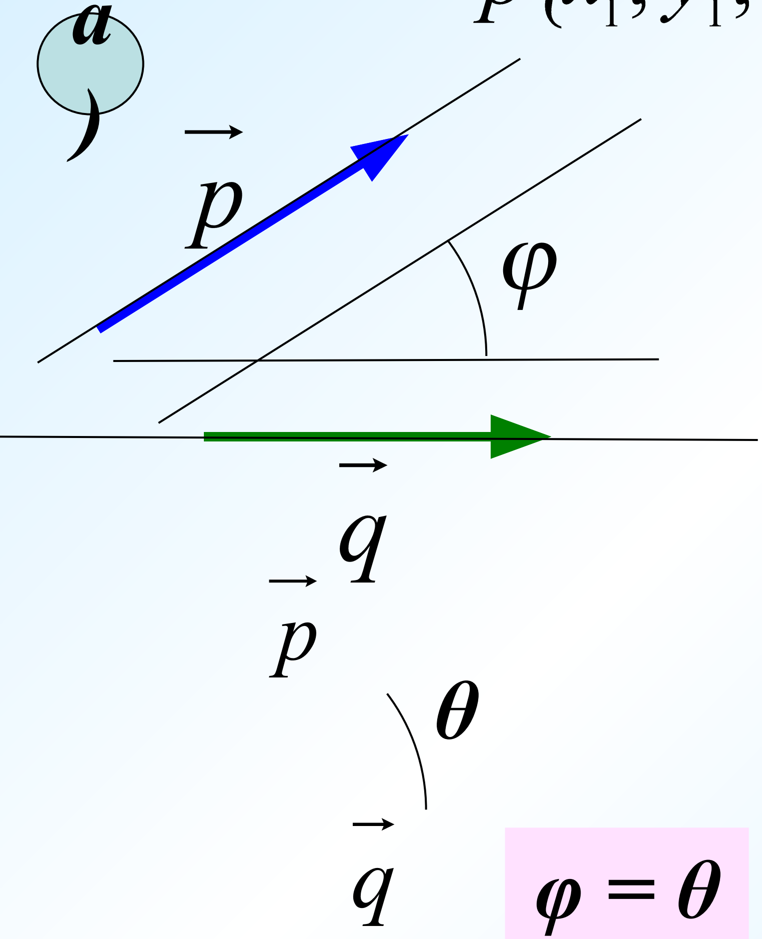


- ***Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой, если он лежит на самой прямой, либо на прямой, параллельной ей.***

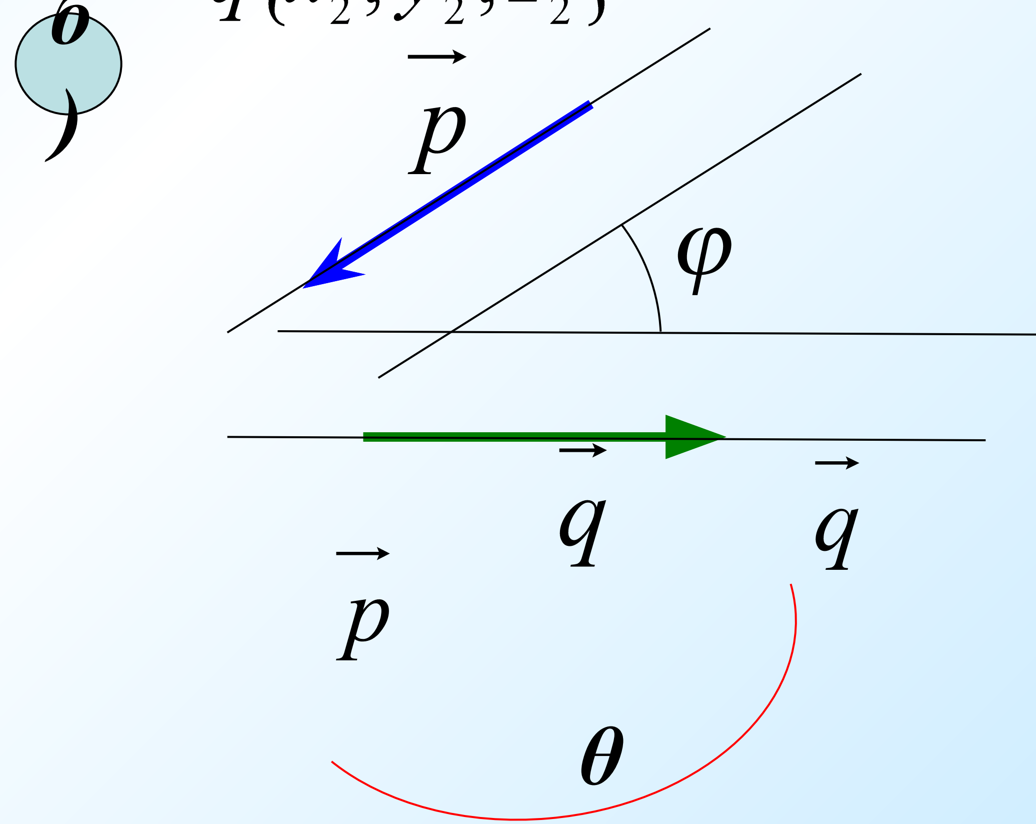
Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

№1. Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$



$\varphi = \theta$



$\varphi = 180^0 - \theta$

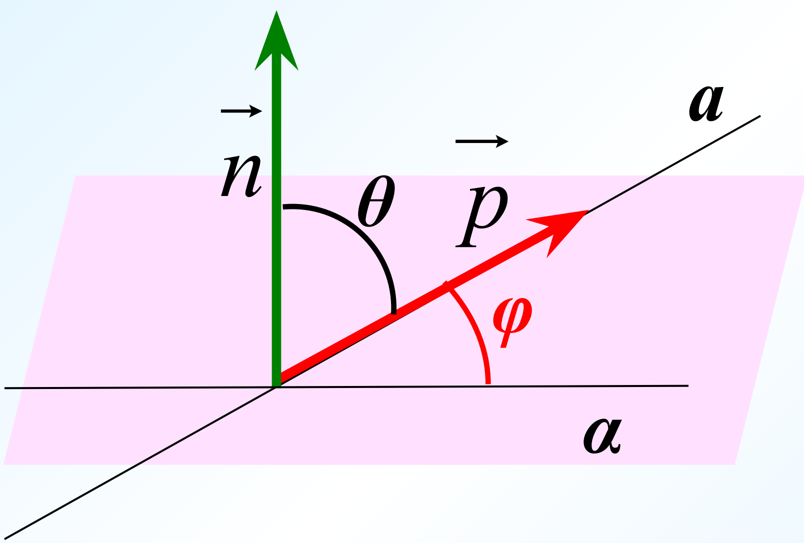
Ответ:

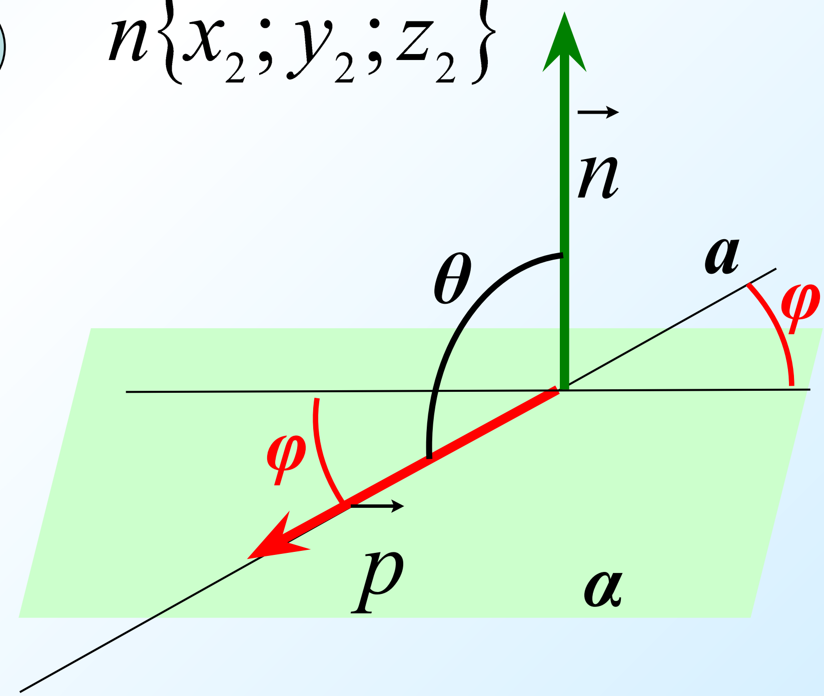
$$\cos\varphi = \frac{/\,x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,/}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

№2. Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости..

а) $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ **б)** $\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$





№ 464 (а)

Дано: $A(3;-2;4)$ $B(4;-1;2)$ $C(6;-3;2)$ $D(7;-3;1)$

Найти: угол между прямыми AB и CD.

Ваши предложения…

1. ***Найдем координаты векторов***

$$\overrightarrow{AB}\{1;1;-2\} \quad \textit{и} \quad \overrightarrow{CD}\{1;0;-1\}$$

2. Воспользуемся формулой:

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\varphi = 30^0$$

№ 466 (а)

Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

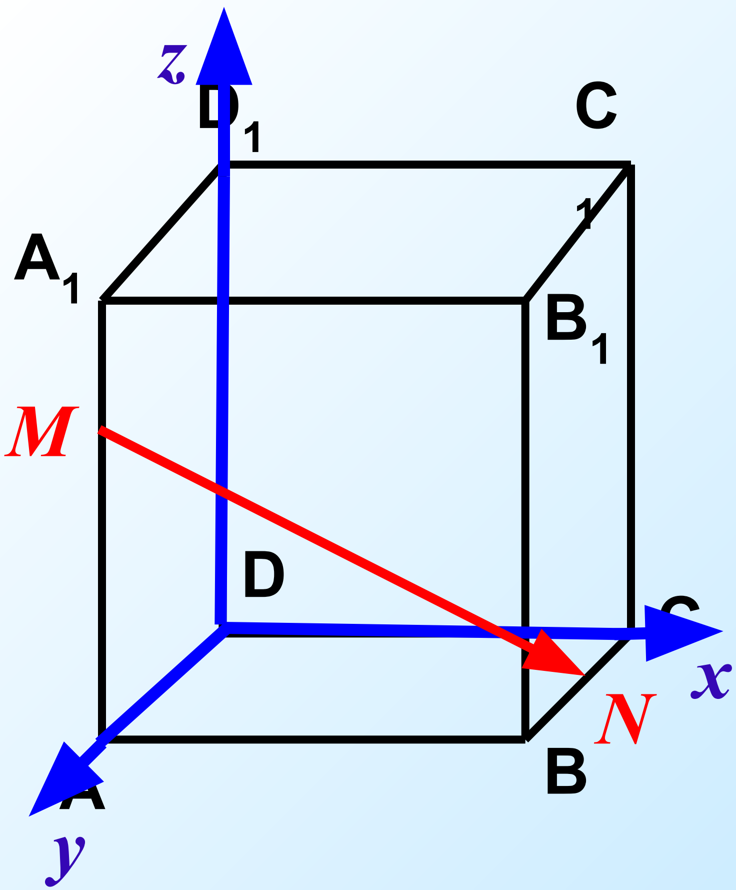
точка M принадлежит AA_1

$AM : MA_1 = 3 : 1$; N – середина BC

Вычислить косинус угла между прям. MN и DD_1

1. *Введем систему координат.*
2. *Рассмотрим DD_1 и MN.*
3. *Пусть $AA_1 = 4$, тогда*

   $M(0;4;3)$ $N(4;2;0)$
4. *Найдем координаты векторов DD_1 и MN.*
5. *По формуле найдем cosφ.*



Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$

Задача.

Дано: прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $DA = 2$; $DC = 2$; $DD_1 = 3$.

Найти угол между прямыми CB_1 и D_1B.

Ваши предложения…

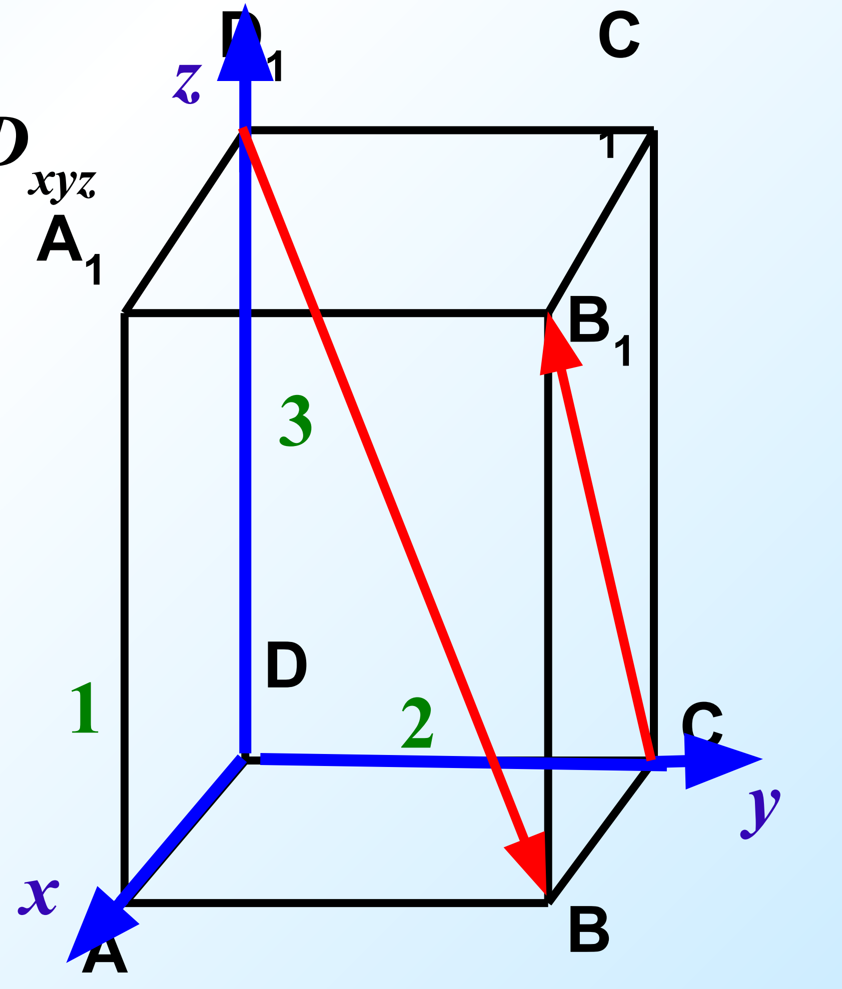
1. ***Введем систему координат D_{xyz}***
2. ***Рассмотрим направляющие прямых D_1B и CB_1.***

$\overrightarrow{CB_1}\{1;0;3\}$ $\overrightarrow{D_1B}\{1;2;-3\}$

3. ***По формуле найдем cosφ.***

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{35}}$$

$$\varphi \approx 47^0 28'$$



№ 467 (а)

Дано:* *прямоугольный параллелепипед

$ABCDA_1B_1C_1D_1$; $AB = BC = ½\ AA_1$

Найти угол между прямыми BD и CD_1.

1 способ:

1. *Введем систему координат B_{xyz}*
2. *Пусть $AA_1 = 2$, тогда*

   AB = BC = 1.

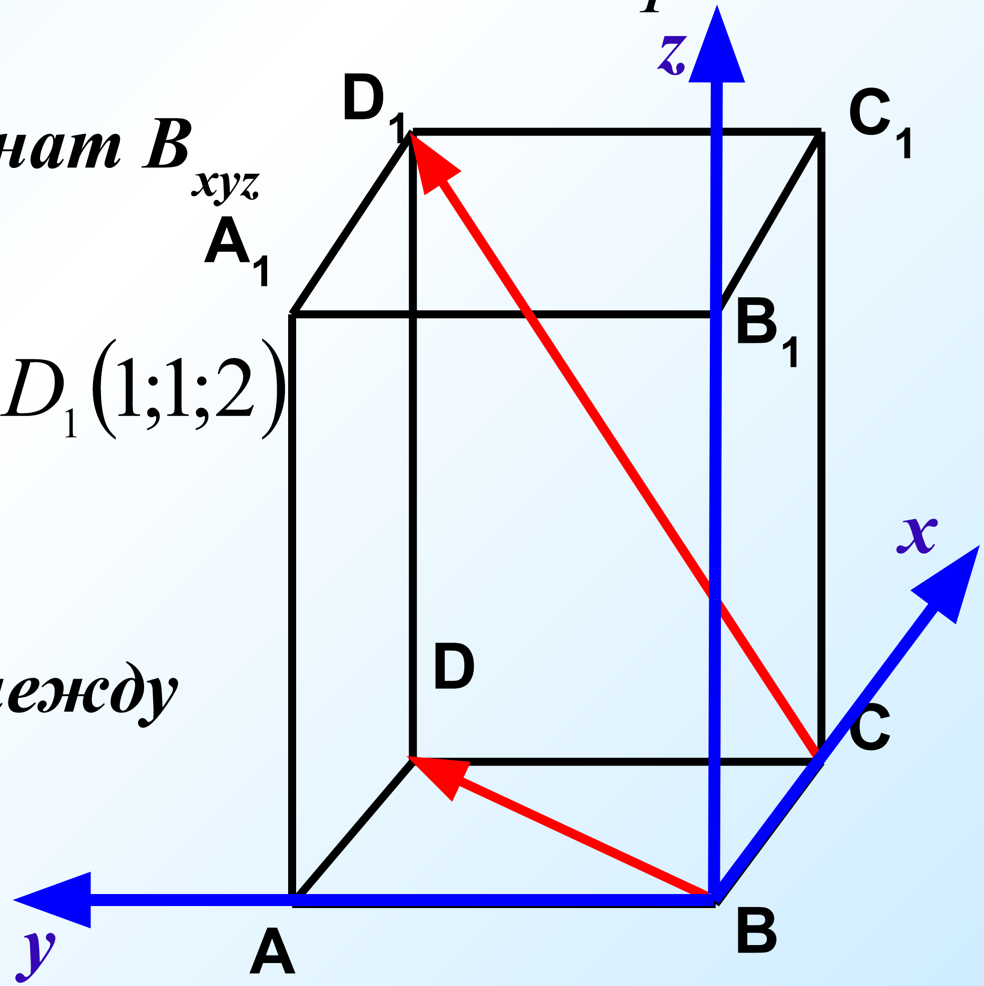
$$B(0;0;0)\ C(1;0;0)\ D(1;1;0)\ D_1(1;1;2)$$

3. *Координаты векторов:*

$$\overrightarrow{BD}\{1;1;0\} \quad \overrightarrow{CD_1}\{0;1;2\}$$

4. *Находим косинус угла между прямыми:*

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

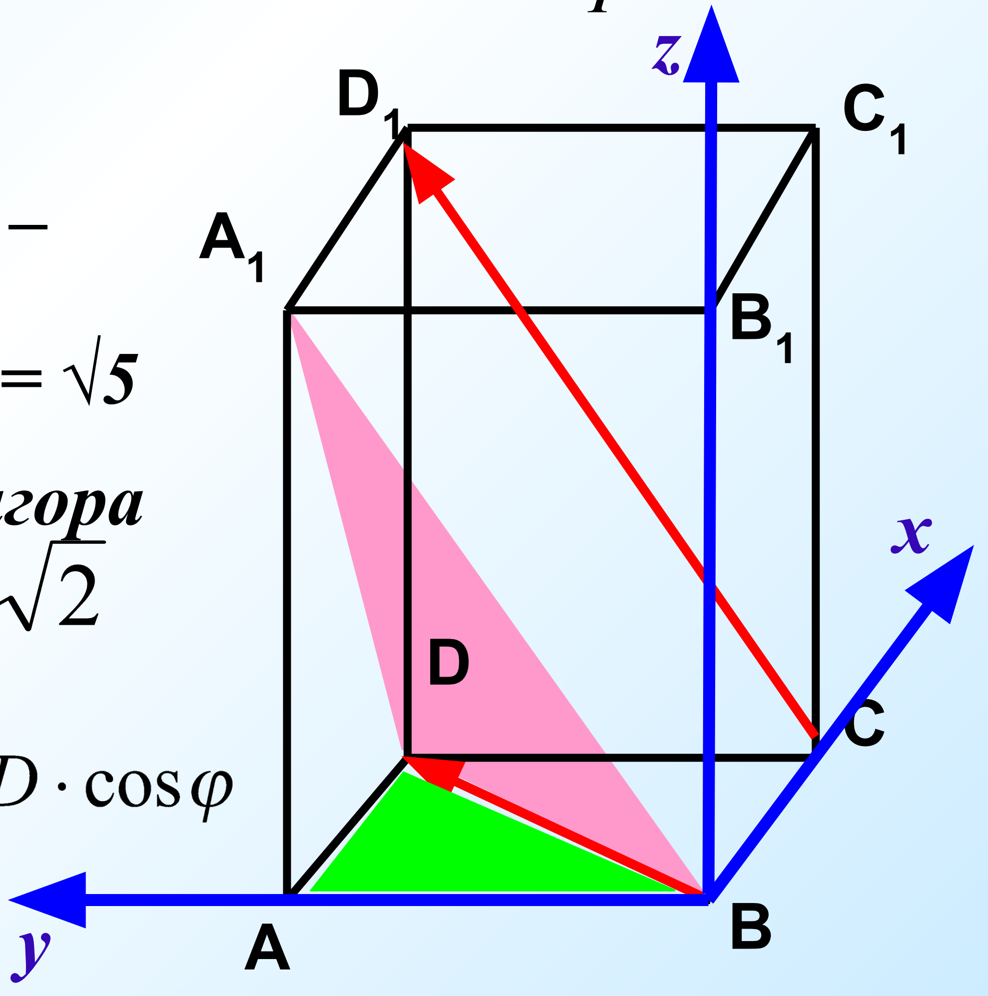


№ 467 (а)

Дано: прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $AB = BC = ½\ AA_1$

Найти угол между прямыми BD и CD_1.

2 способ:



1. Т.к. $CD_1 \parallel BA_1$, то углы между BD и BA_1; BD и CD_1 – равны.

2. В ΔBDA_1: $BA_1 = \sqrt{5}$, $A_1D = \sqrt{5}$

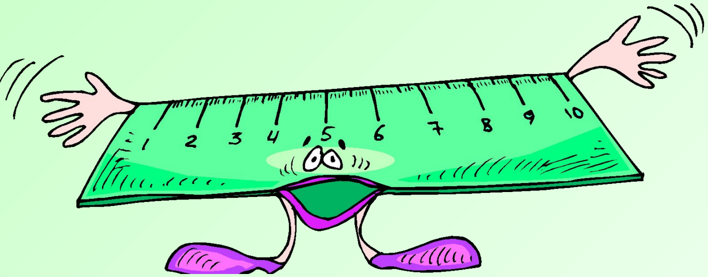
3. ΔBDA: по теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} \quad BD = \sqrt{2}$$

4. По теореме косинусов:

$$A_1D^2 = A_1B^2 + BD^2 - 2A_1B \cdot BD \cdot \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



Домашнее задание:

П. 48,

№466, №454

№467 (б) – двумя способами.