

Угол между векторами.
Скалярное произведение
векторов.

11 класс.

Повторяем теорию:

- *Как находят координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?*

$$\overrightarrow{AB} \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$$

- *Как находят координаты середины отрезка?*

$$\frac{x_A + x_B}{2}; \quad \frac{y_A + y_B}{2}; \quad \frac{z_A + z_B}{2}$$

- *Как находят длину вектора?*

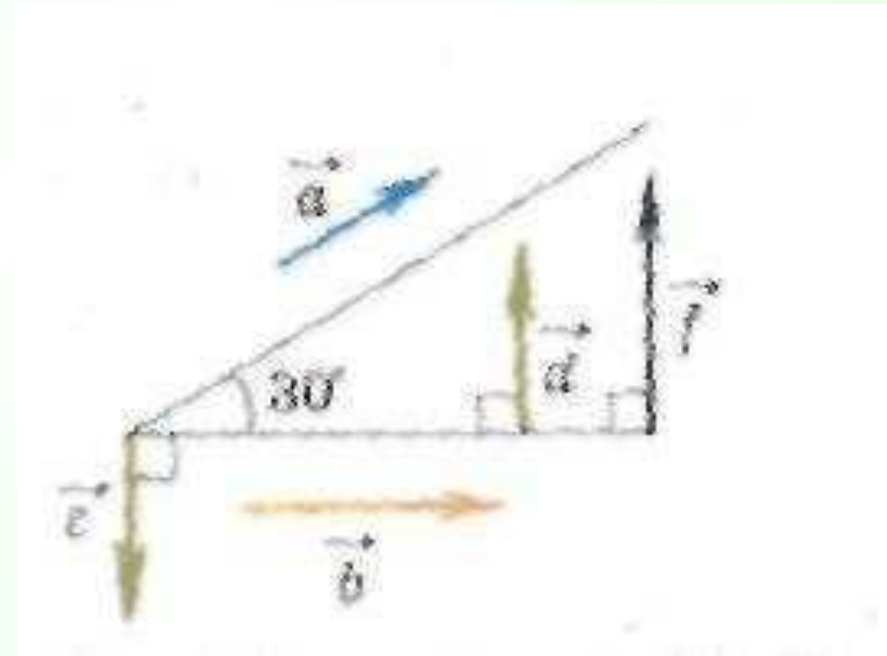
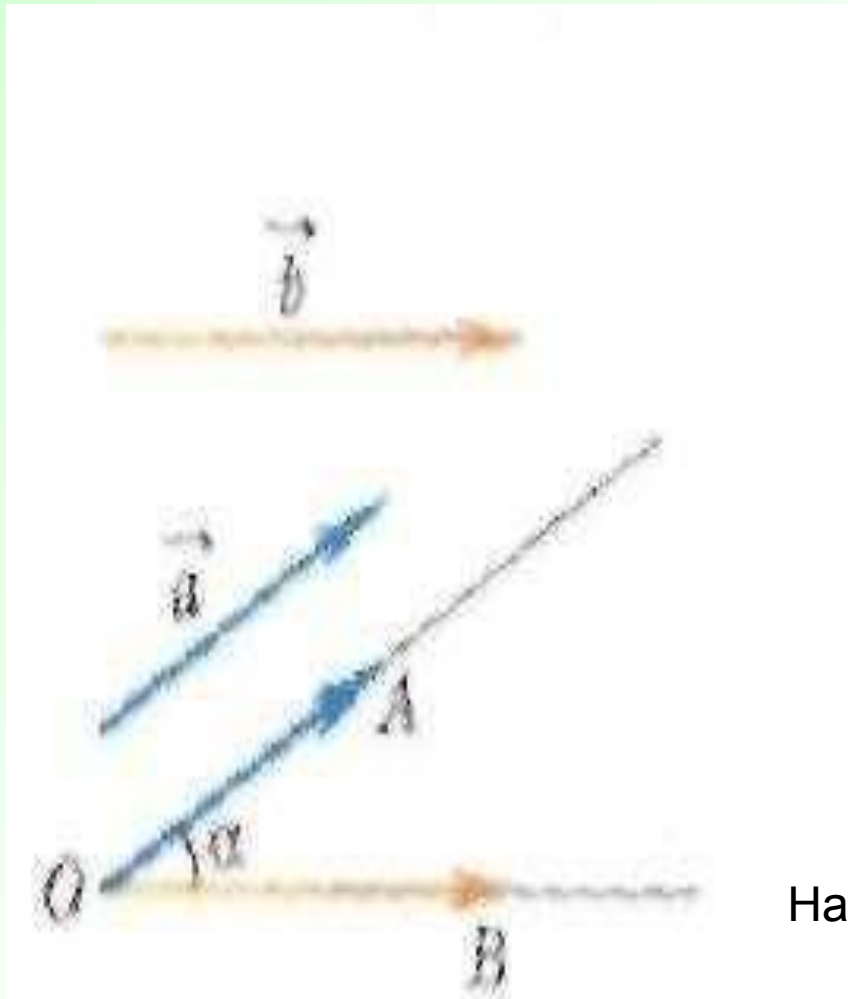
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- *Как находят расстояние между точками?*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- *Как вы понимаете выражение «угол между векторами»?*

Угол между векторами



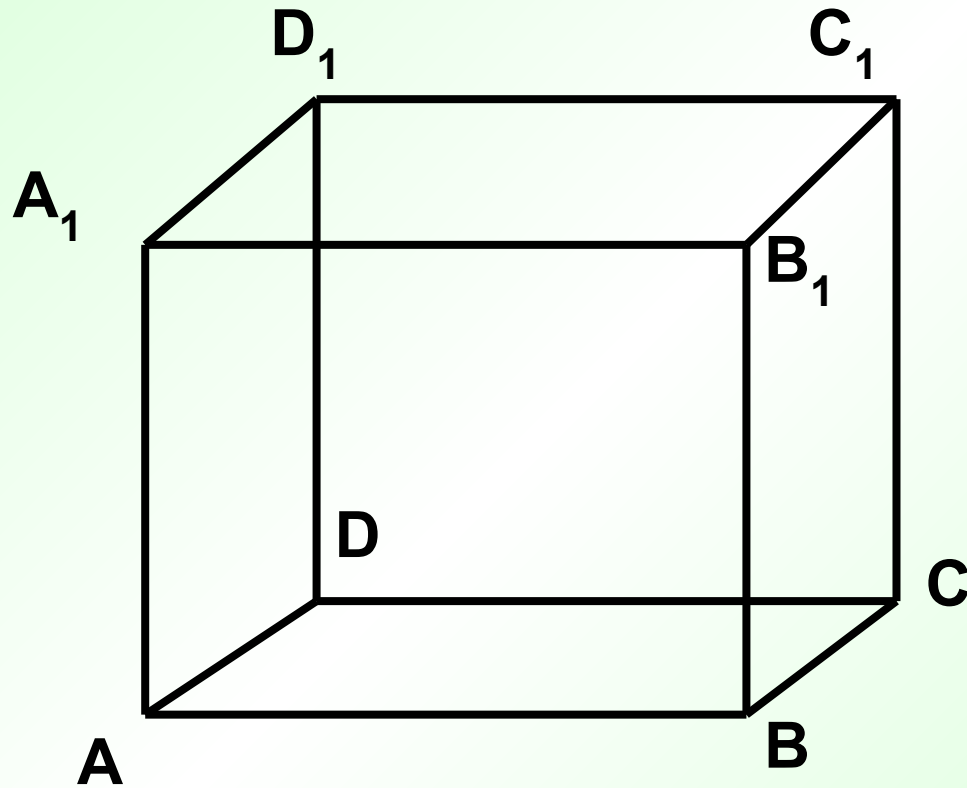
Найдите углы между векторами a и b ? a и c ? a и d ? b и c ? d и f ? d и c ?

Условие коллинеарности векторов: $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$

- **Какие векторы называются перпендикулярными?**

Условие перпендикулярности векторов: $x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$

Задача №441



Повторяем теорию:

- *Что называется скалярным произведением векторов?*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

- *Чему равно скалярное произведение перпендикулярных векторов?*

0

- *Чему равен скалярный квадрат вектора?*

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2$$

- *Свойства скалярного произведения?*

$$\begin{aligned} \vec{a}^2 &\geq 0 & (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} & k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (k \vec{a}) \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Задача №444

Косинус угла между векторами

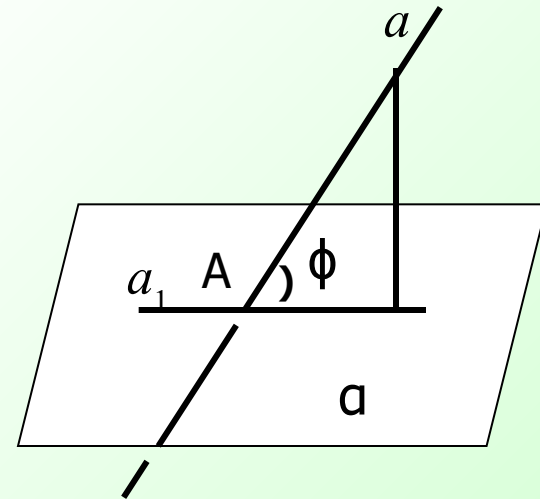
$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

Задача №451(а)

Задача №453

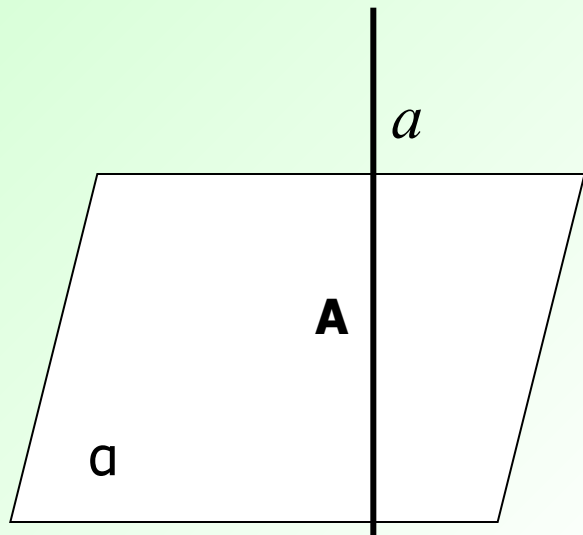
Вычисление углов между прямыми и плоскостями

- Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярную к ней, называют угол между прямой и её проекцией на плоскость.

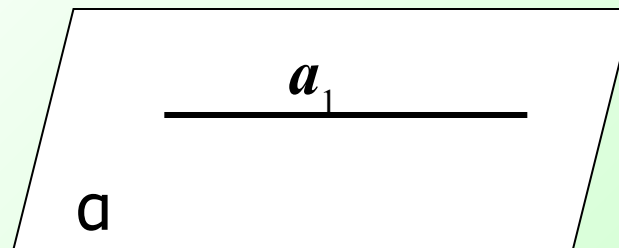


1. Если $a \perp \alpha$, то проекцией a на α является т. А

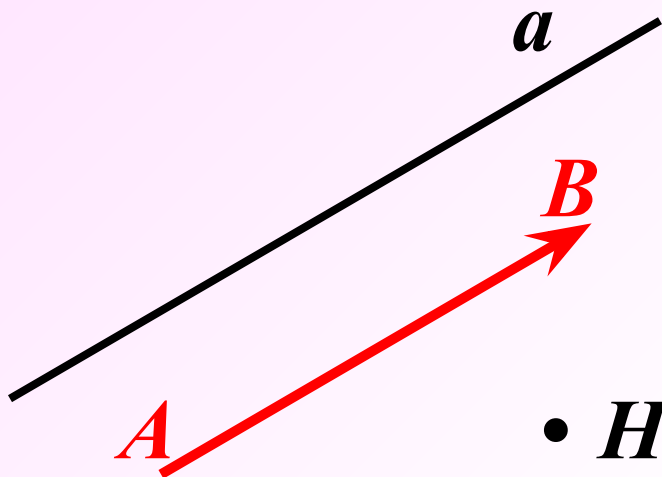
$$A = a \cap \alpha \quad (a, \alpha) = 90^\circ$$



2. Если $a \parallel \alpha$, a_1 - проекция a на α , то $a \parallel a_1$, $a_1 \subset \alpha$.
 $(a, \alpha) = 0^\circ$



Направляющий вектор прямой.



- *Ненулевой вектор называется **направляющим вектором** прямой, если он лежит на самой прямой, либо на прямой, параллельной ей.*

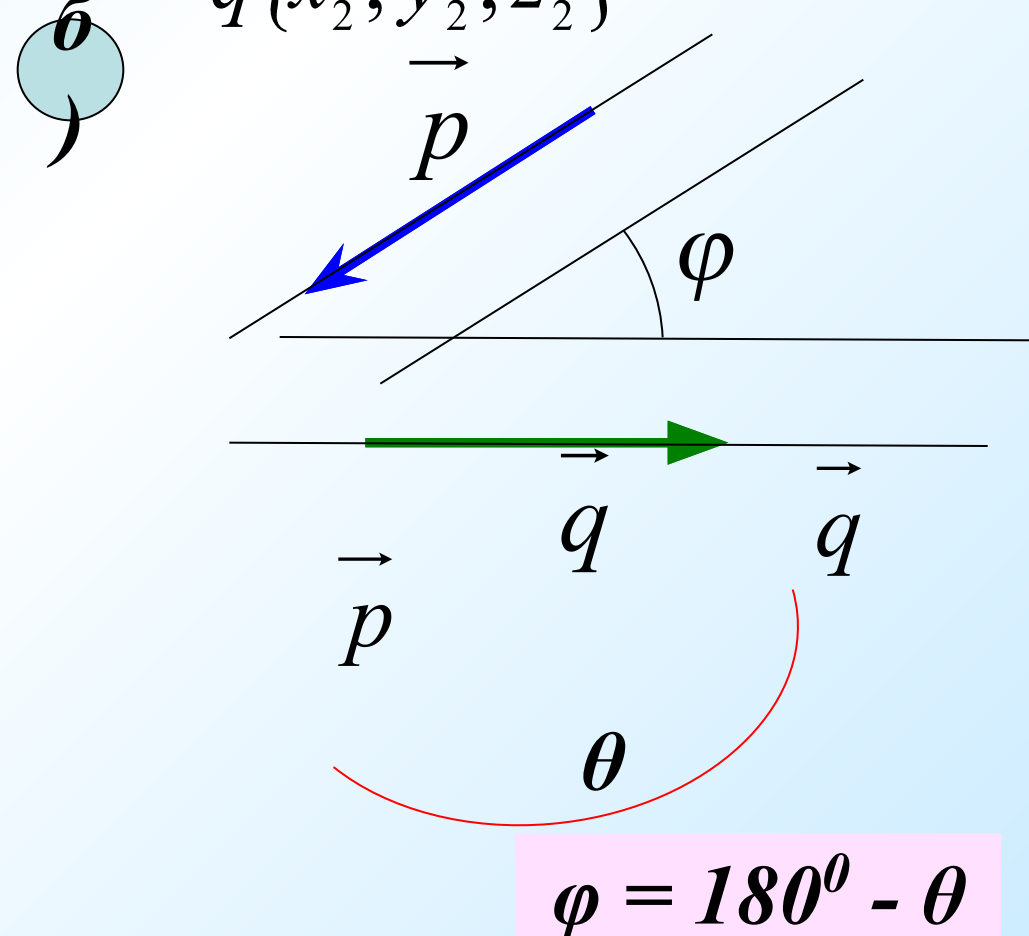
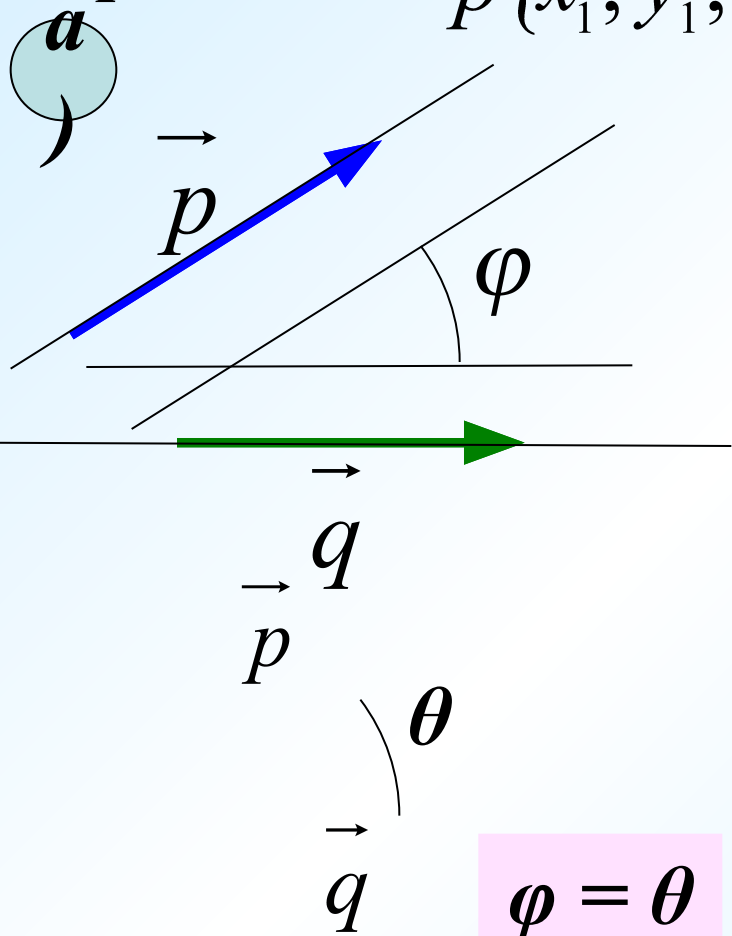


Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

№1. Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$

$\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$



ОТВЕТ:

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

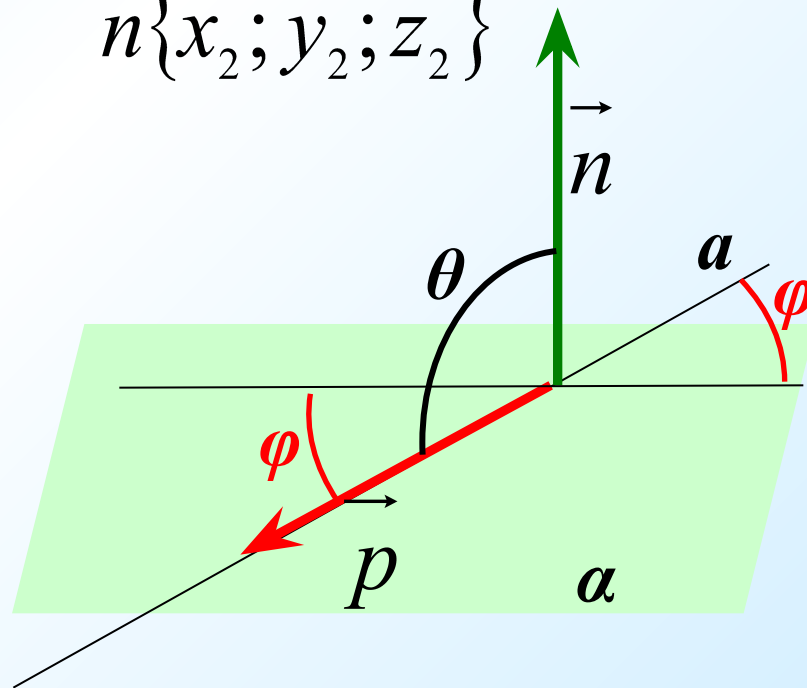
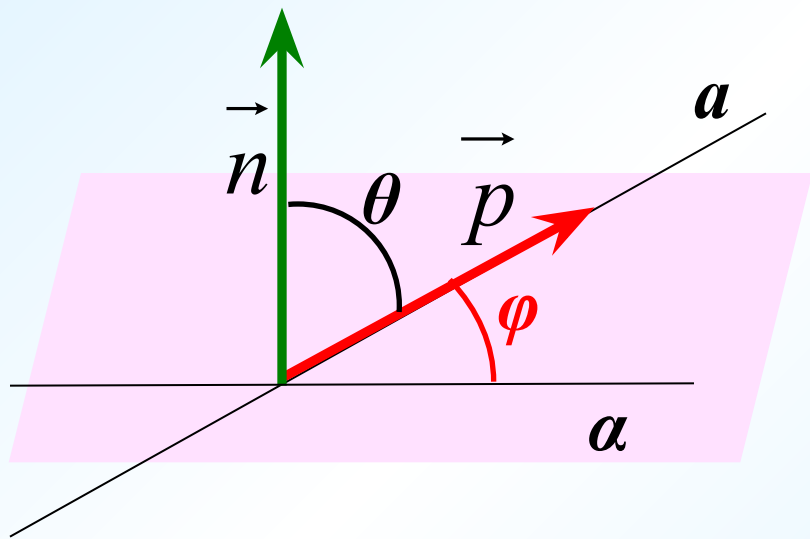
№2. Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости..

а)

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$$

б)

$$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$$



№ 464 (а)

Дано: $A(3;-2;4)$ $B(4;-1;2)$ $C(6;-3;2)$ $D(7;-3;1)$

Найти: угол между прямыми AB и CD .

Ваши предложения...

1. Найдем координаты векторов

$$\overrightarrow{AB} \{1;1;-2\} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{CD} \{1;0;-1\}$$

2. Воспользуемся формулой:

$$\cos \varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\varphi = 30^\circ$$



№ 466 (а)

Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

точка M принадлежит AA_1

$AM : MA_1 = 3 : 1$; N – середина BC

Вычислить косинус угла между прям. MN и DD_1

1. Введем систему координат.

2. Рассмотрим DD_1 и MN .

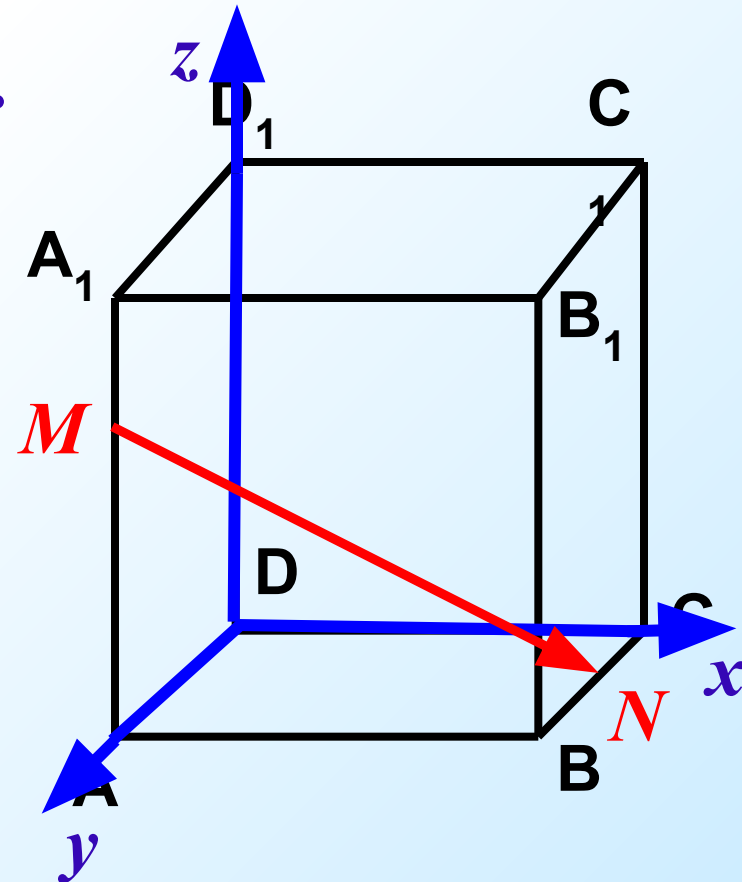
3. Пусть $AA_1 = 4$, тогда

$$M(0;4;3) \quad N(4;2;0)$$

4. Найдем координаты

векторов DD_1 и MN .

5. По формуле найдем $\cos\varphi$.



Ответ: $\frac{3}{\sqrt{29}}$

Задача.

Дано: прямоугольный параллелепипед

$$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1; DA = 2; DC = 2; DD_1 = 3.$$

Найти угол между прямыми CB_1 и D_1B .

Ваши предложения...

1. Введем систему координат D_{xyz}
2. Рассмотрим направляющие

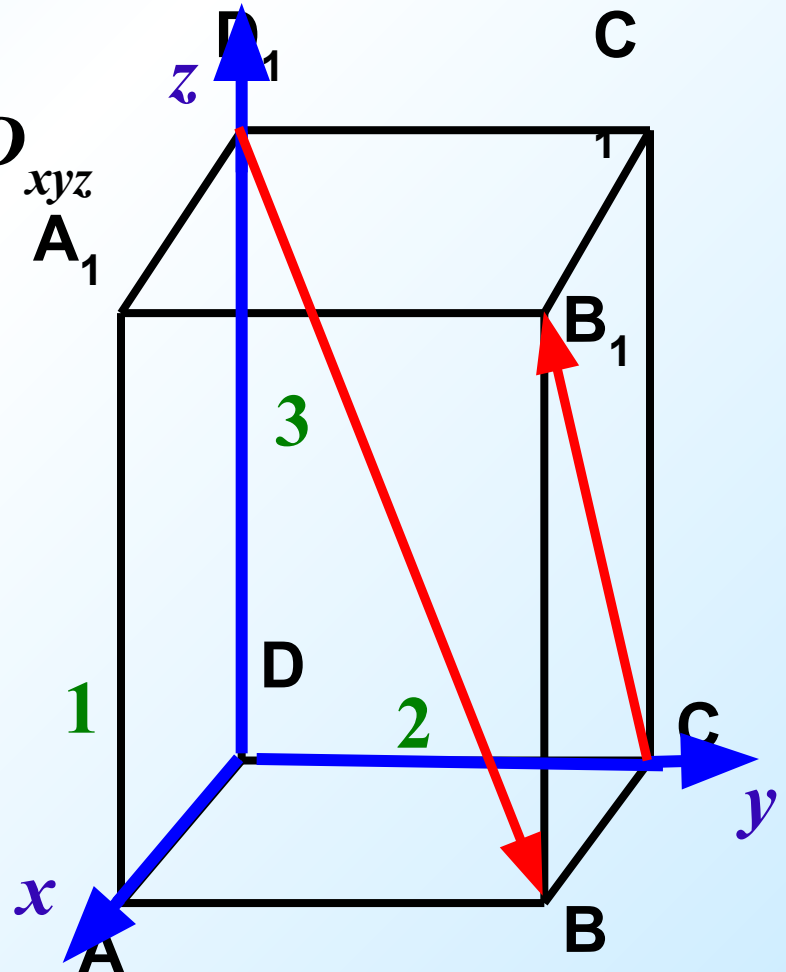
прямых D_1B и CB_1 .

$$\overrightarrow{CB_1} \{1; 0; 3\} \quad \overrightarrow{D_1B} \{1; 2; -3\}$$

3. По формуле найдем $\cos \varphi$.

$$\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{35}}$$

$$\varphi \approx 47^\circ 28'$$



№ 467 (а)

Дано: прямоугольный параллелепипед

$$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1; AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$$

Найти угол между прямыми BD и CD_1 .

1 способ:

1. Введем систему координат B_{xyz}

2. Пусть $AA_1 = 2$, тогда

$$AB = BC = 1.$$

$$B(0;0;0) \quad C(1;0;0) \quad D(1;1;0) \quad D_1(1;1;2)$$

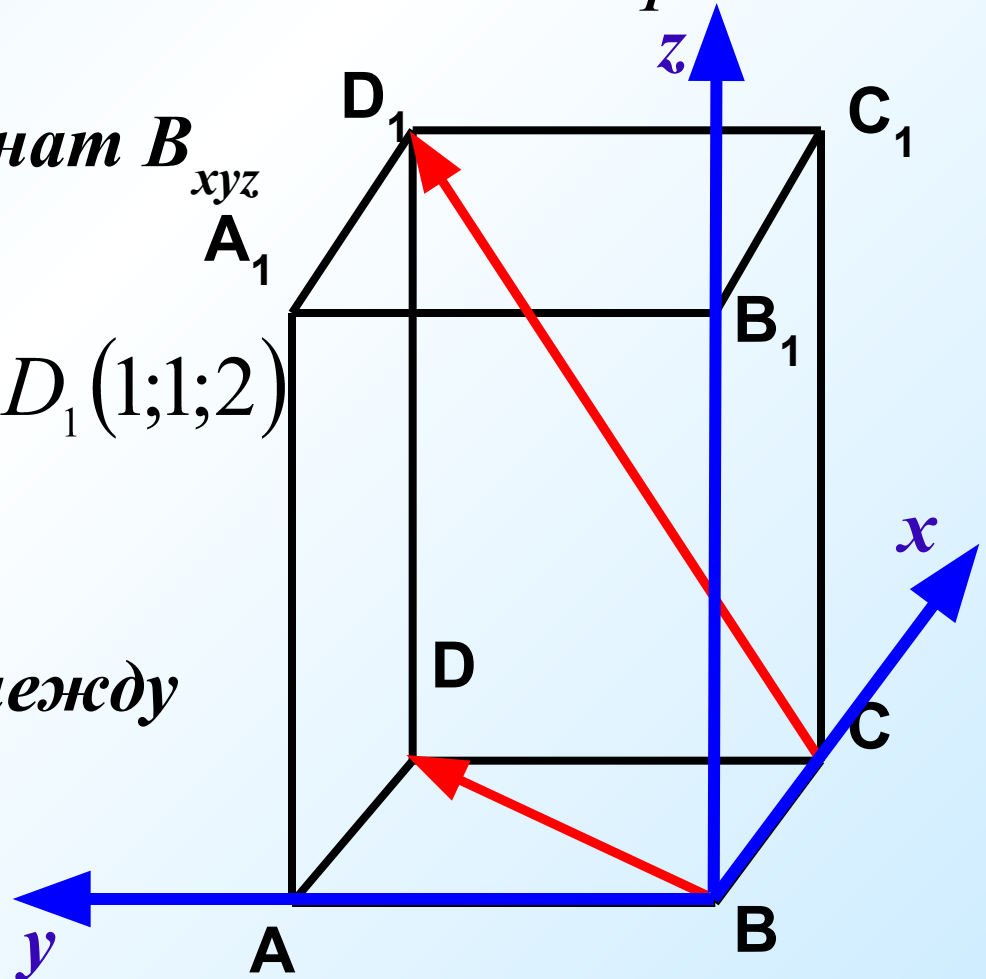
3. Координаты векторов:

$$\overrightarrow{BD} \{1;1;0\} \quad \overrightarrow{CD_1} \{0;1;2\}$$

4. Находим косинус угла между

прямыми:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



№ 467 (а)

Дано: прямоугольный параллелепипед

$$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1; AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$$

Найти угол между прямыми BD и CD_1 .

2 способ:

1. Т.к. $CD_1 \parallel BA_1$, то углы между BD и BA_1 ; BD и CD_1 — равны.

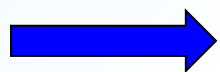
2. В $\triangle BDA_1$: $BA_1 = \sqrt{5}$, $A_1D = \sqrt{5}$

3. $\triangle BDA$: по теореме Пифагора

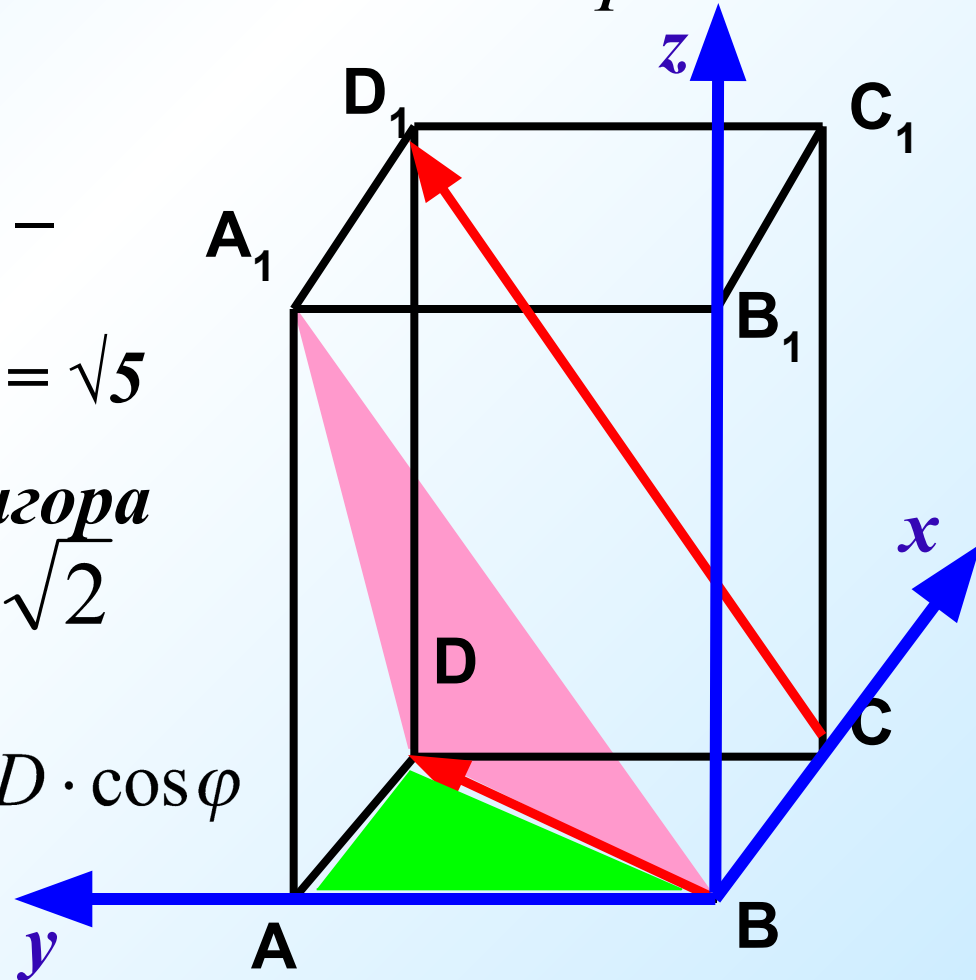
$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} \quad BD = \sqrt{2}$$

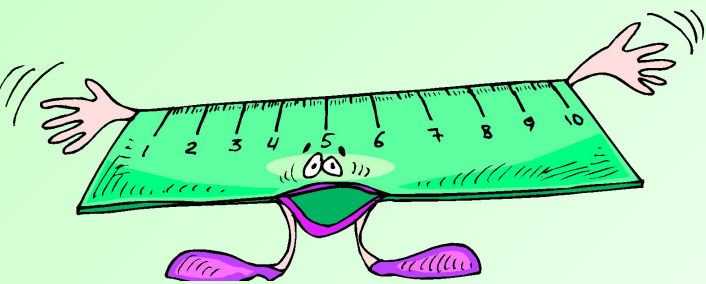
4. По теореме косинусов:

$$A_1D^2 = A_1B^2 + BD^2 - 2A_1B \cdot BD \cdot \cos \varphi$$



$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$





ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

П. 48,

№466, №454

№467 (б) – двумя способами.

