

# Уравнение прямой в пространстве

Поскольку прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, то одним из способов аналитического задания прямой в пространстве является задание с помощью системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

задающих пару пересекающихся плоскостей.

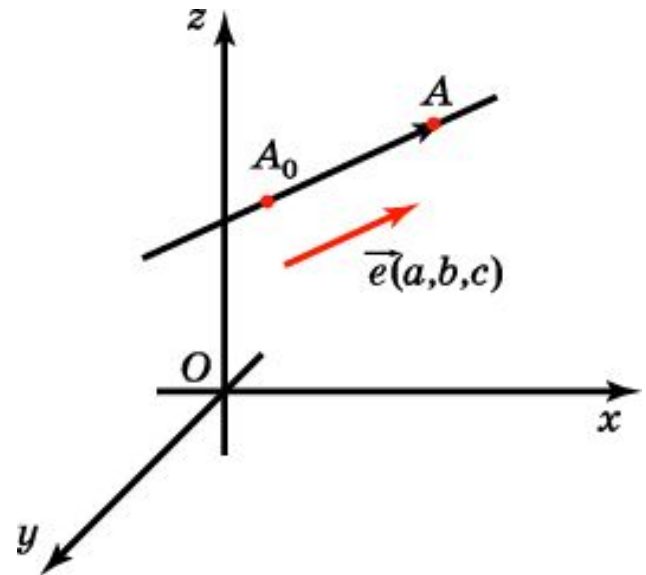
# Уравнение прямой в пространстве

Прямую, проходящую через точку  $A_0(x_0, y_0, z_0)$  с направляющим вектором  $e(a, b, c)$  можно задавать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

В случае, если прямая в пространстве задается двумя точками  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ , то, выбирая в качестве направляющего вектора вектор  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$  и в качестве точки  $A_0$  точку  $A_1$ , получим следующие уравнения

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1, \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1, \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1. \end{cases}$$



# Упражнение 1

Какими уравнениями задаются координатные прямые?

Ответ: Ось  $Ox$   $\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$  Ось  $Oy$   $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 0; \end{cases}$  Ось  $Oz$   $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t. \end{cases}$

## Упражнение 2

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $A(1, -2, 3)$  с направляющим вектором, имеющим координаты  $(2, 3, -1)$ .

Ответ: 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

## Упражнение 3

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки  $A_1(-2, 1, -3)$ ,  $A_2(5, 4, 6)$ .

Ответ: 
$$\begin{cases} x = -2 + 7t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -3 + 9t. \end{cases}$$

## Упражнение 4

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(1,2,-3)$  и перпендикулярную плоскости  $x + y + z + 1 = 0$ .

Ответ: 
$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

# Упражнение 5

В каком случае параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a_1 t + x_1, \\ y = b_1 t + y_1, \\ z = c_1 t + z_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a_2 t + x_2, \\ y = b_2 t + y_2, \\ z = c_2 t + z_2 \end{cases}$$

определяют перпендикулярные прямые?

**Ответ:** Если выполняется равенство  $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$ .

## Упражнение 6

Определите взаимное расположение прямой, задаваемой уравнениями

$$\begin{cases} x - 1 = 5t, \\ y - 1 = 4t, \\ z - 1 = 7t, \end{cases}$$

и плоскости, задаваемой уравнением  $x - 3y + z + 1 = 0$ .

**Ответ:** Перпендикулярны.



## Упражнение 7

Найдите координаты точки пересечения плоскости  $2x - y + z - 3 = 0$  и прямой, проходящей через точки  $A(-1, 0, 2)$  и  $B(3, 1, 2)$ .

Ответ:  $(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, 2)$ .

## Упражнение 8

Определите взаимное расположение прямых, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} x - 1 = 2t, \\ y - 1 = -t, \\ z - 1 = 3t, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3 = t, \\ y = 8t, \\ z - 4 = 2t. \end{cases}$$

**Ответ:** Перпендикулярны.

## Упражнение 9

Точка движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора  $e(1,2,3)$ . В начальный момент времени  $t = 0$  она имела координаты  $(-1,1,-2)$ . Какие координаты она будет иметь в момент времени  $t=4$ ?

Ответ:  $(3,9,10)$ .

# Упражнение 10

Параметрические уравнения движения материальной точки в пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -t + 2, \\ z = 3t - 3. \end{cases}$$

Найдите скорость.

Ответ:  $\sqrt{14}$ .

# Упражнение 11

Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени  $t = 2$  она имела координаты  $(3,4,0)$ , а в момент времени  $t = 6$  - координаты  $(2,1,3)$ . Какова скорость движения точки?

Ответ:  $\frac{\sqrt{19}}{4}$ .

## Упражнение 12

Прямая в пространстве задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

Напишите параметрические уравнения прямых, симметричных данной относительно координатных плоскостей.

**Ответ:**

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = -ct - z_0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = at + x_0, \\ y = -bt - y_0, \\ z = ct + z_0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -at - x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$