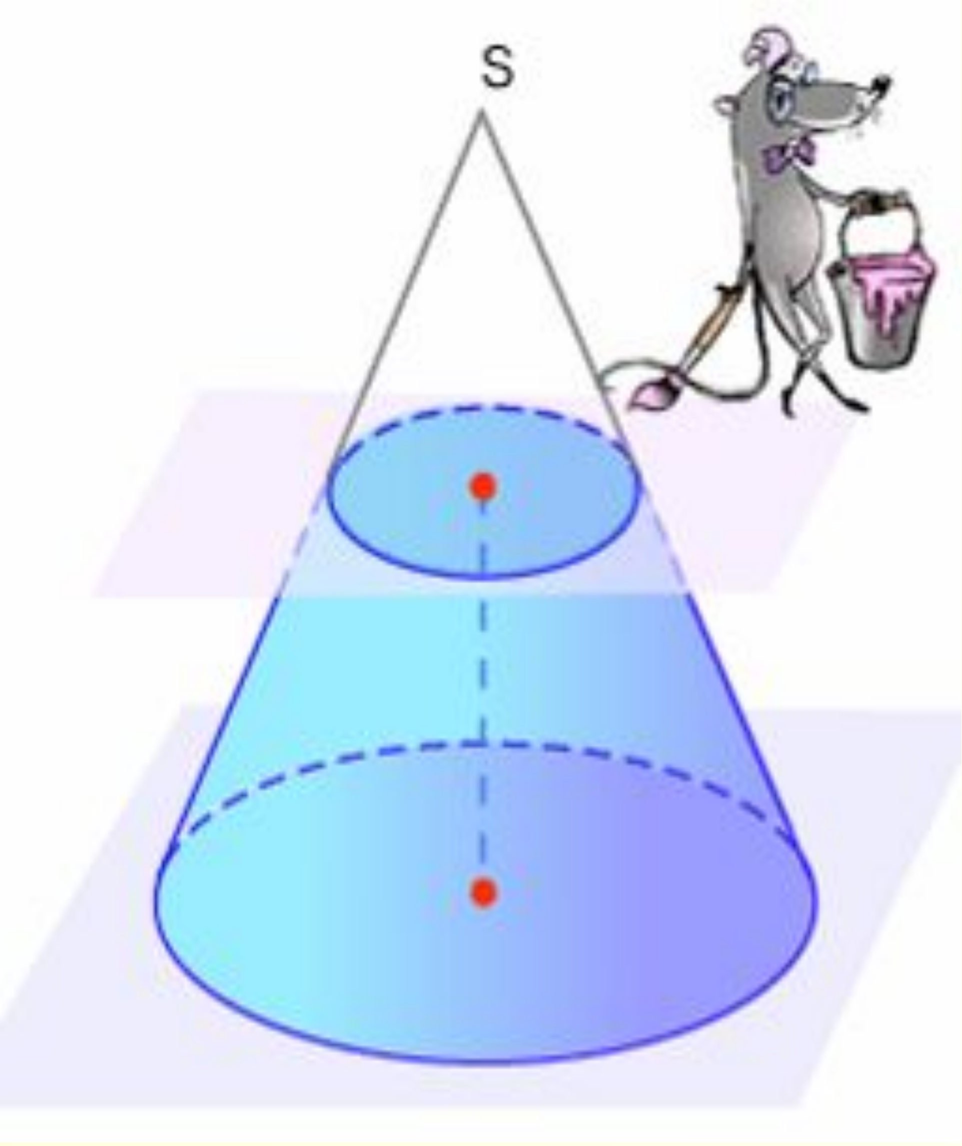
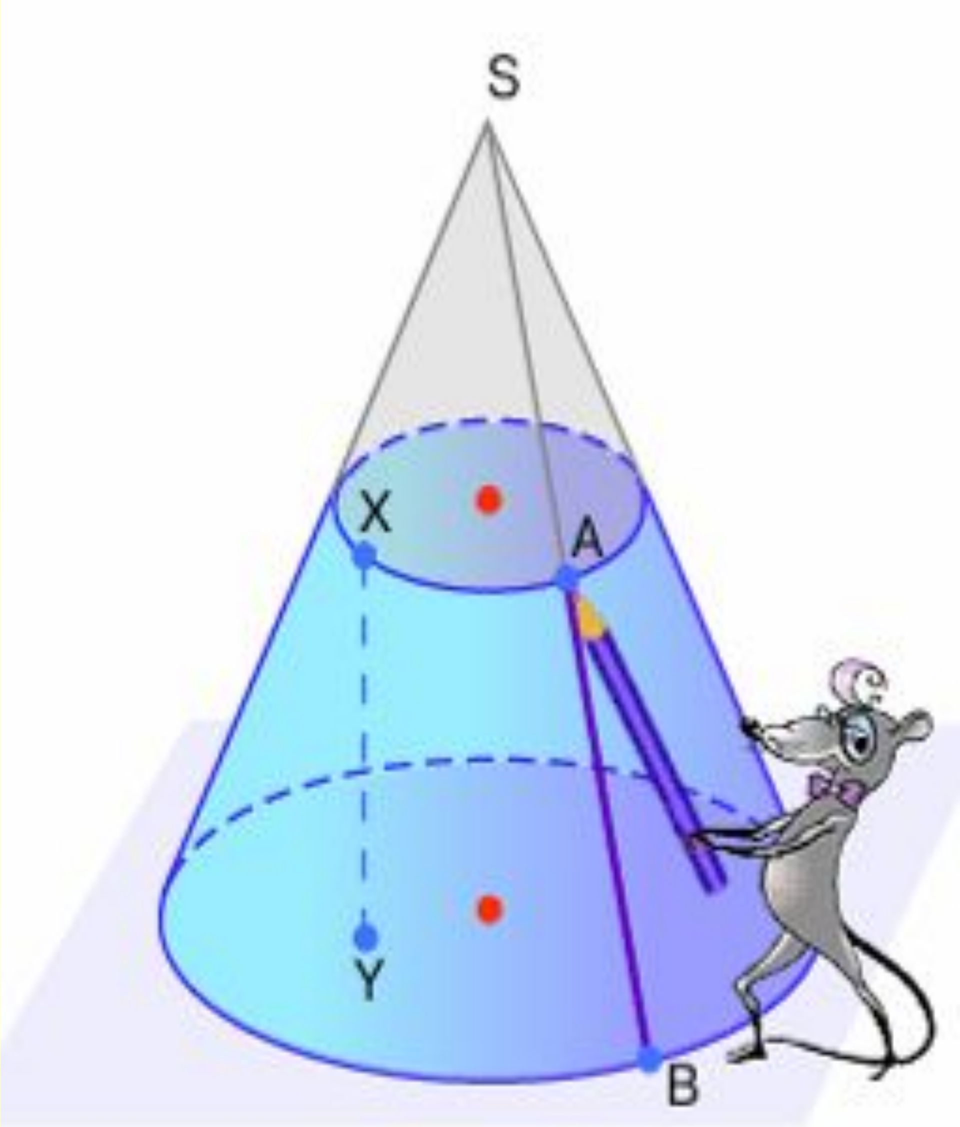
Усеченный конус.

МОУ СОШ №256 г. Фокино



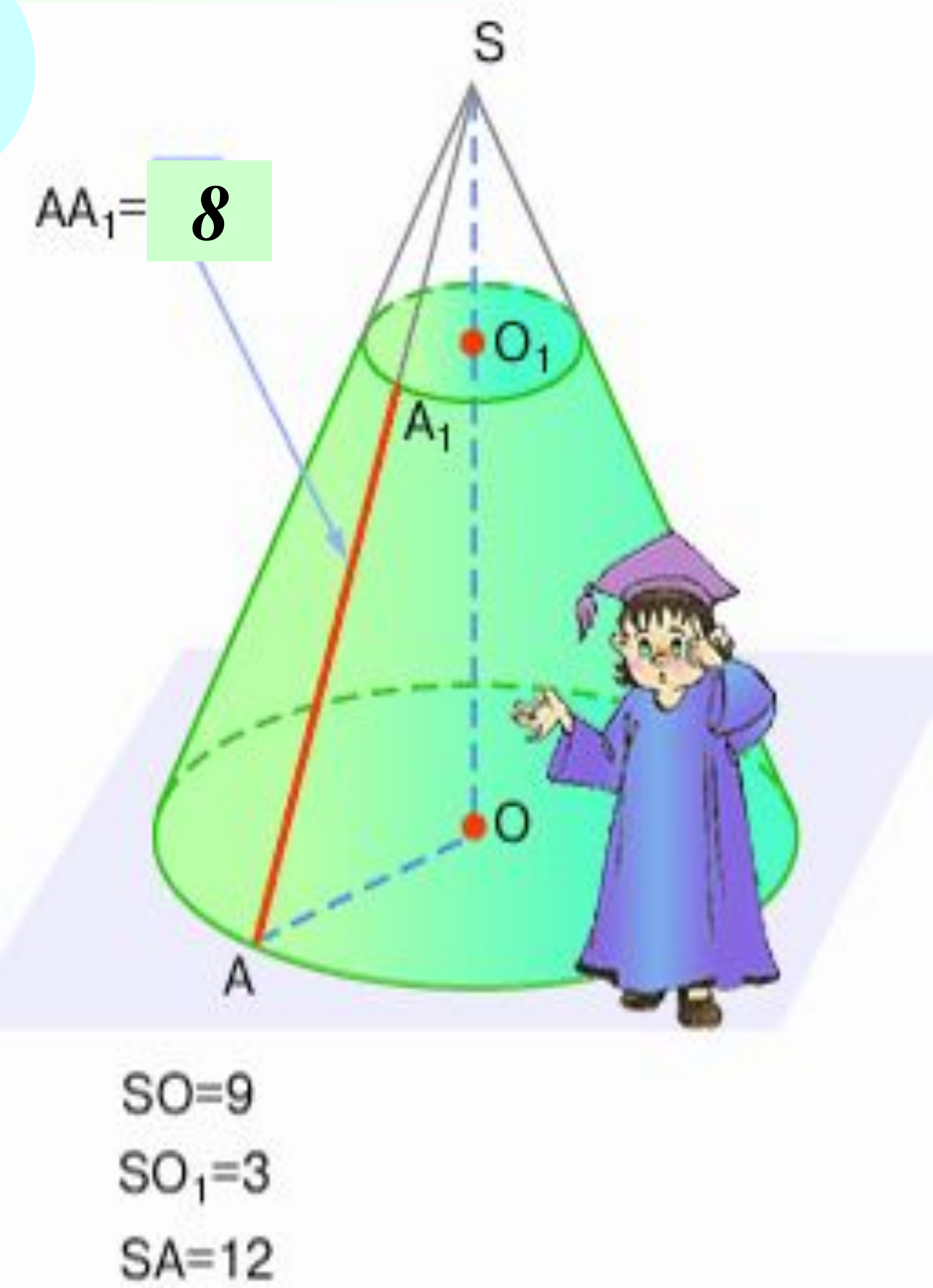
Усеченным конусом называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** усеченного конуса.

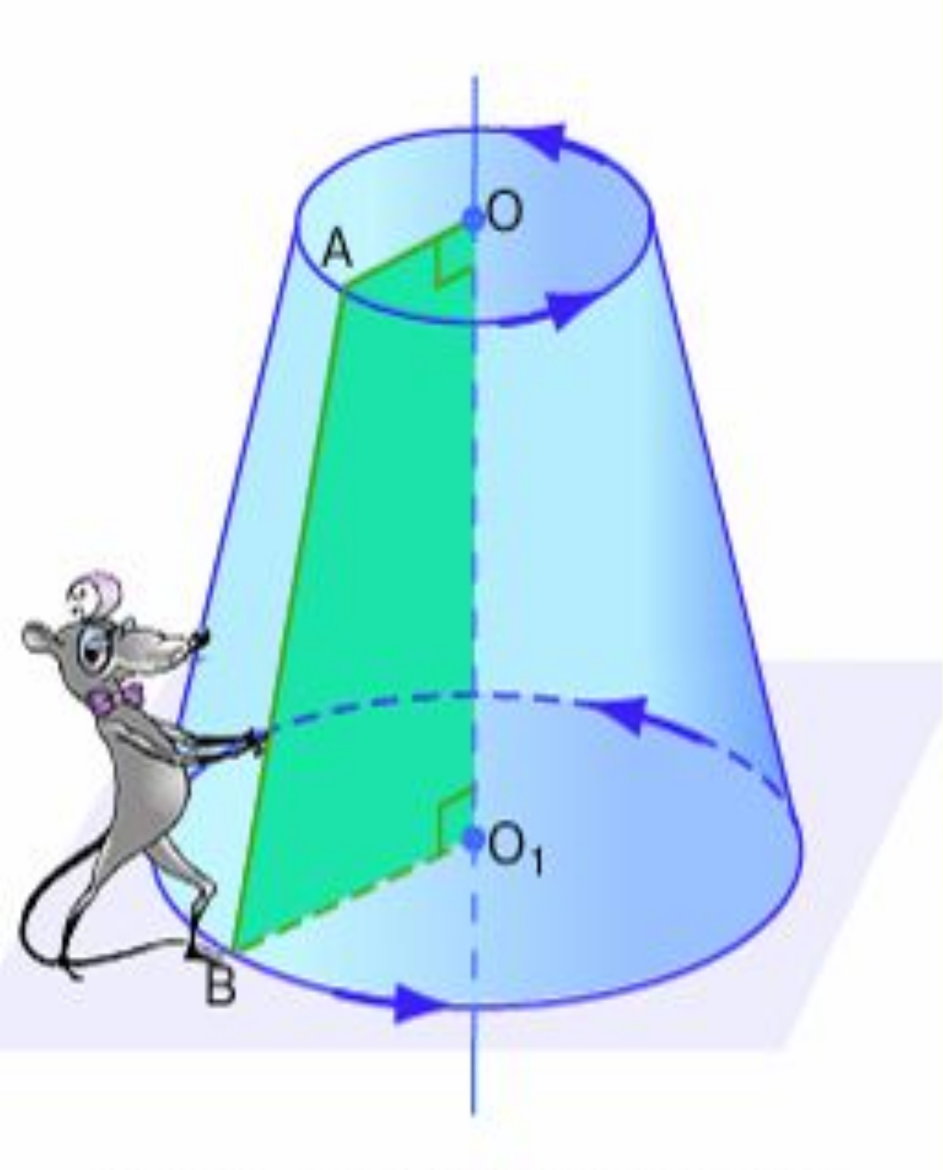


Образующей усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями. **Высотой** усеченного конуса называется расстояние между основаниями.

?

Пусть в конусе, высота которого известна, проведено сечение, находящееся на расстоянии три от вершины. Чему равна образующая получившегося усеченного конуса, если известна образующая полного конуса?

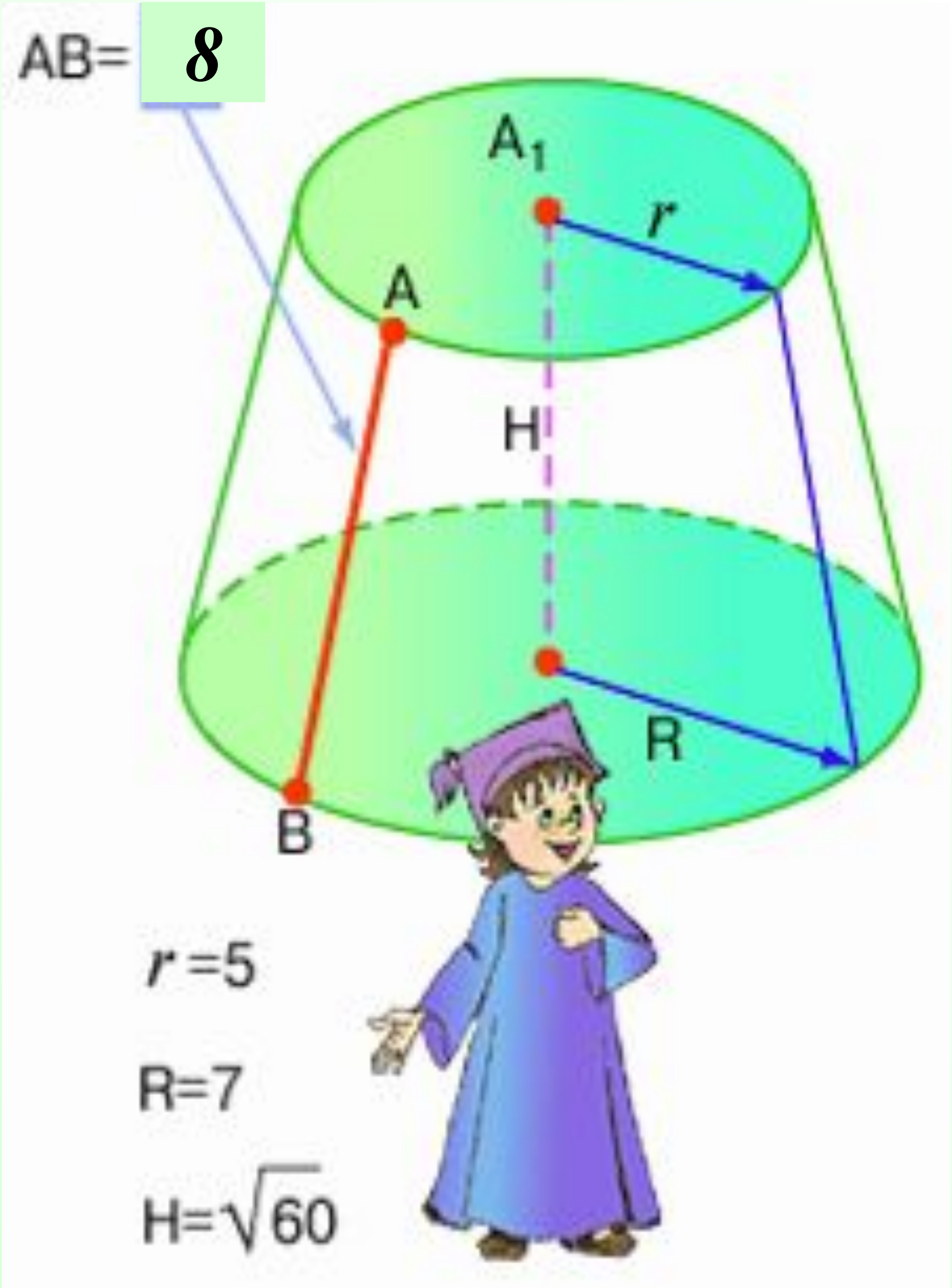


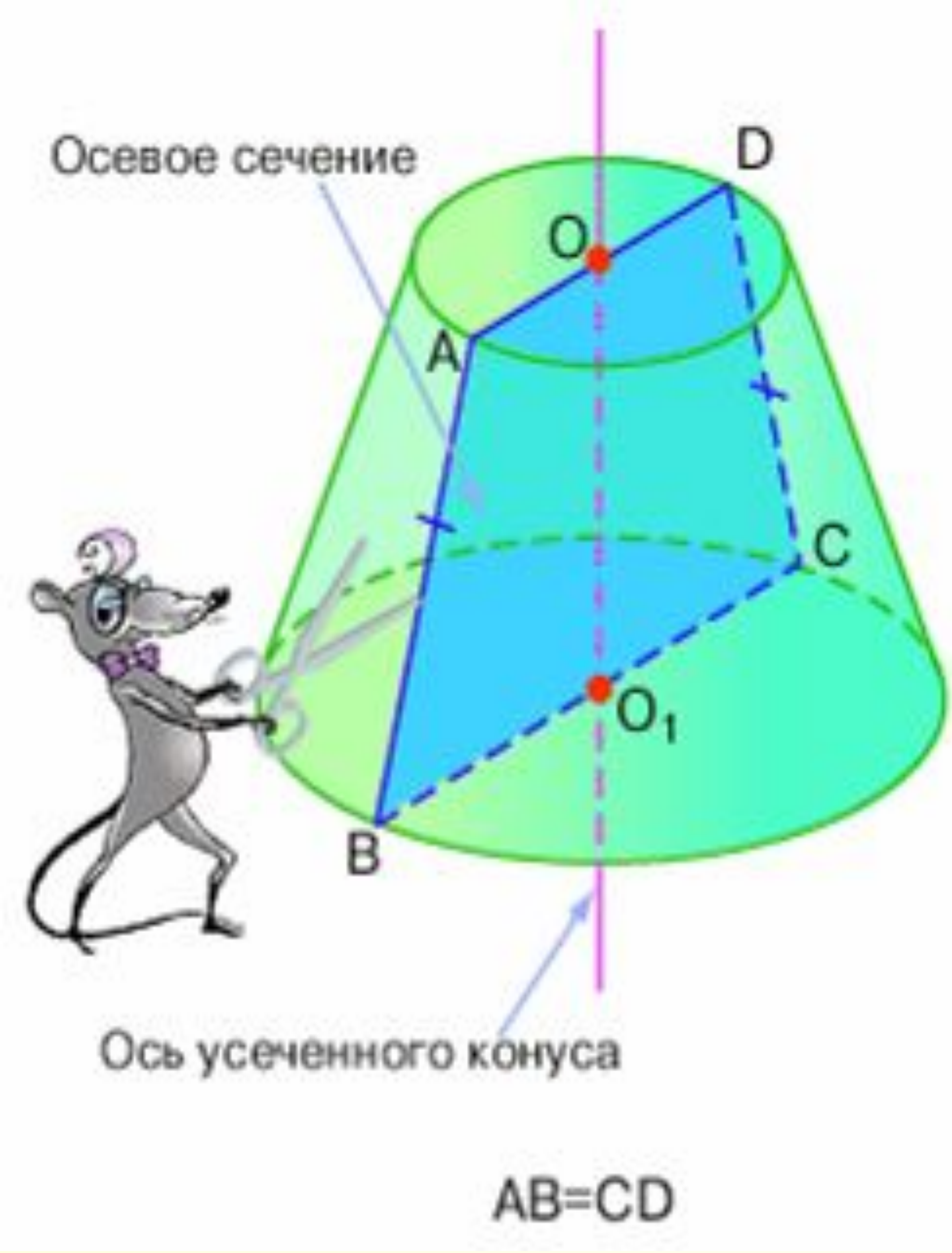


Усеченный конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основанию.

?

Пусть дан усеченный конус, радиусы оснований и высота которого известны. Найдите образующую усеченного конуса.

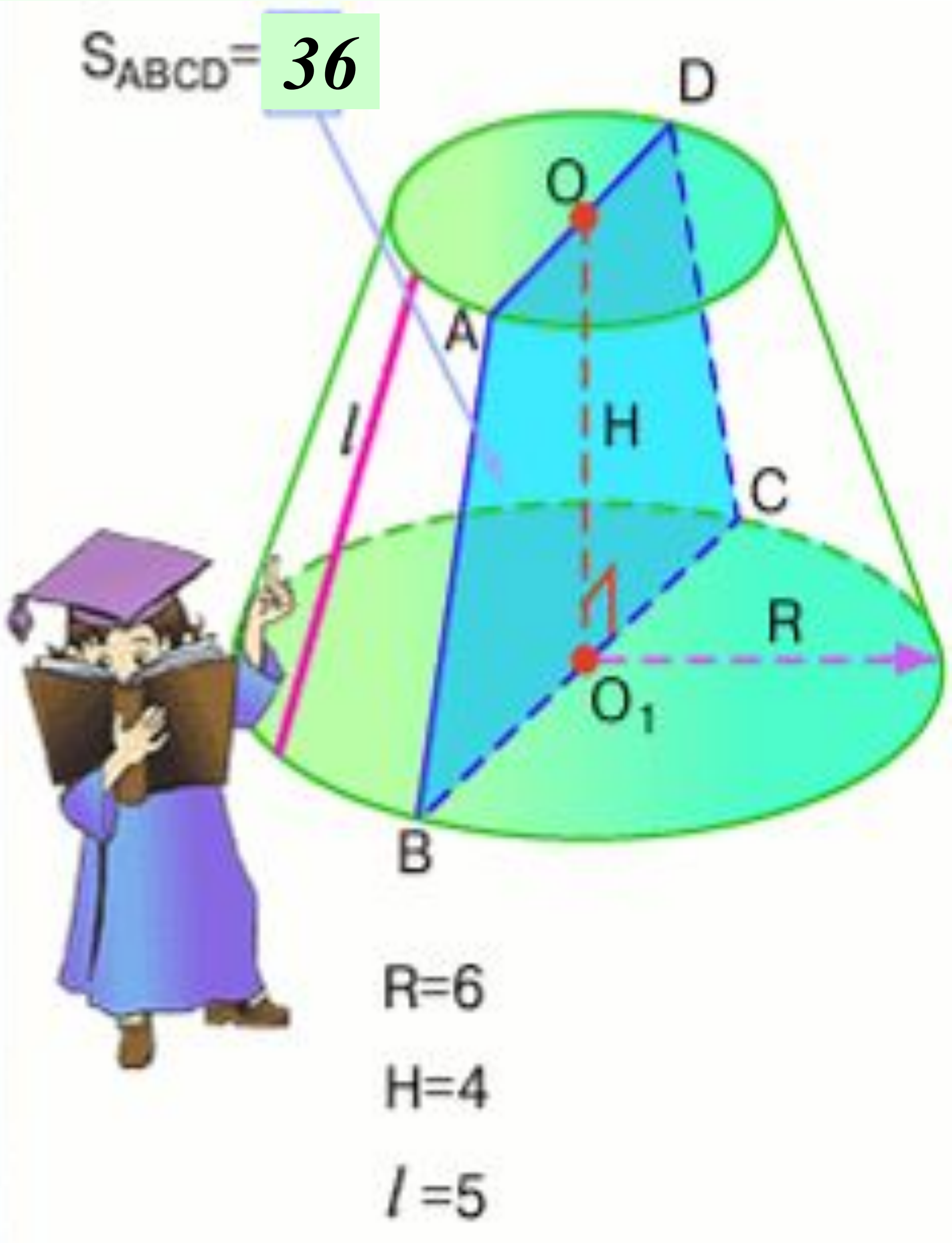




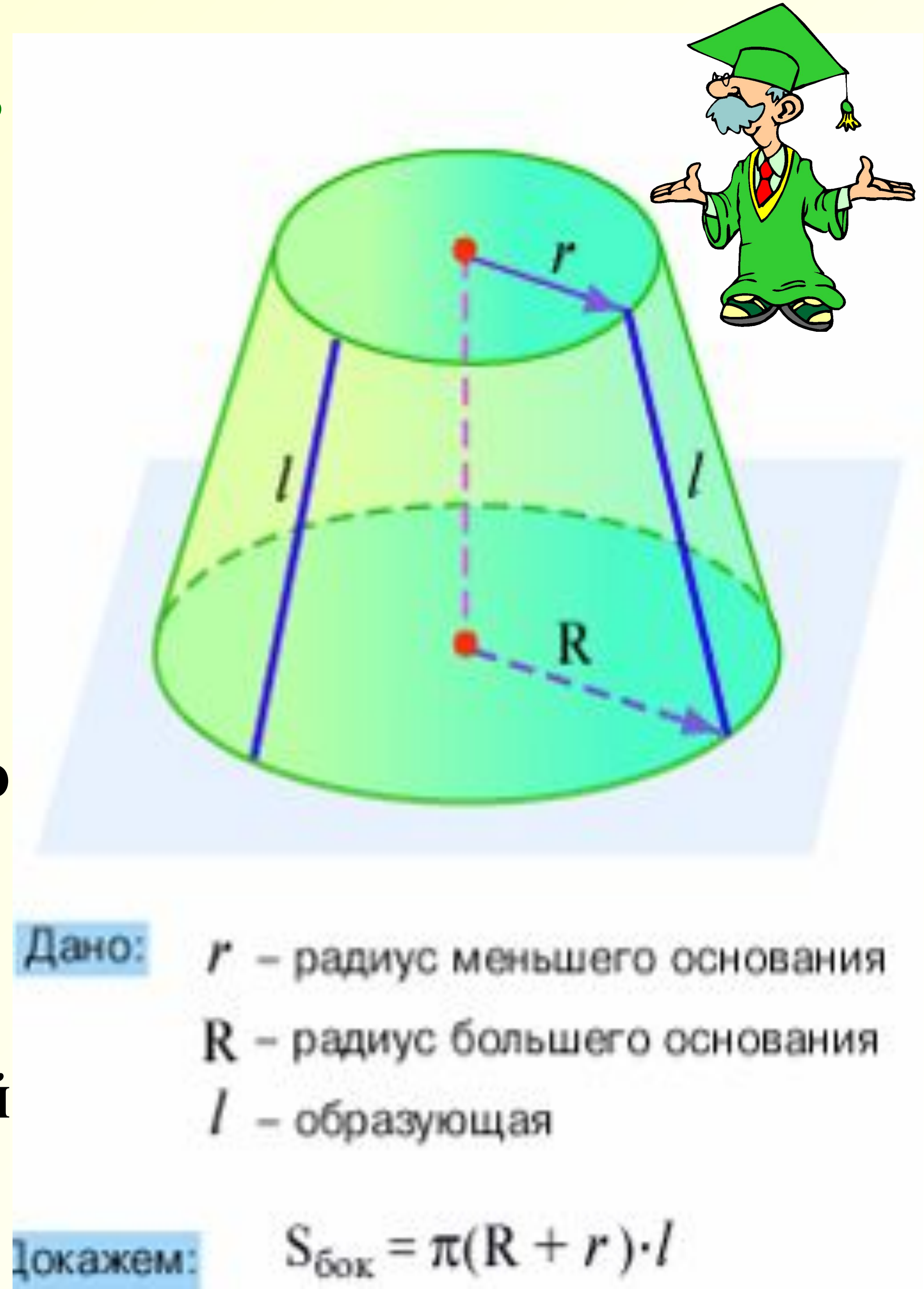
Прямая, соединяющая центры оснований, называется осью усеченного конуса. Сечение, проходящее через ось, называется осевым. Осевое сечение является равнобедренной трапецией.

?

Найдите площадь осевого сечения, если известны радиус нижнего основания, высота и образующая.



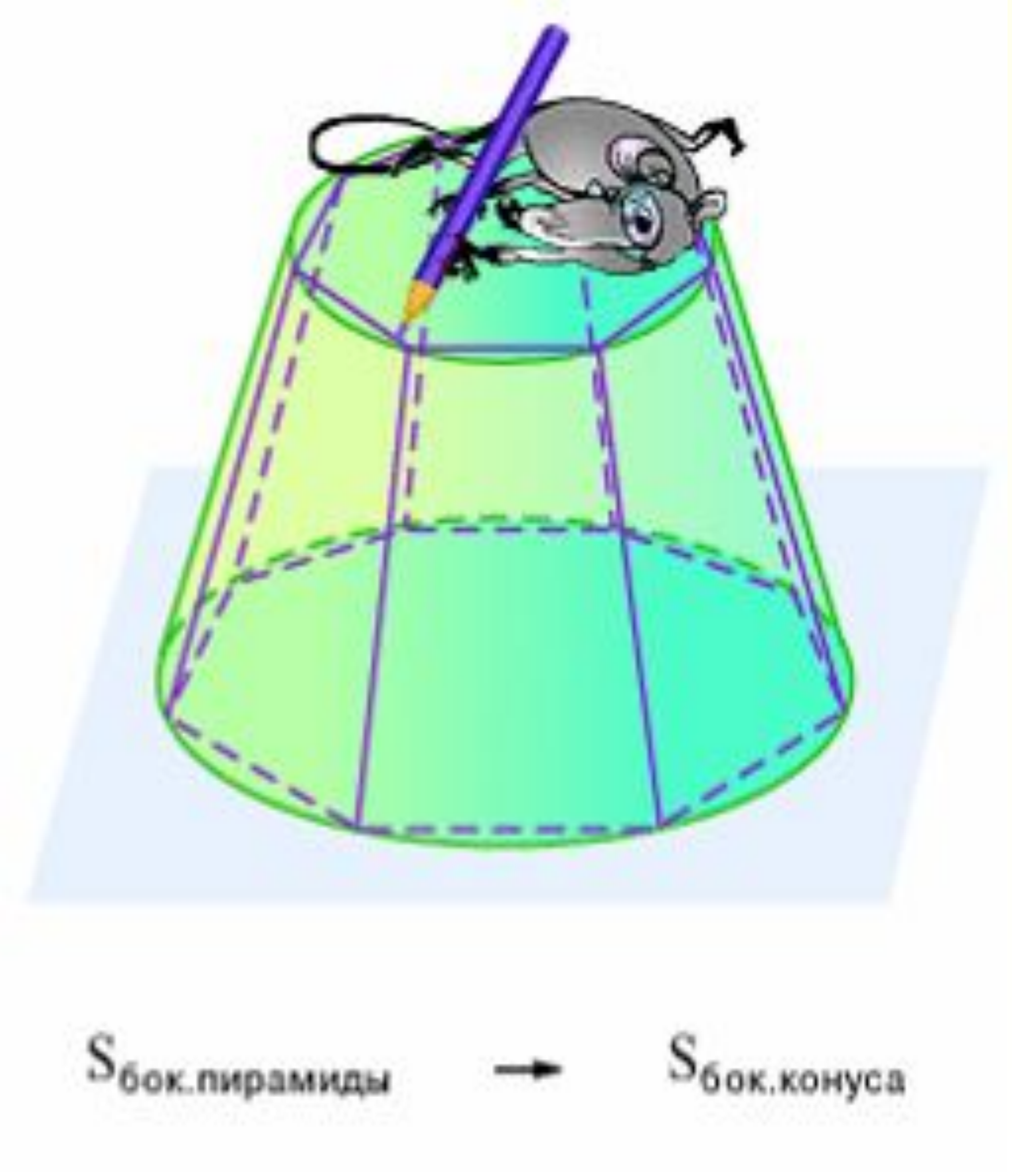
Боковая поверхность усеченного конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса.



Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

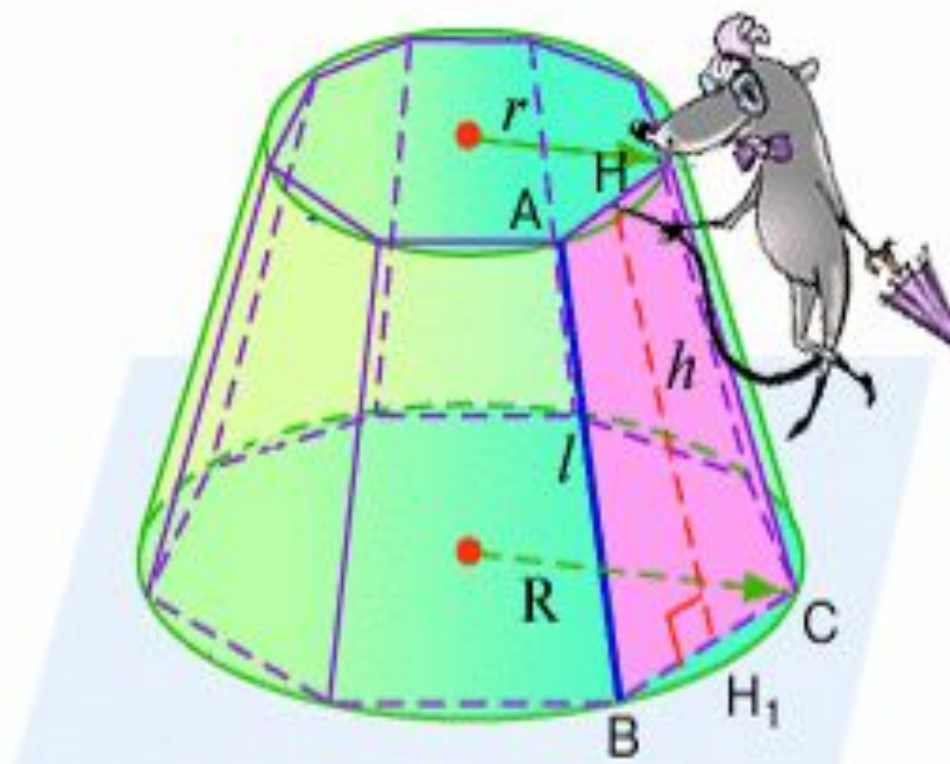
Доказательство:

Боковую поверхность усеченного конуса будем понимать как предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной усеченной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.



Доказательство:

Впишем в конус правильную пирамиду. Ее боковая поверхность состоит из трапеций.



p – периметр меньшего основания

P – периметр большего основания

$$s_{бок.пир} = \frac{(p+P)}{2}h$$

$$S_{бок.пир} \to S_{бок.кон}$$

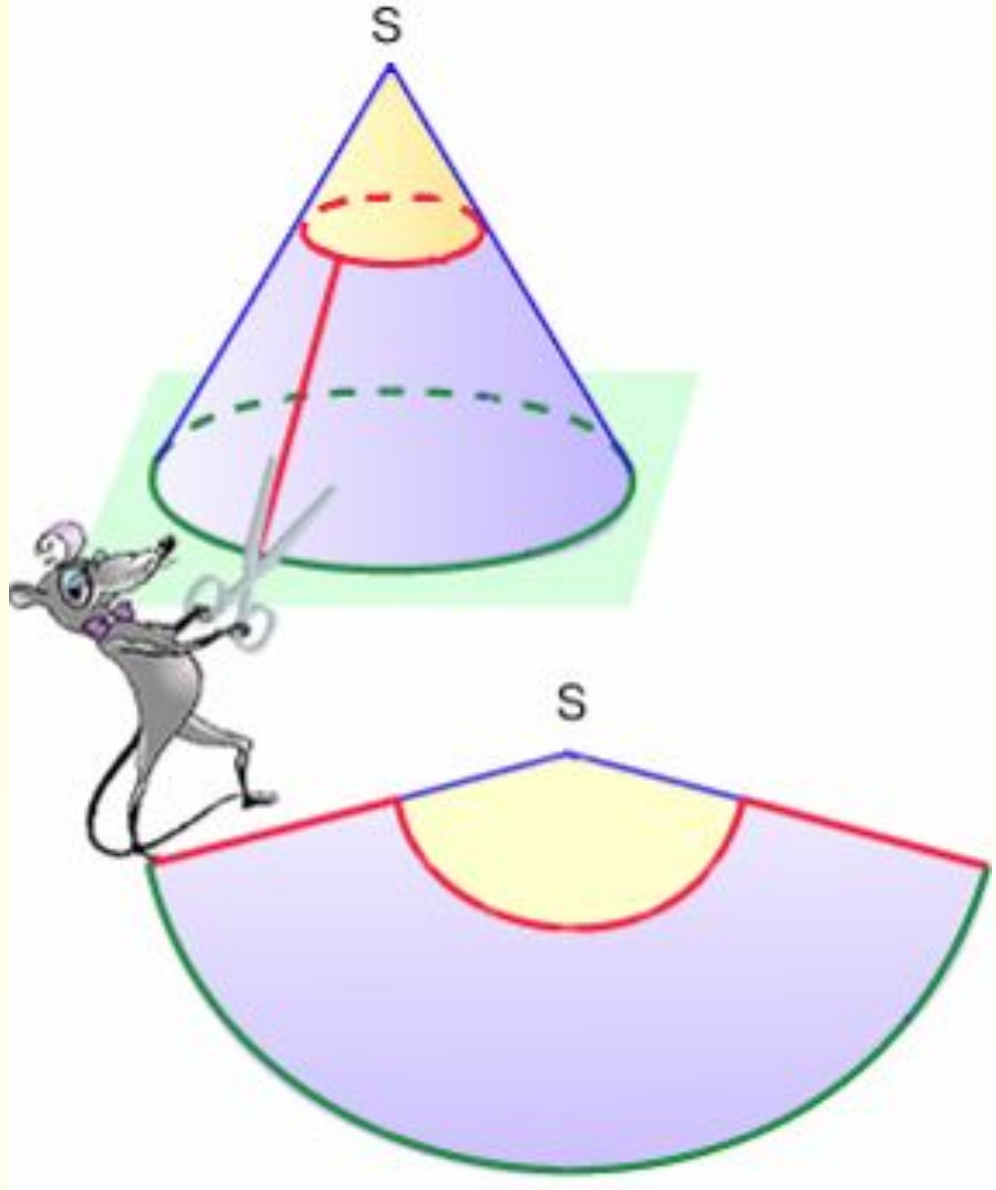
$$p \to c \quad P \to C \quad h \to l$$

$$c = 2\pi r \quad C = 2\pi R$$

$$\frac{2\pi(R+r)}{2}l = \pi(R+r)l$$

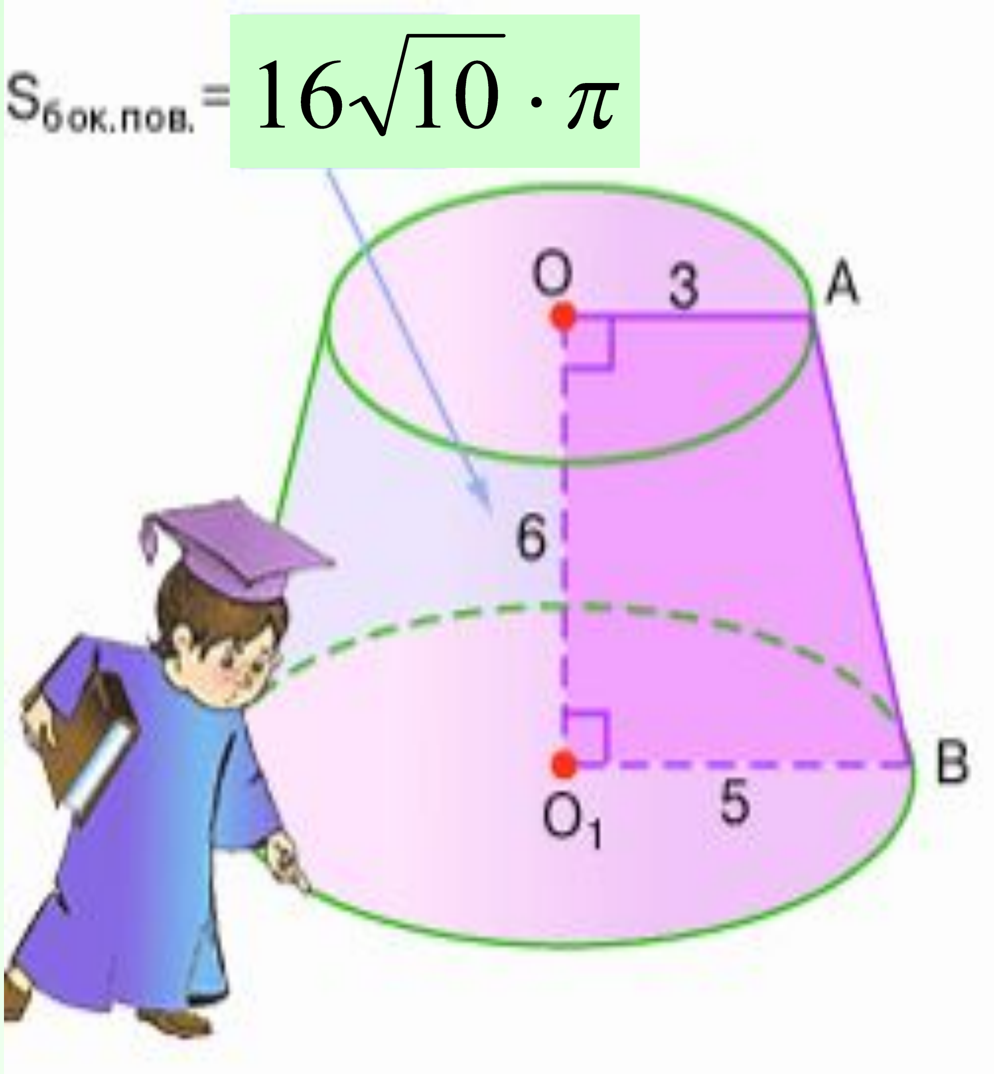
Замечание:

Площадь боковой поверхности усеченного конуса можно рассматривать как разность между площадями боковых поверхностей двух конусов. Поэтому развертка усеченного конуса – это часть кругового кольца.



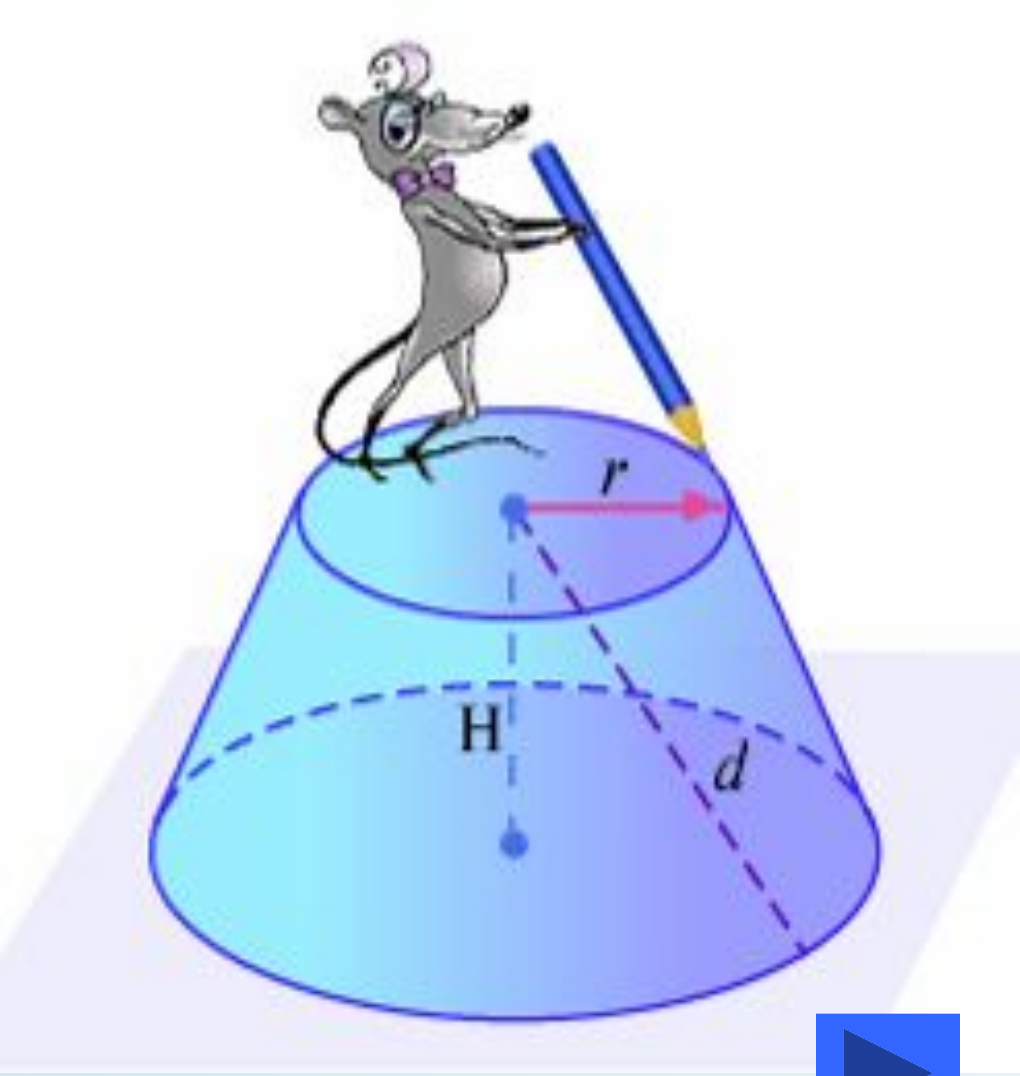
?

Усеченный конус получен от вращения прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основаниям, Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если известны основания и боковая сторона трапеции.



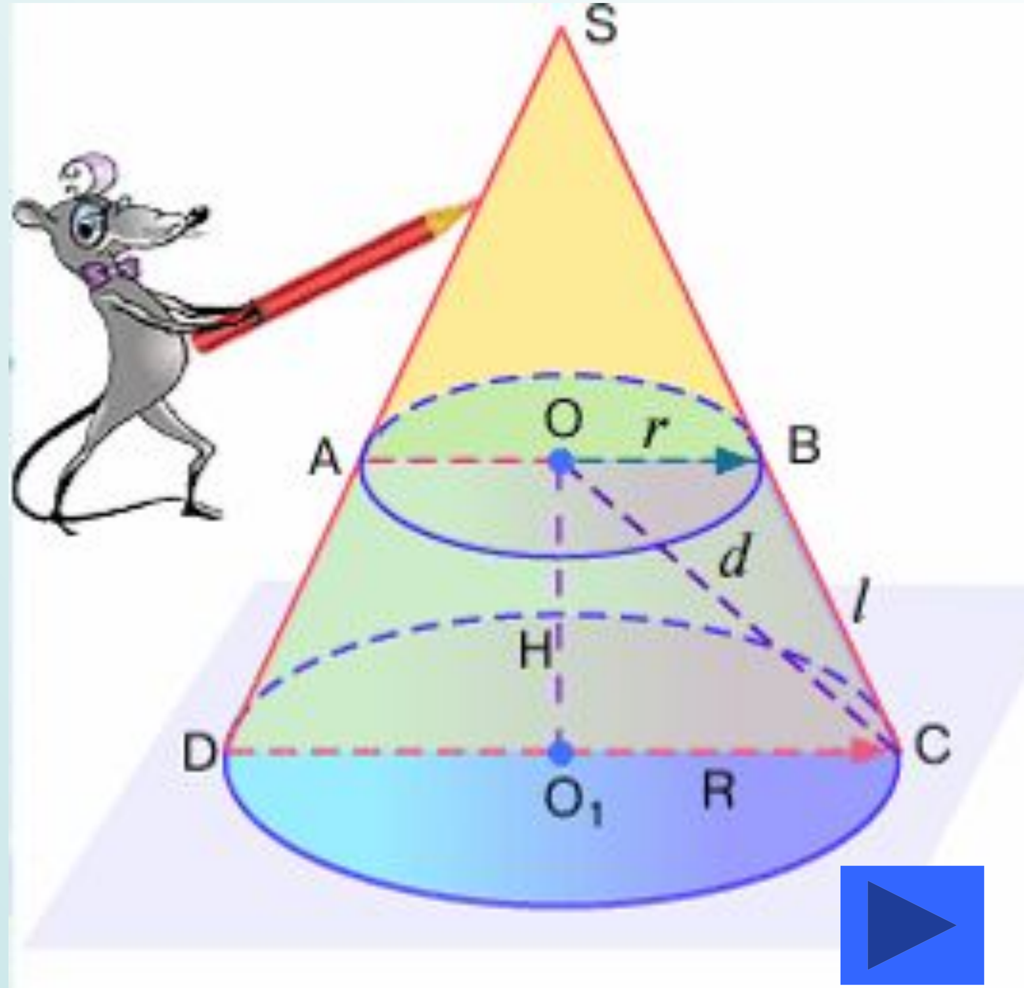
Задача.

- Радиус меньшего основания усеченного конуса равен 5, высота равна 6, а расстояние от центра меньшего основания до окружности большего основания равно 10. Найдите площадь боковых поверхностей усеченного и полного конусов.



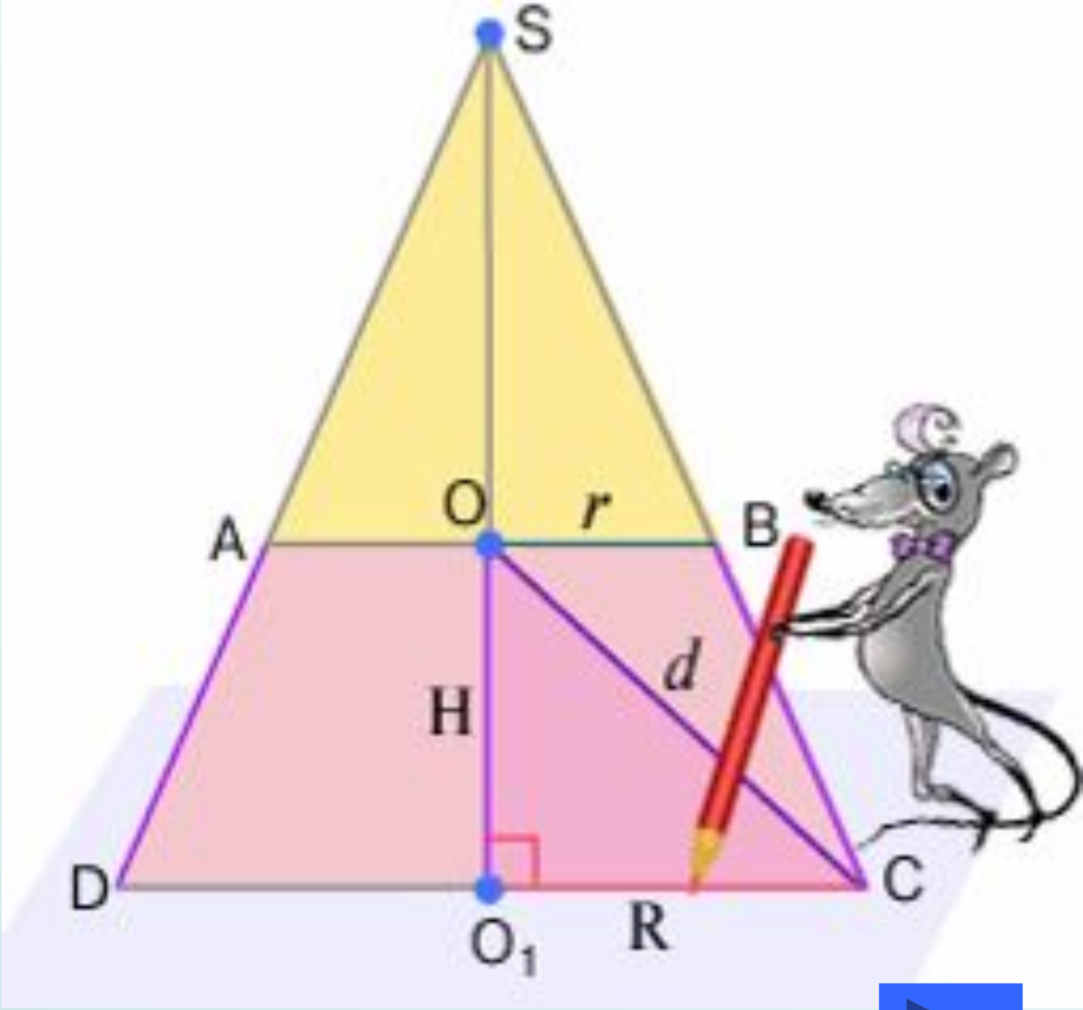
Решение:

Достроим усеченный конус до полного и проведем осевое сечение.



Решение:

1) Вычислим радиус большего основания.



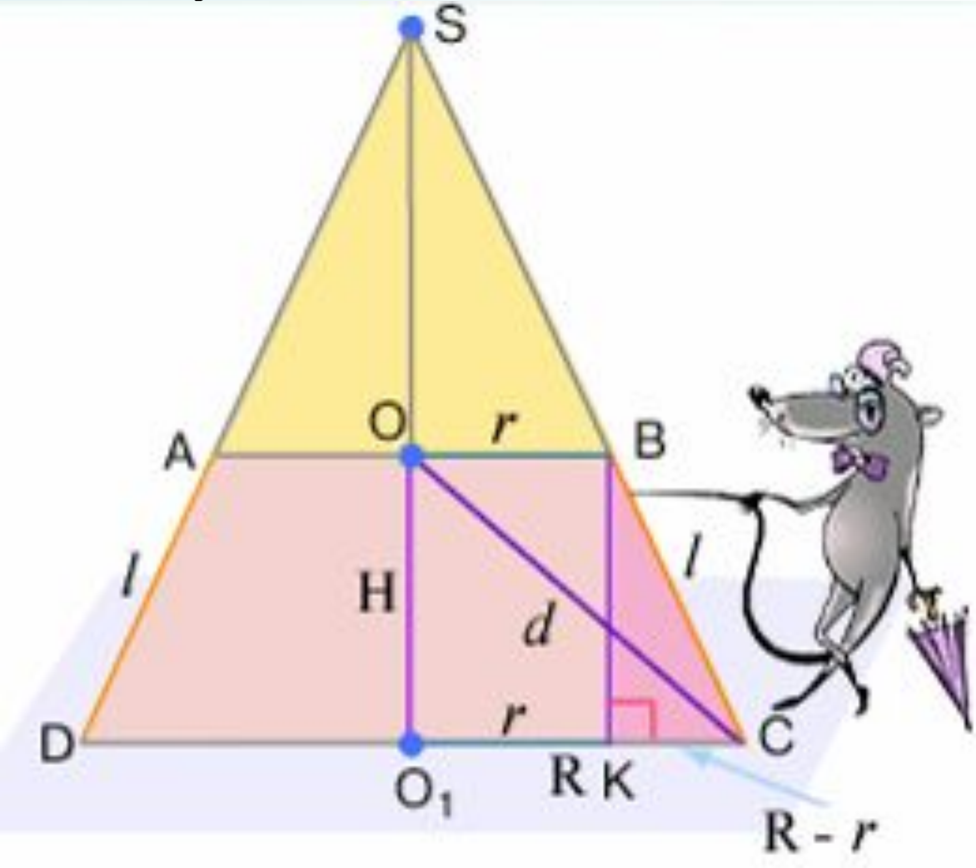
$$\Delta OO_1C:$$

$$d^2 = H^2 + R^2$$

$$R = \sqrt{d^2 - H^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

Решение:

2) *Найдем боковую сторону трапеции – образующую усеченного конуса.*



$\Delta BKC:$

$CK = R - r = 3$

$BC^2 = BK^2 + CK^2$

$$l = \sqrt{H^2 + CK^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

Решение:

3) Используя подобие треугольников, найдем образующую полного конуса.

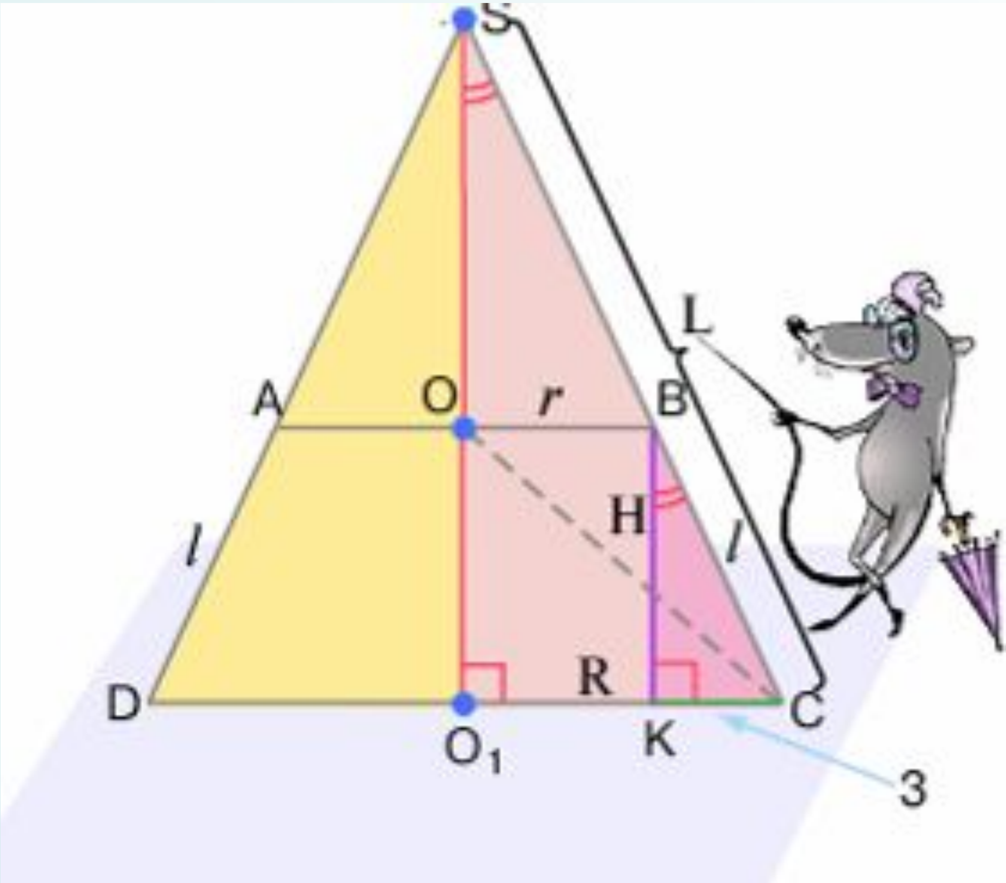
$$SC = L$$

$$\Delta SO_1C \sim \Delta BKC$$

$$\frac{SC}{BC} = \frac{O_1C}{KC}$$

$$\frac{L}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{3}$$

$$L = 8\sqrt{5}$$



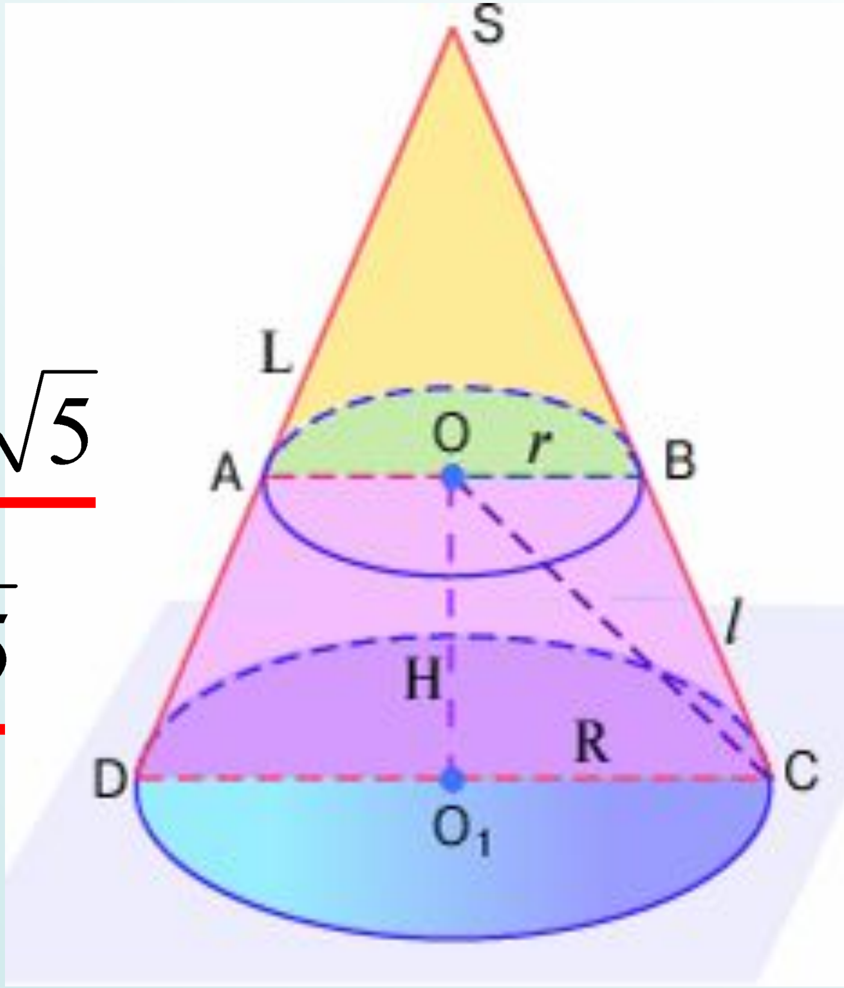
Решение:

4) Подставим найденные значения в формулы для площадей боковой поверхности полного и усеченного конусов.

$$L = 8\sqrt{5} \qquad l = 3\sqrt{5}$$

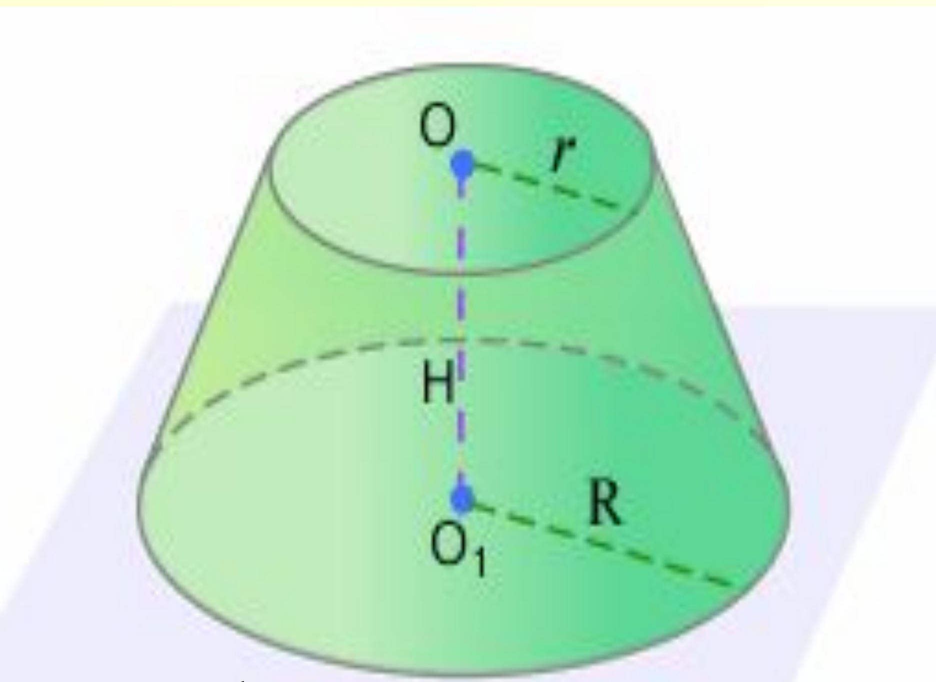
$$S_{усеч} = \pi\left(R + r\right)\cdot l = \underline{\pi \cdot 39\sqrt{5}}$$

$$S_{полн} = \pi\left(RL\right) = \underline{\pi \cdot 64\sqrt{5}}$$



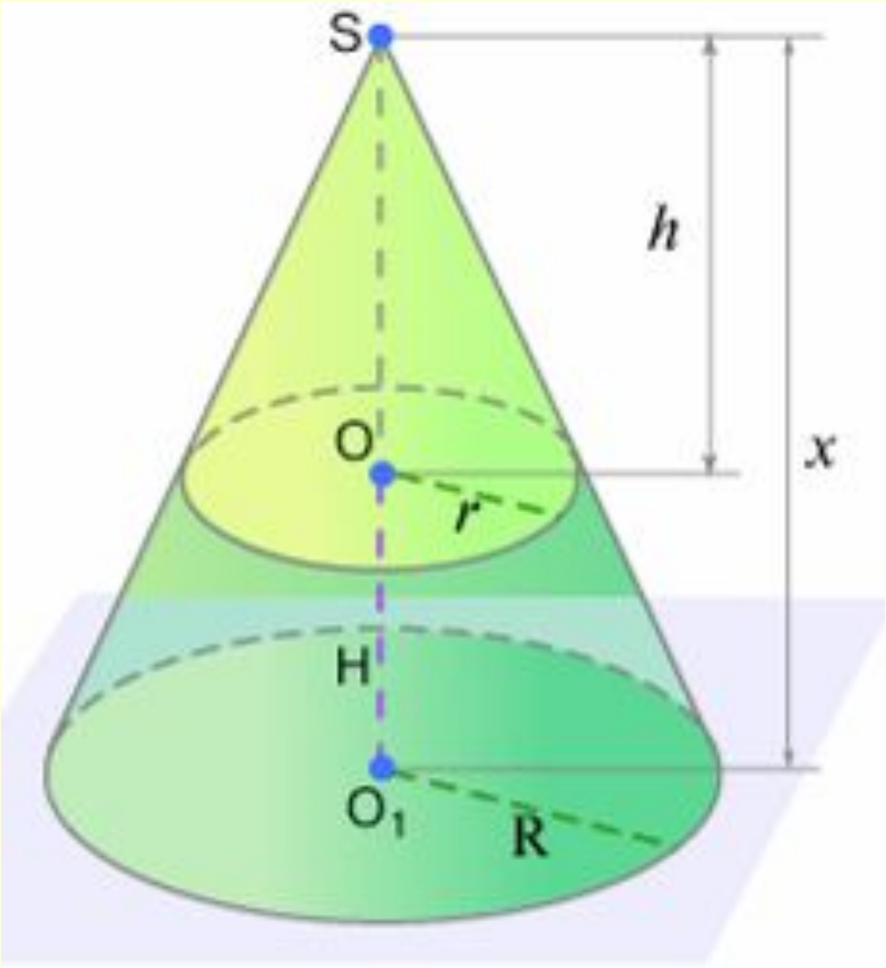
Формула объема усеченного конуса.

- Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один – нижнее основание этого конуса, другой – верхнее, а третий – круг, радиус которого есть среднее геометрическое между радиусами верхнего и нижнего оснований.



$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

Доказательство:

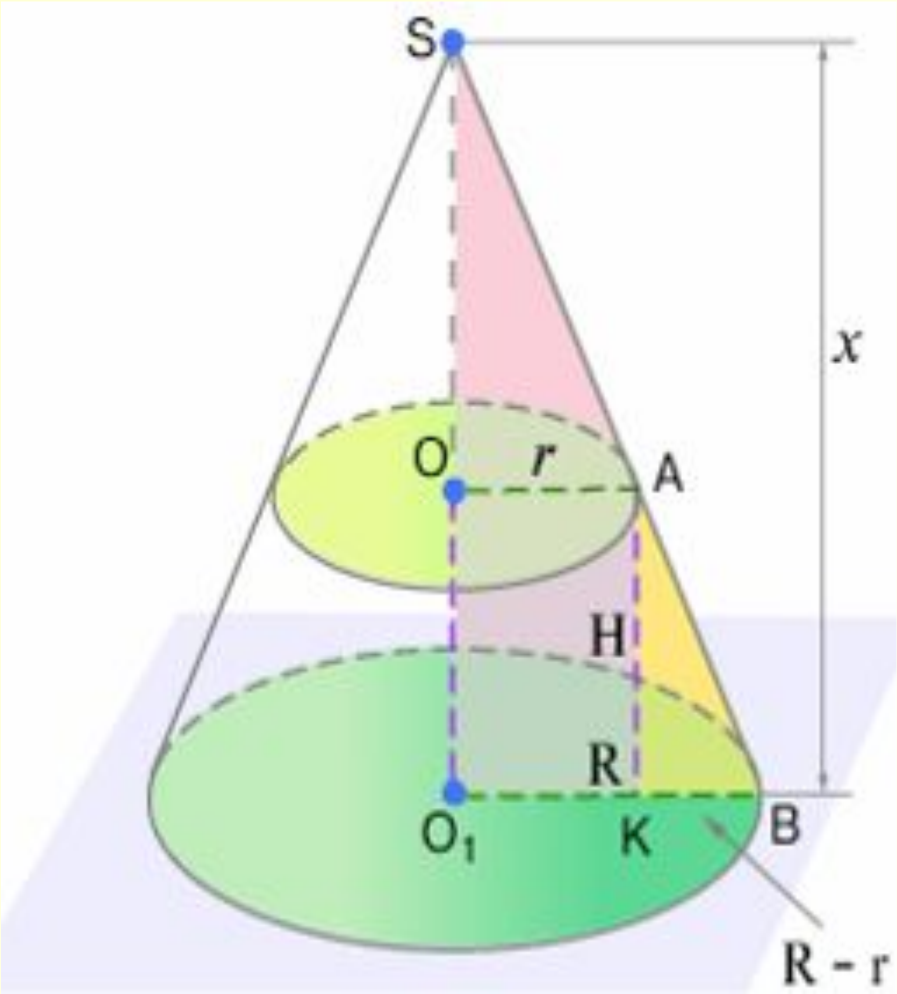


Поместим на верхнем основании усеченного конуса малый конус, дополняющий его до полного и рассмотрим объем его как разность объемов двух конусов.

$$V_{усеч.кон} = V_{полн} - V_{доп} = \frac{1}{3}\pi R^2 x - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Доказательство:

Вычислим высоту полного конуса из подобия треугольников.

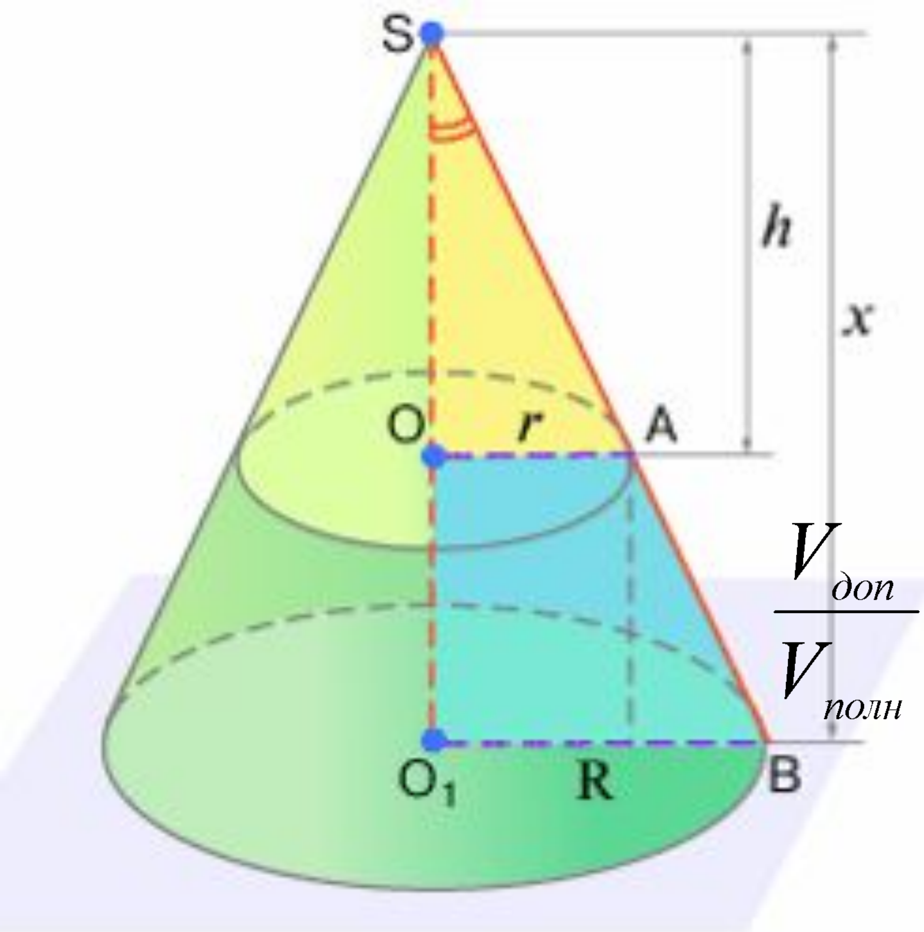


$$\Delta SO_1B \sim \Delta AKB$$

$$\frac{x}{R} = \frac{H}{R-r}$$

$$x = H\frac{R}{R-r}$$

Доказательство:



$$\Delta SOA \sim \Delta SO_1B$$

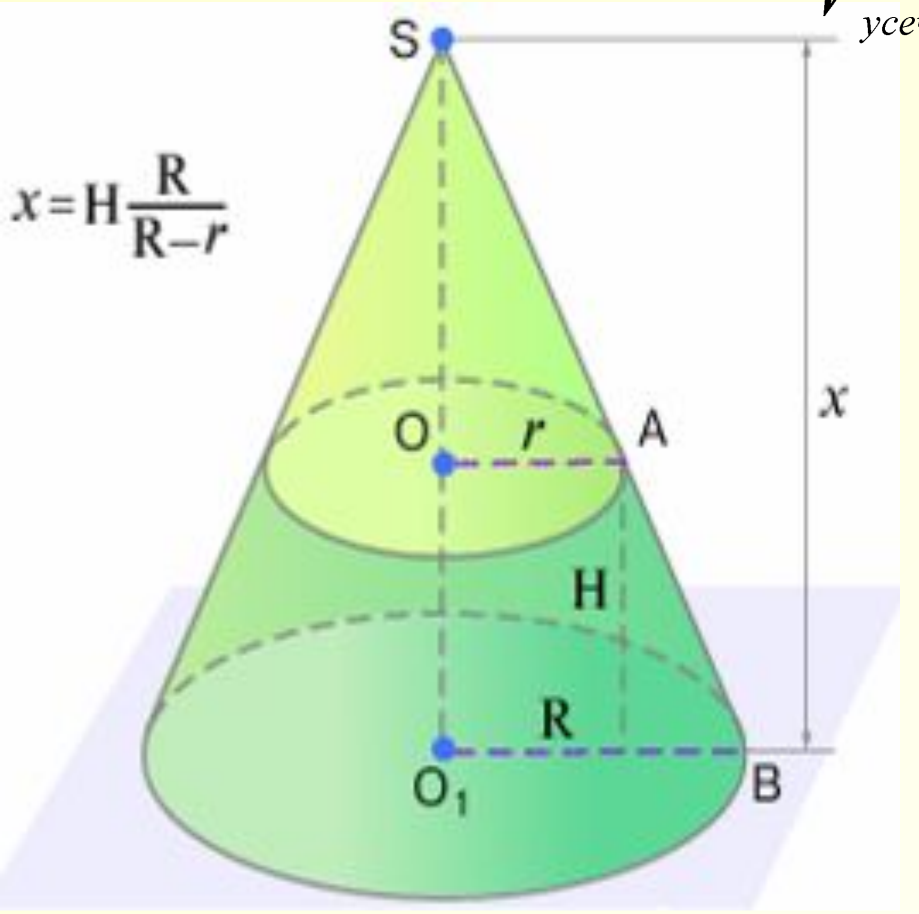
$$\frac{h}{x} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{V_{доп}}{V_{полн}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 x} = \frac{r^2 h}{R^2 x} = \frac{r^2}{R^2}\frac{r}{R} = \frac{r^3}{R^3}$$

Объемы полного и дополнительного конусов относятся как кубы радиусов оснований.

Доказательство:

Вычтем из объема большого конуса объем малого конуса.



$$V_{усеч} = V_{полн} - V_{доп} = V_{полн} - \frac{r^3}{R^3}V_{полн} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 x\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) =$$

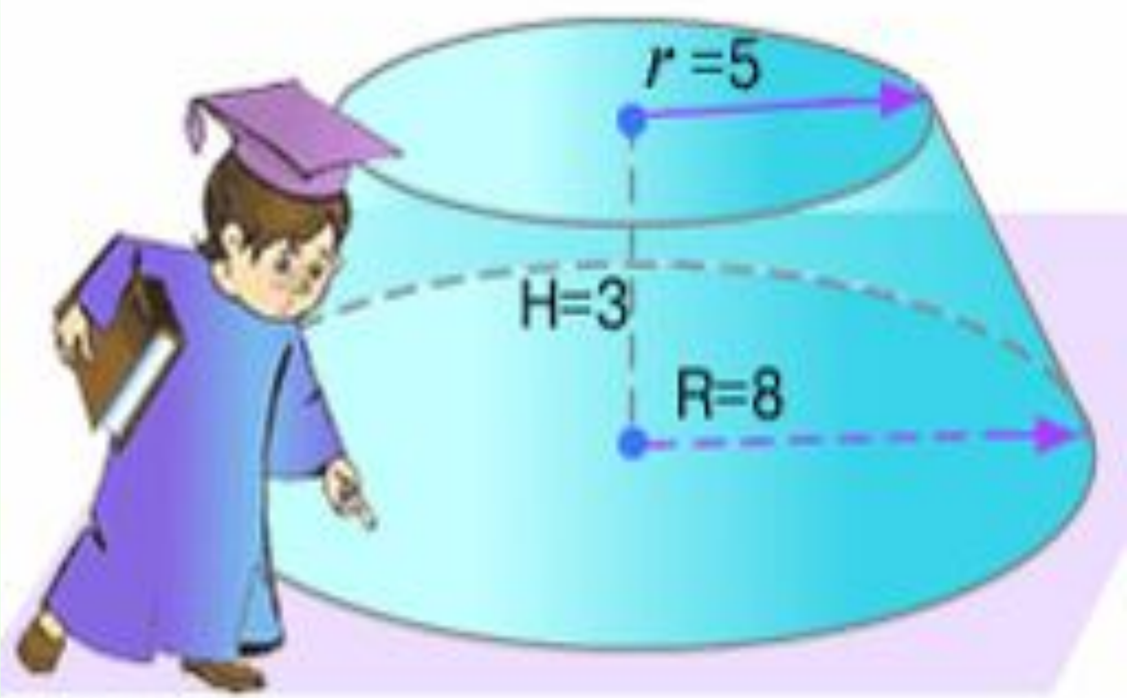
$$= \frac{1}{3}\pi \frac{R^2 HR}{R-r}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H \frac{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)}{R-r} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

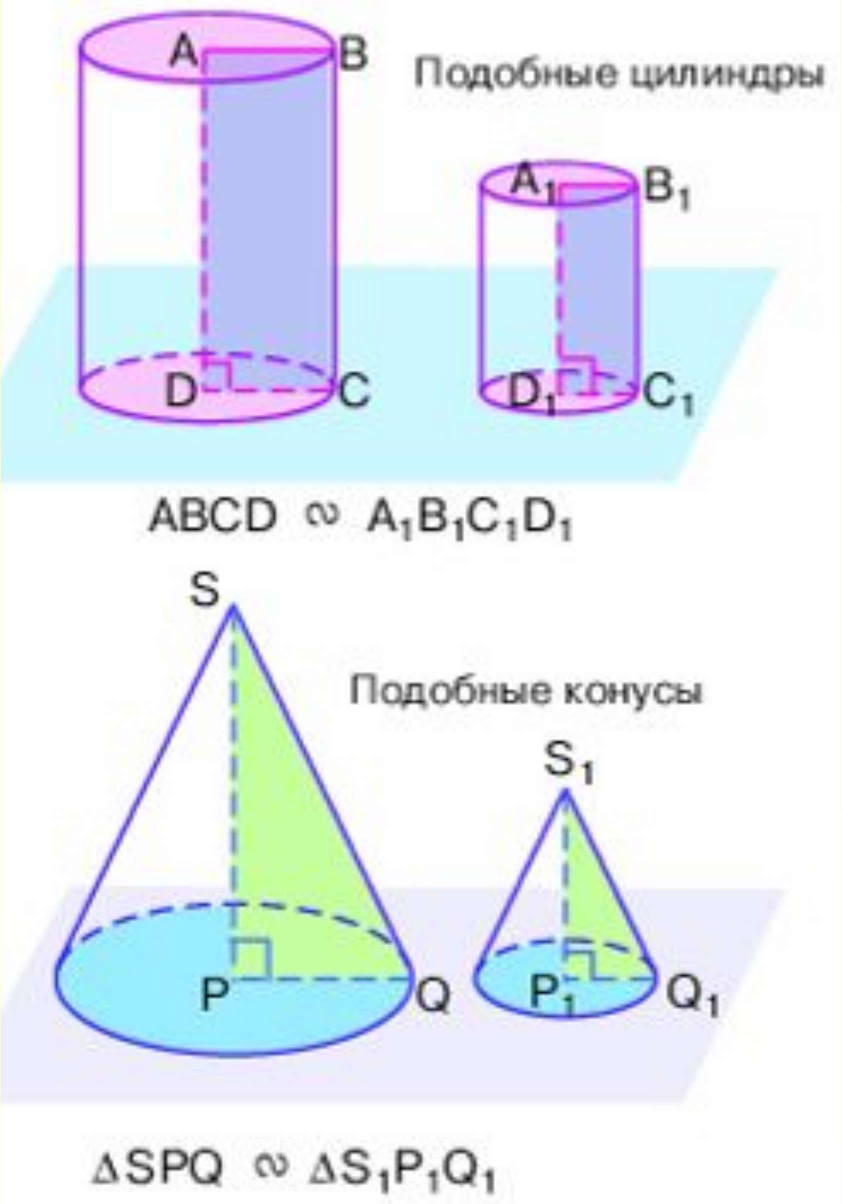
?

Найдите объем усеченного конуса, если известны его высота и радиусы оснований.



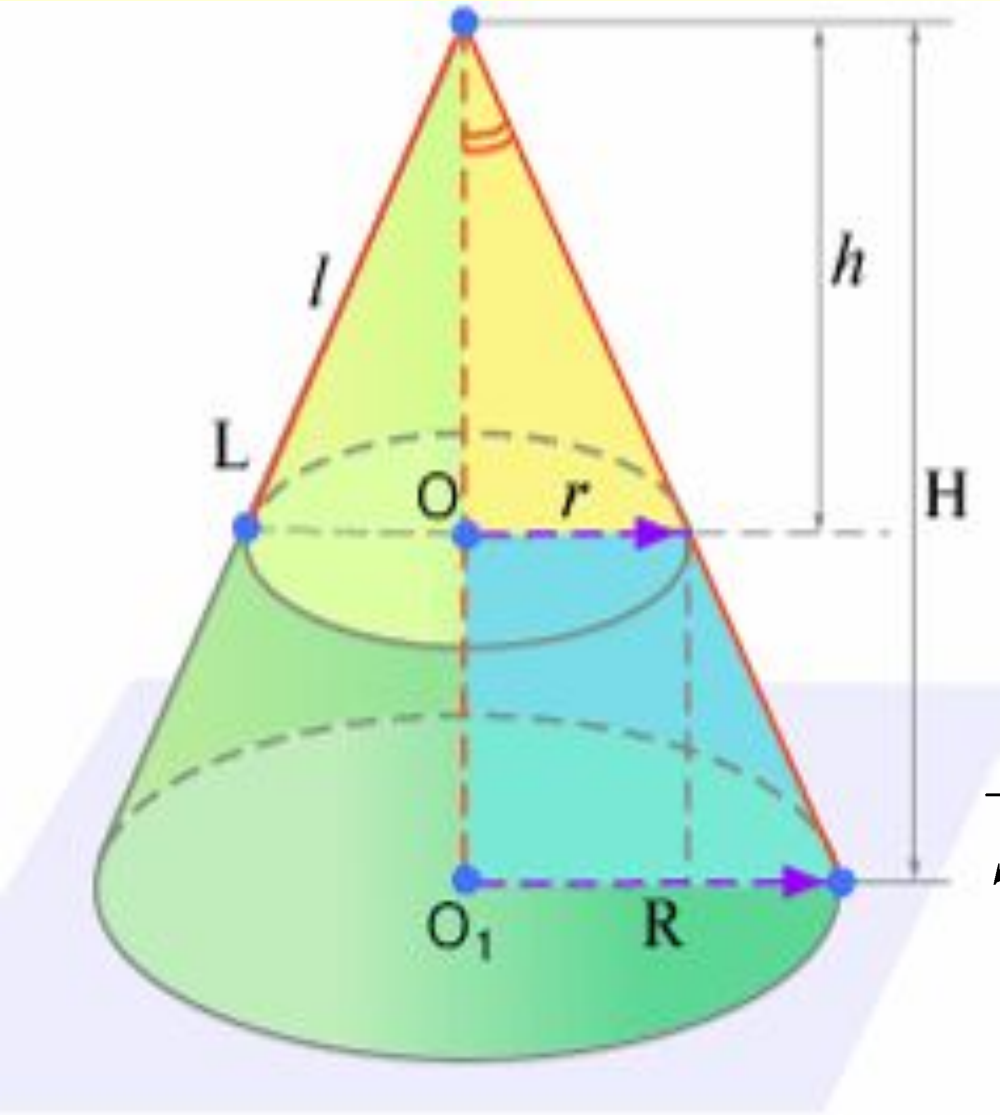
$V_{усеч.} = 149\pi$

Подобные цилиндры и конусы.



- **Подобные цилиндры или конусы можно рассматривать как тела, полученные от вращения подобных прямоугольников или прямоугольных треугольников.**

Сечение, параллельное основанию конуса, отсекает от него малый конус, подобный большому.



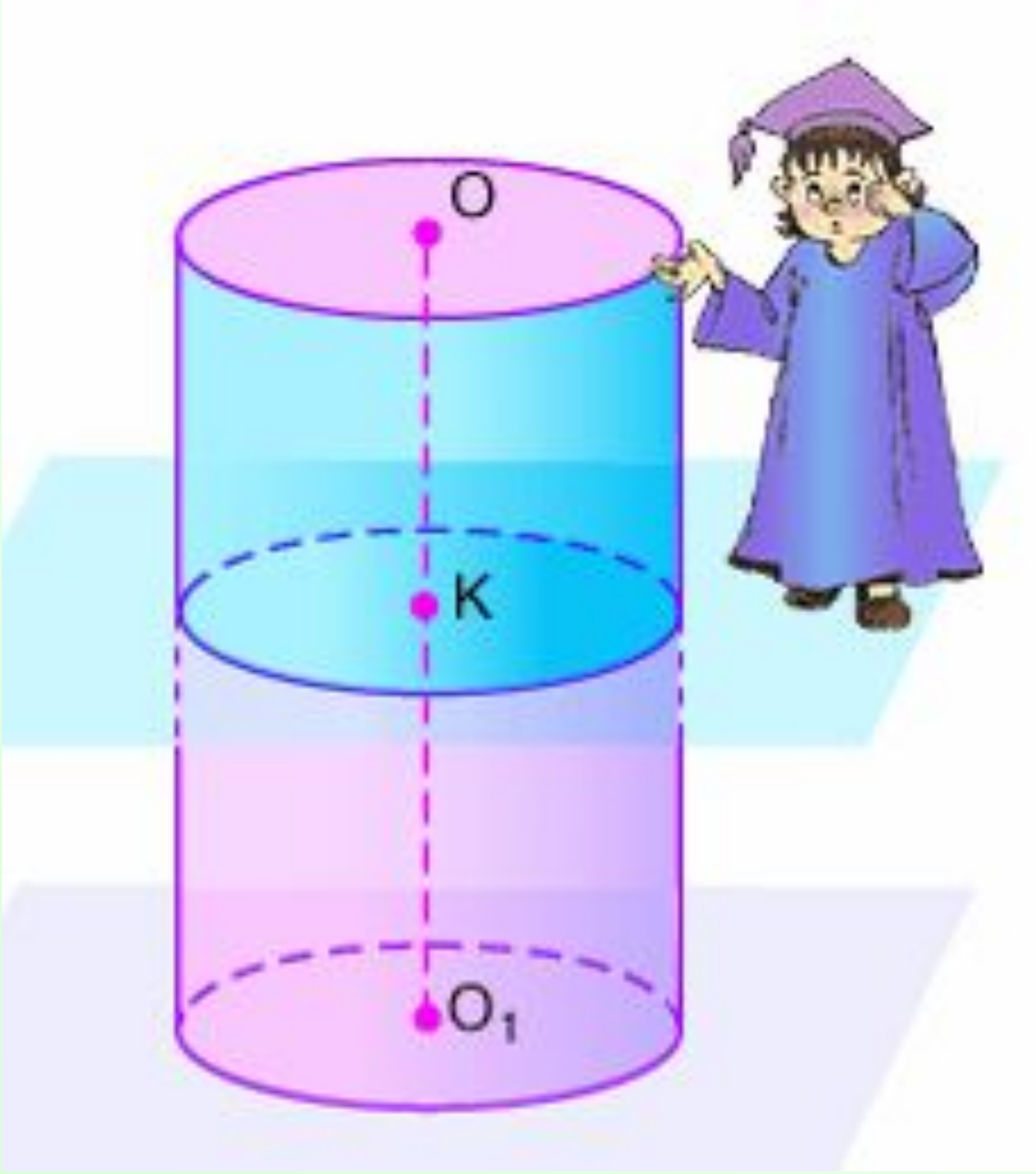
$$\frac{r}{R}=\frac{h}{H}=\frac{l}{L}$$

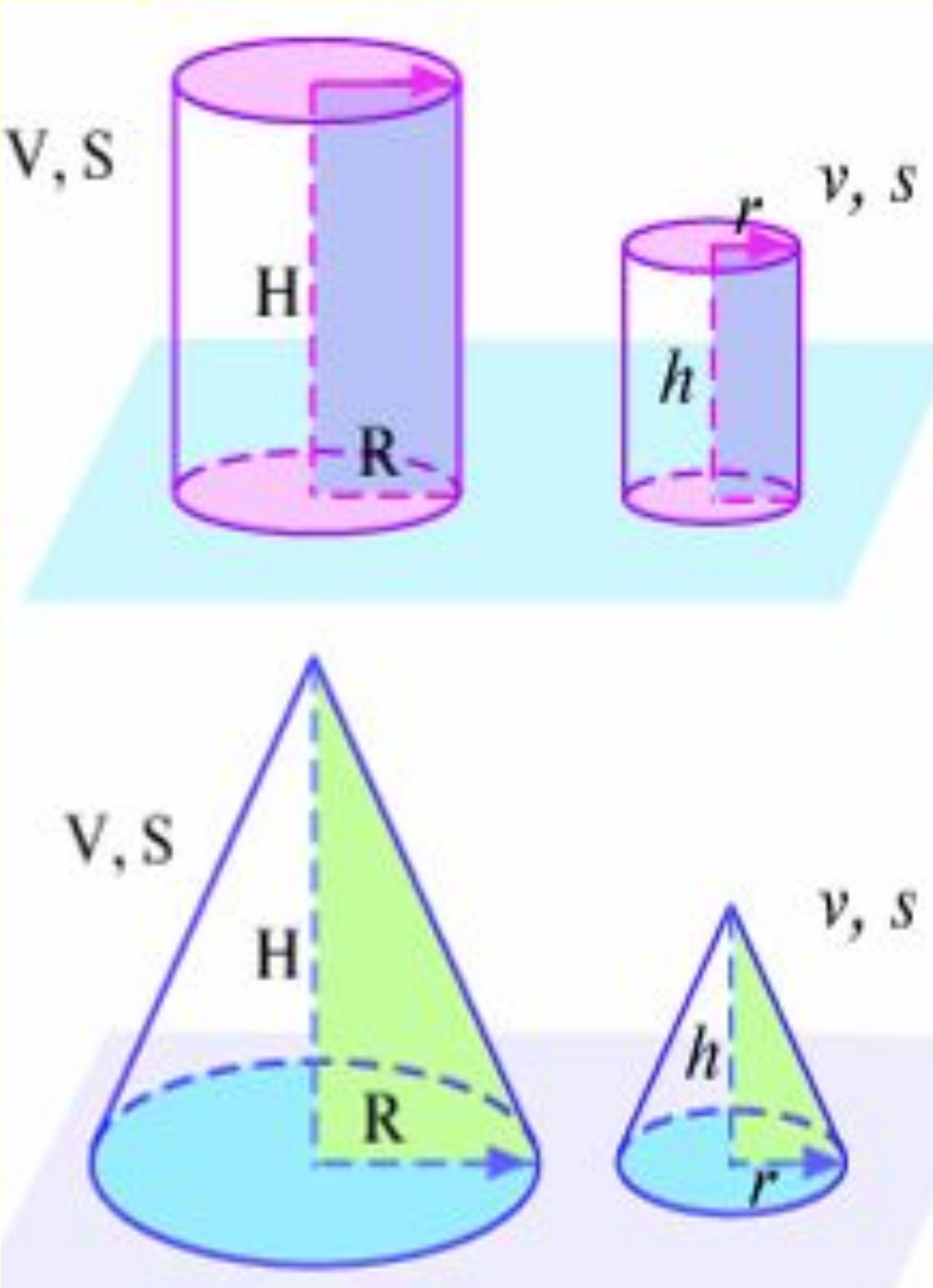
$$\frac{V_{доп.}}{V_{полн.}}=\frac{r^3}{R^3}=\frac{h^3}{H^3}$$

$$\frac{S_{бок.доп}}{S_{бок.полн}}=\frac{2\pi rl}{2\pi RL}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{h^2}{H^2}$$

?

В цилиндре проведено сечение, параллельное основанию. Будет ли малый цилиндр, который отсекается этим сечением, подобен большому?





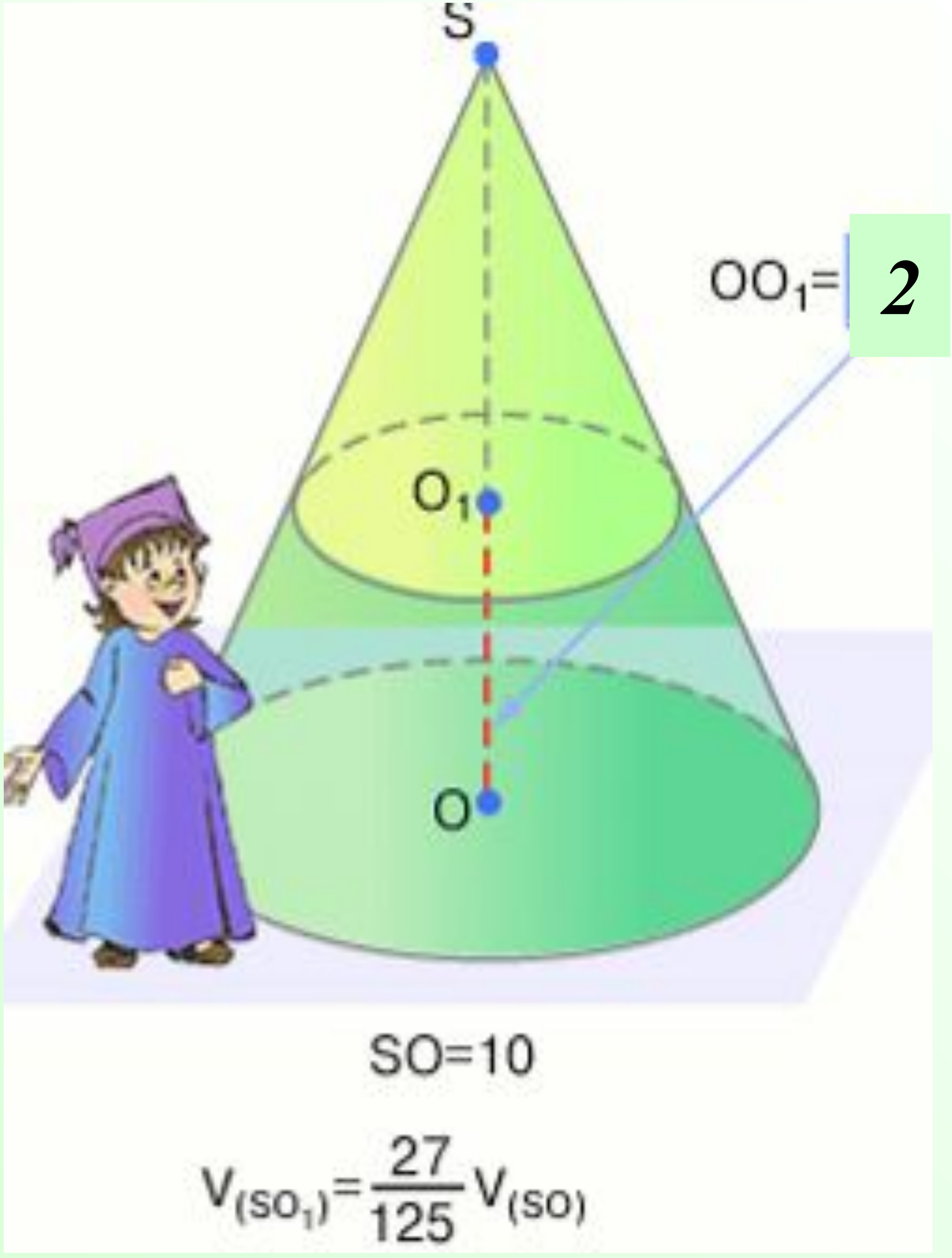
Площади боковых поверхностей подобных цилиндров и конусов относятся как квадраты радиусов или высот, а объемы – как кубы радиусов или высот.

$$\frac{s}{S}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{v}{V}=\frac{r^3}{R^3}=\frac{h^3}{H^3}$$

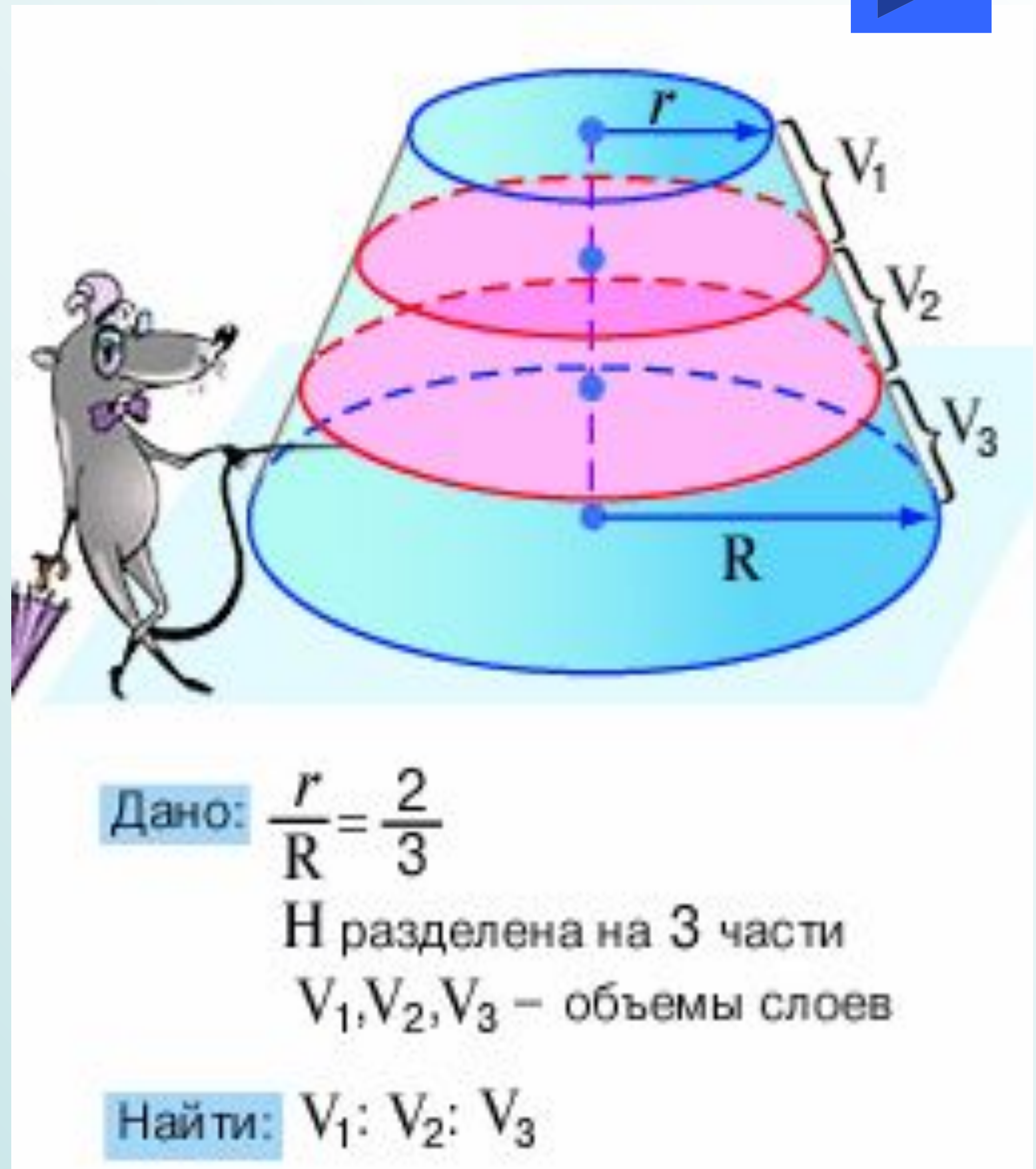
?

В конусе, высота которого известна, проведено сечение, параллельное основанию. Известно также соотношение объемов малого и большого конусов. На каком расстоянии от основания находится сечение?



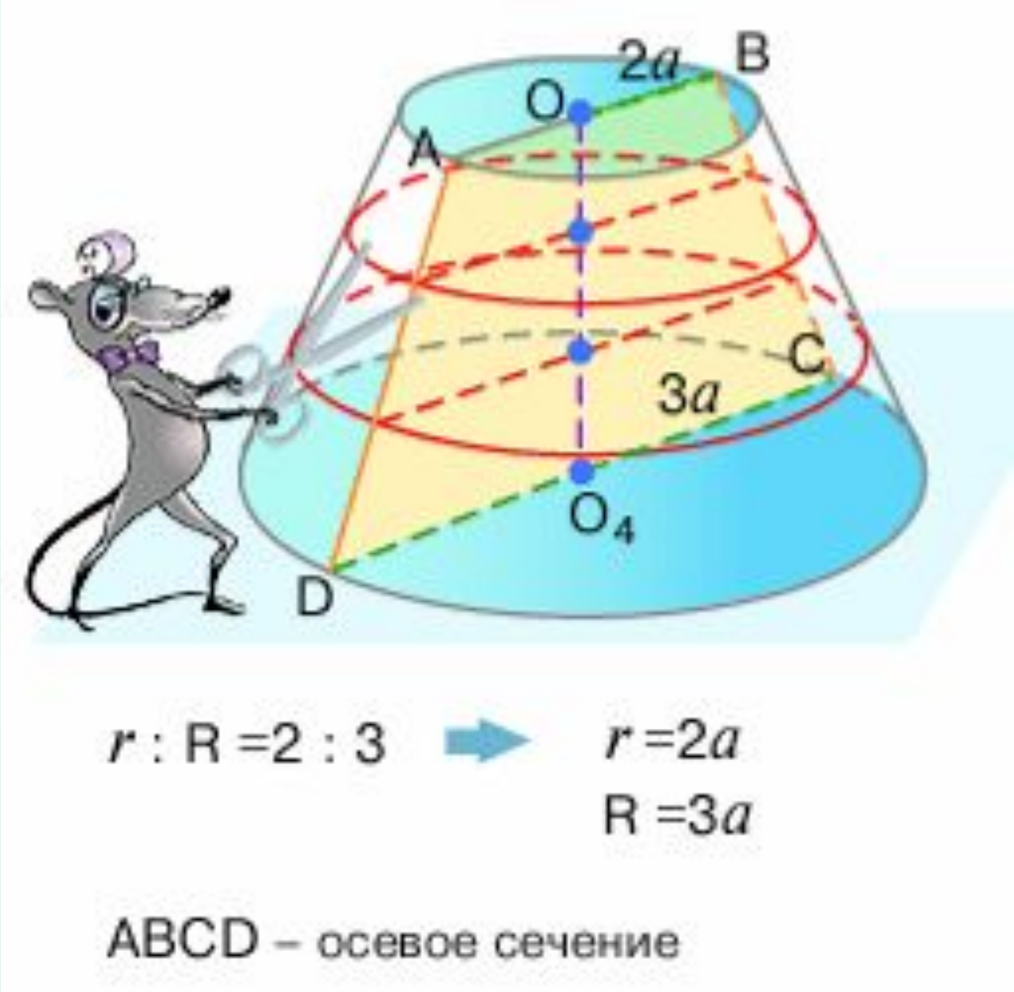
Задача.

Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 2:3. Высота конуса разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основаниям. Найти, в каком отношении разделился объем усеченного конуса.



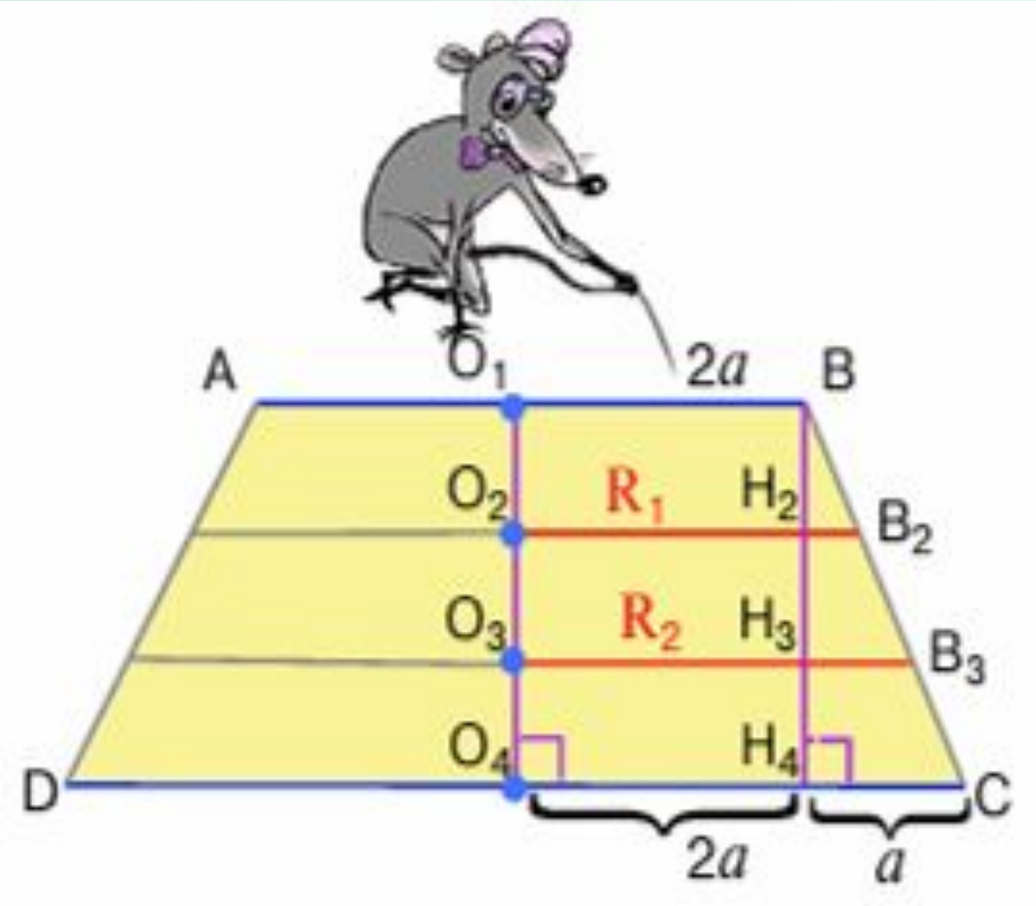
Решение:

Зная, что радиусы оснований конуса относятся как два к трем, обозначим радиусы как 2а и 3а и рассмотрим осевое сечение конуса.



Решение:

1) Используя подобие, найдем радиусы проведенных сечений.



$$CH_4 = 3a - 2a = a$$

$$H_2B_2 = \frac{1}{3}CH_4 = \frac{a}{3}$$

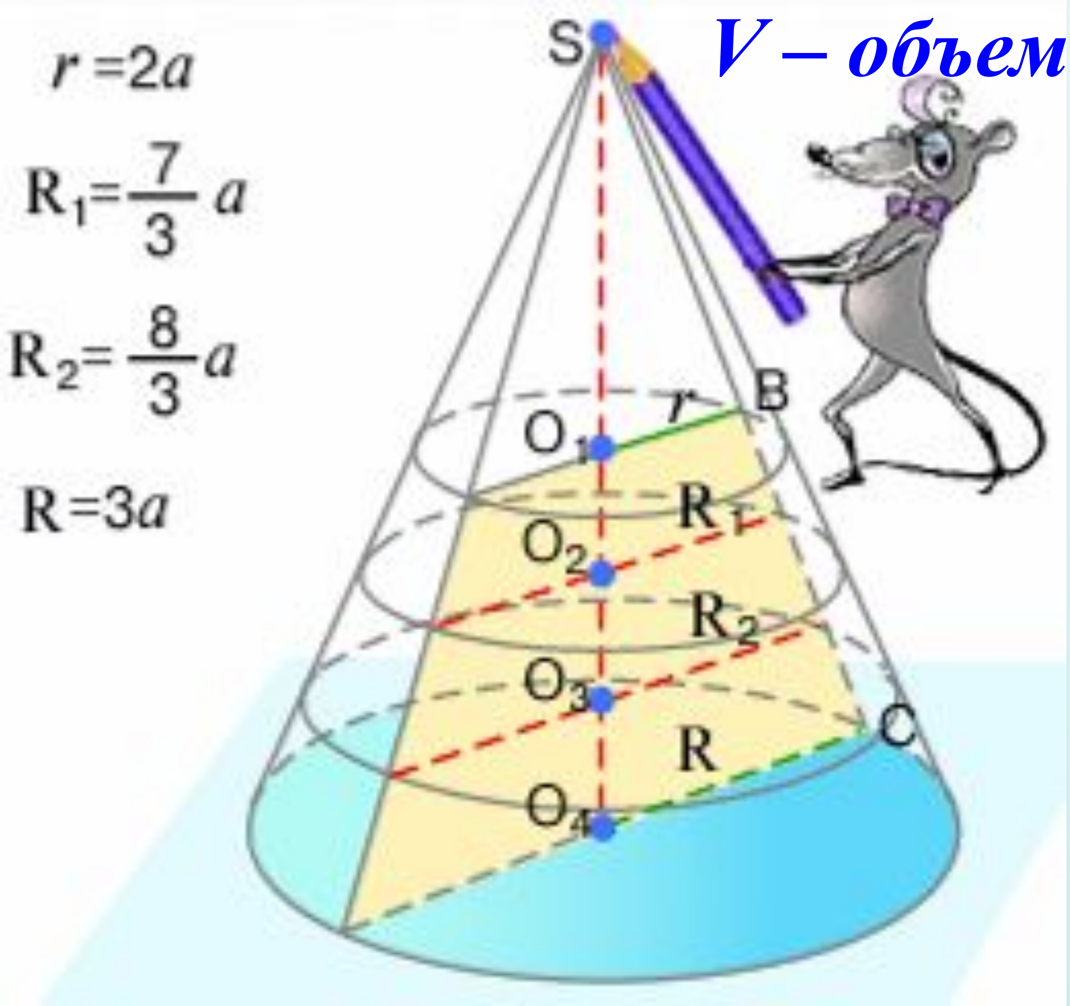
$$H_3B_3 = \frac{2}{3}CH_4 = \frac{2a}{3}$$

$$R_1 = 2a + \frac{a}{3} = \frac{7}{3}a$$

$$R_2 = 2a + \frac{2a}{3} = \frac{8}{3}a$$

Решение:

2) Достроив усеченный конус до полного, найдем, какую часть от полного конуса составляют меньшие конусы.



V – объем наибольшего конуса

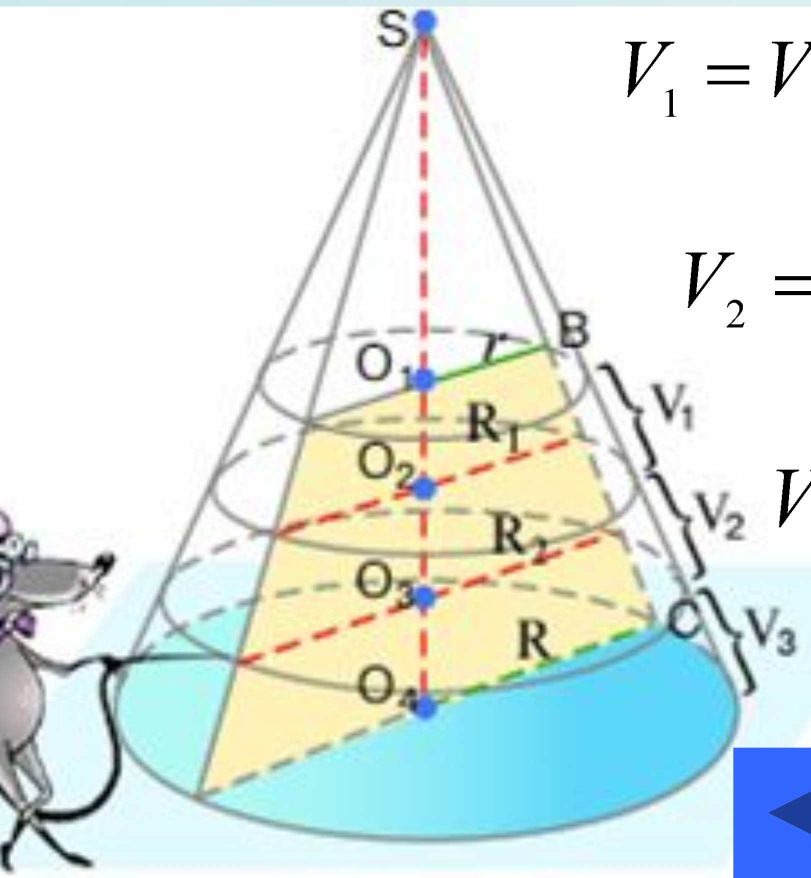
$$\frac{V_{(SO_1)}}{V}=\frac{(2a)^3}{(3a)^3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{6^3}{9^3}$$

$$\frac{V_{(SO_2)}}{V}=\frac{\left(\frac{7}{3}a\right)^3}{(3a)^3}=\frac{7^3}{9^3}$$

$$\frac{V_{(SO_3)}}{V}=\frac{\left(\frac{8}{3}a\right)^3}{(3a)^3}=\frac{8^3}{9^3}$$

Решение:

3) Определим, какую часть от объема полного конуса составляют усеченные конусы, расположенные между соседними сечениями и найдем отношение объемов этих конусов.



$$V_1 = V_{(SO_2)} - V_{(SO_1)} = \frac{7^3 - 6^3}{9^3}V = \frac{127}{9^3}V$$

$$V_2 = V_{(SO_3)} - V_{(SO_2)} = \frac{8^3 - 7^3}{9^3}V = \frac{169}{9^3}V$$

$$V_3 = V - V_{(SO_3)} = \frac{9^3 - 8^3}{9^3}V = \frac{217}{9^3}V$$

Ответ:

$V_1 : V_2 : V_3 = 127 : 168 : 217$