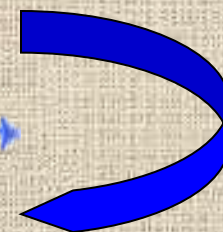
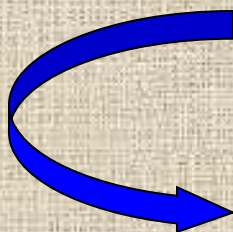
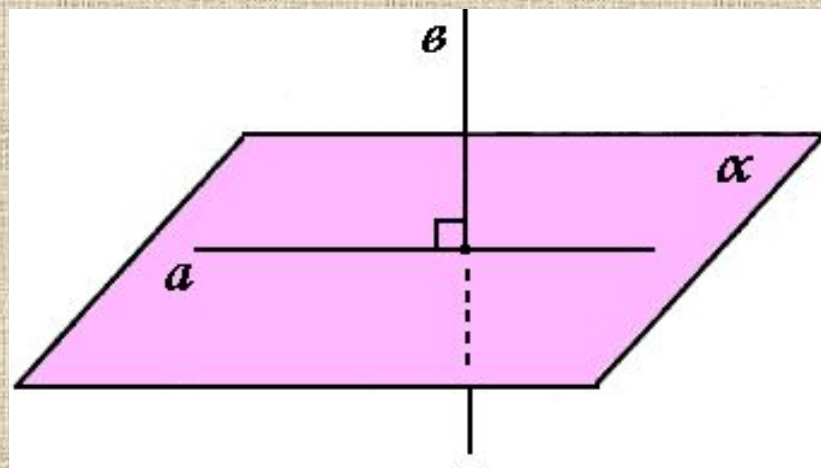


ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ



УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО
ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 10 КЛАССА

ВЫПОЛНИЛА

УЧЕНИЦА 10'Б' КЛАССА

ГИМНАЗИИ №4



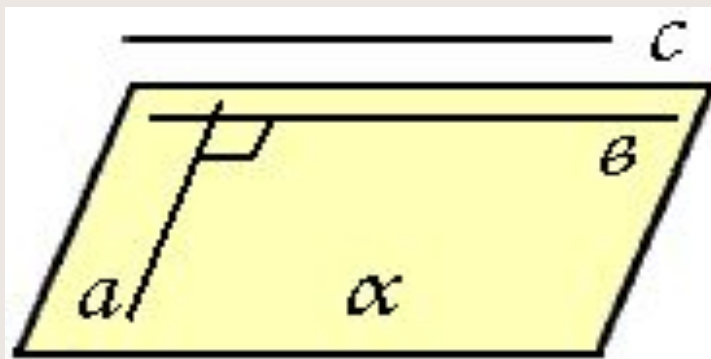
ИНШИНА МАША

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

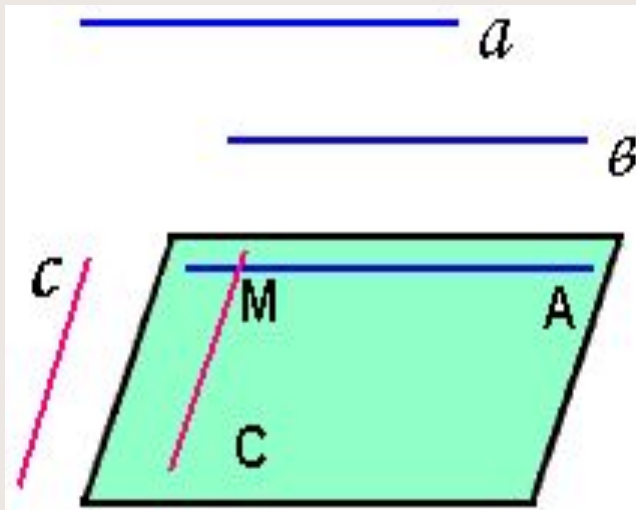
Две прямые в пространстве называются взаимно перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

Перпендикулярные прямые могут пересекаться (**а** и **в**) и скрещиваться (**а** и **с**)



ЛЕММА О ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ К ТРЕТЬЕЙ ПРЯМОЙ

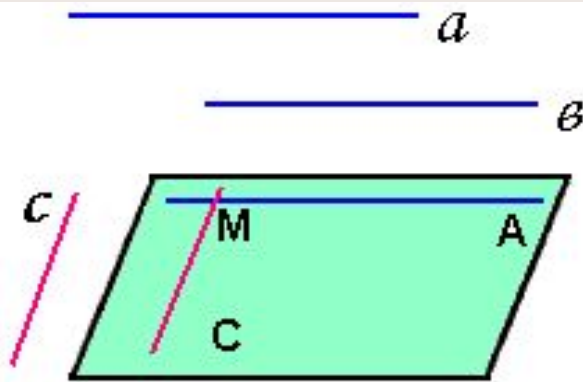
Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой



Дано: $a \parallel b$, $a \perp c$

Доказать: $b \perp c$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

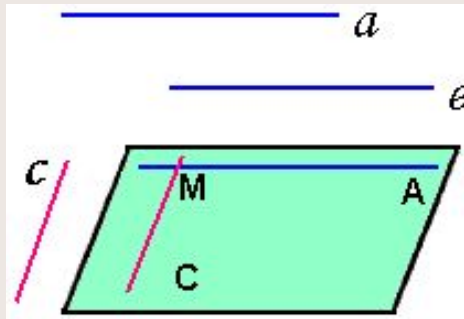


1) Через произвольную точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые MA и MC , параллельные соответственно прямым a и c . Так как $a \perp c$, то $\angle AMC = 90^\circ$

2) По условию $b \parallel a$, а по построению $a \parallel MA$, потому $b \parallel MA$.
Итак,

прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC ,
угол между которыми равен 90° . Это означает, что угол между
прямыми b и c также равен 90° .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



1) $MA \parallel a, a \parallel b \Rightarrow MA \parallel b$

2) $a \perp c, MC \parallel C \Rightarrow MA \perp MC$

3) $MA \perp MC, MA \parallel b, MC \parallel C \Rightarrow b \perp C.$

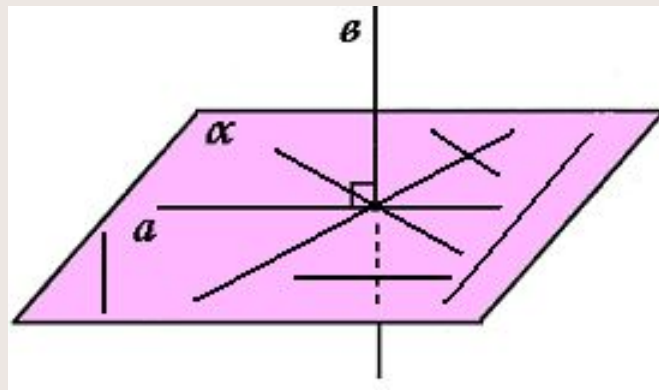
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ К ПЛОСКОСТИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости

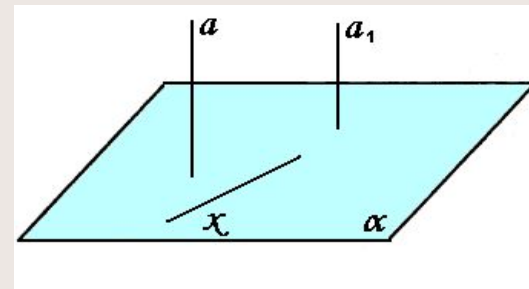
Перпендикулярность прямой и плоскости обозначается: $a \perp \alpha$.

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то она пересекает её.

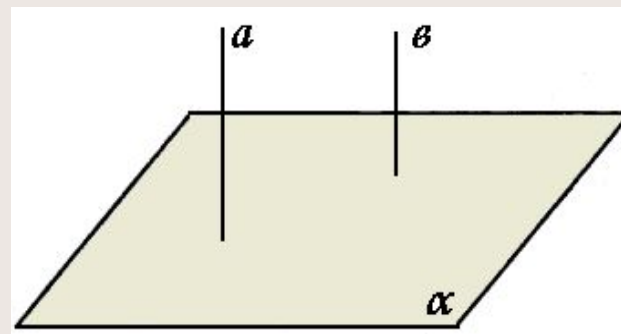


ТЕОРЕМЫ, УСТАНОВЛИВАЮЩИЕ СВЯЗЬ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬЮ ПРЯМЫХ И ИХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬЮ К ПЛОСКОСТИ

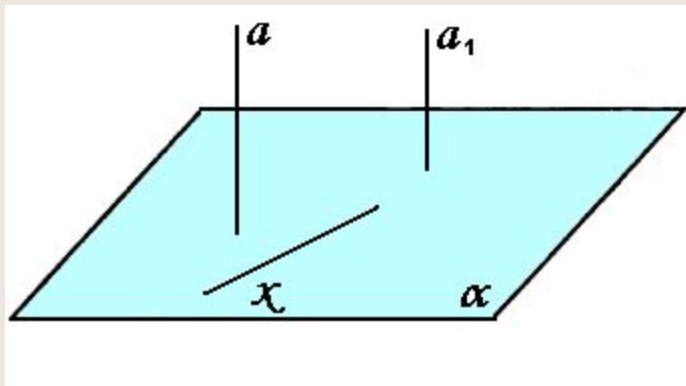
Теорема 1: Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости



Теорема 2: Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны между собой.



ТЕОРЕМА О ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА К ПЛОСКОСТИ



Дано: $a \perp \alpha$, $a \parallel a_1$

Доказать: $a_1 \perp$

α

Доказательство:

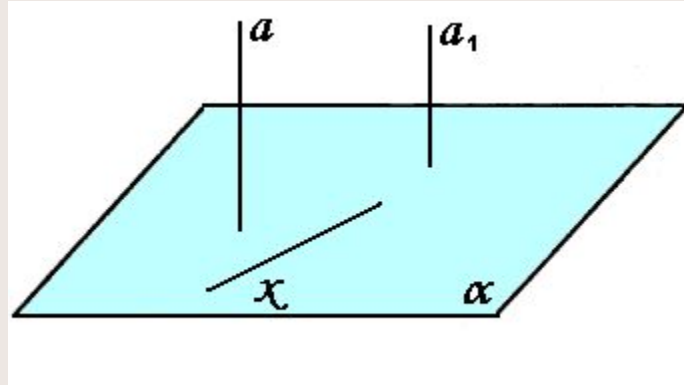
Проведем какую-нибудь прямую X в плоскости α . Так как $a \perp \alpha$, то

$a \perp X$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к

третьей $a_1 \perp X$. Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой

прямой, лежащей в плоскости α , т.е. $a_1 \perp \alpha$

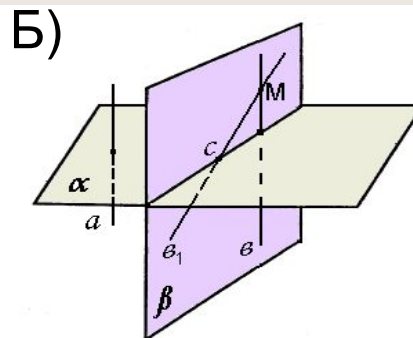
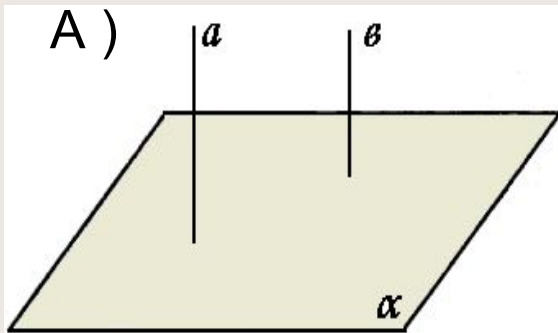
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



1) $a \perp \alpha, x \subset \alpha \Rightarrow a \perp x$

2) $a \parallel a_1, a \perp x \Rightarrow a_1 \perp x \Rightarrow a_1 \perp \alpha$, т.к. x — произвольная прямая плоскости α .

ТЕОРЕМА О ДВУХ ПРЯМЫХ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ К ПЛОСКОСТИ



Дано: $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$

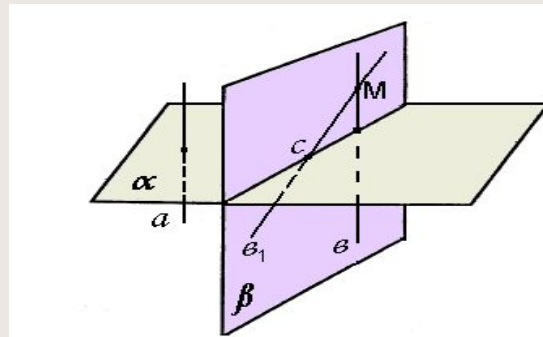
Доказать: $a \parallel b$

Доказательство:

1) Через какую-нибудь точку M прямой b проведём прямую b_1 , параллельную прямой a . По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$. Докажем, что b_1 совпадает с прямой b . Тем самым будет доказано, что $a \parallel b$.

2) Допустим, что прямые b и b_1 не совпадают. Тогда в плоскости β , содержащей прямые b и b_1 , через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c , по которой пересекаются плоскости α и β . Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



1) Пусть $v \perp c$. Проведем $v_1 \parallel a$ ($M \in v, M \in v_1$)

2) $v \perp \alpha, c \subset \alpha \Rightarrow v \perp c$

3) $a \perp \alpha, c \subset \alpha \Rightarrow a \perp c$

4) $a \perp c, v_1 \parallel a \Rightarrow v_1 \perp c$

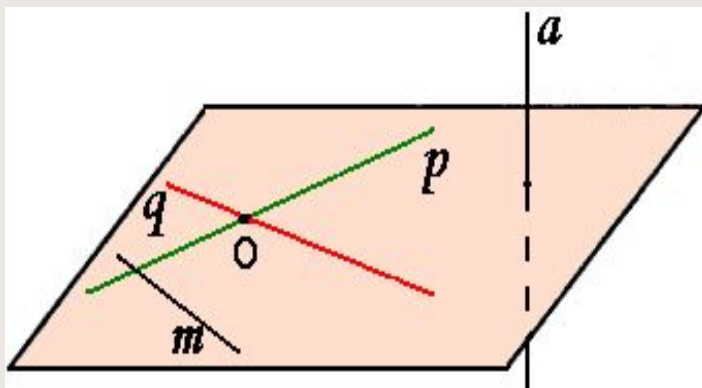
5) $v \perp c, v_1 \perp c, M \in v, M \in v_1 \Rightarrow v \equiv v_1$

6) $v_1 \parallel a, v \equiv v_1 \Rightarrow a \parallel v$

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

ТЕОРЕМА:

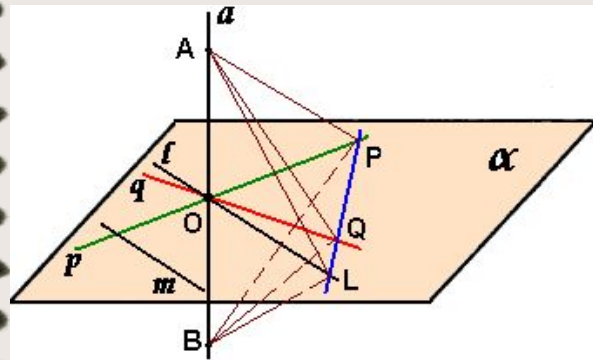
Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости



Дано: $a \perp p$, $a \perp q$, $p \subset \alpha$,
 $q \subset \alpha$, $p \cap q = O$

Доказать: $a \perp \alpha$

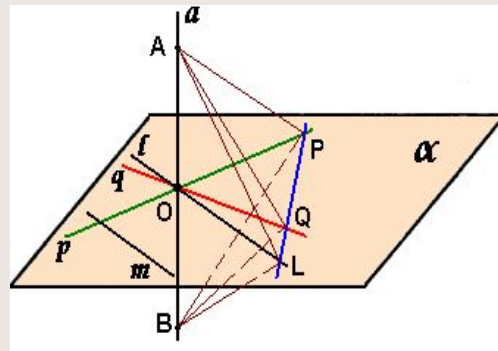
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:



Докажем, что прямая \mathbf{a} перпендикулярна к произвольной прямой m плоскости α . Рассмотрим случай, когда прямая m проходит через точку O . Проведем через точку O прямую l параллельную прямой m . Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы точка O была серединой отрезка AB , и проведем в плоскости α прямую, пересекающую прямые p , q и l соответственно в точках P, Q и L .

Так как прямые p и q - серединные перпендикуляры к отрезку AB , то $AP=BP$ и $AQ=BQ$. Следовательно, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ по трём сторонам. Поэтому $\angle APQ = \angle BPQ$. Рассмотрим $\triangle APL$ и $\triangle BPL$. Они равны по двум сторонам и углу между ними ($AP=BP, PL$ - общая сторона, $\angle APL = \angle BPL$), поэтому $AL=BL$. Но это означает, что треугольник ABL равнобедренный и его медиана LO является высотой, т.е. $l \perp a$. Так как и $l \parallel m$, то $m \perp a$ (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей). Итак, прямая a перпендикулярна к любой прямой m плоскости α , т.е. $\mathbf{a} \perp \alpha$.
Рассмотрим теперь случай, когда прямая m не проходит через точку O . Проведем через точку O прямую a_1 , параллельную прямой a . По упомянутой лемме $a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$, поэтому по доказанному в первом случае $a_1 \perp \alpha$. Отсюда (по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости) следует, что $\mathbf{a} \perp \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Этап 1:

1) $AO = BO$

2) $AP = BP, AQ = BQ$

3) $\triangle APQ = \triangle BPQ \Rightarrow \angle APQ = \angle BPQ$

4) $\triangle APL = \triangle BPL \Rightarrow AL = BL$

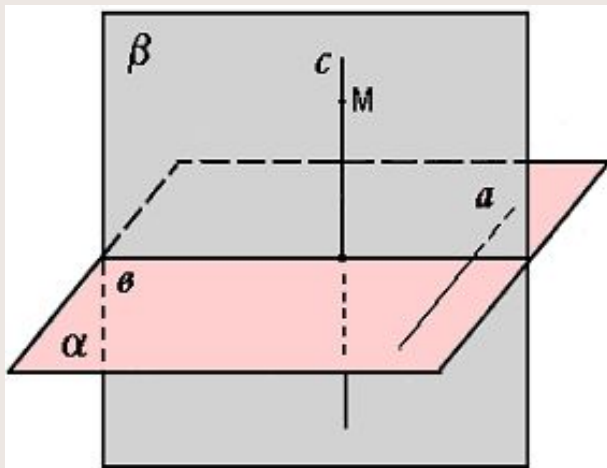
5) Медиана $OL \triangle ABL$ – высота, т.е. $AB \perp OL$ или $a \perp OL$

Этап 2: m – произвольная прямая плоскости α , $OL \parallel m$. Т.к. $a \perp OL$, то $a \perp m \Rightarrow a \perp \alpha$.

ТЕОРЕМА О ПРЯМОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ПЛОСКОСТИ

ТЕОРЕМА:

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна

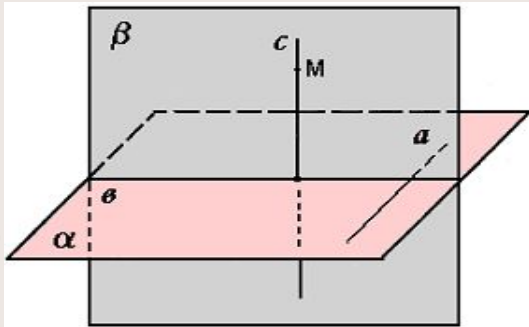


Дано: M, α

Доказать: 1) через точку M проходит прямая, перпендикулярная α

• 2) такая прямая только одна

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

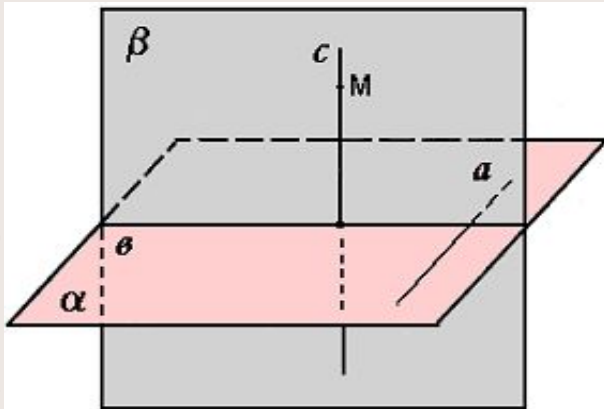


1) Проведем в плоскости α произвольную прямую a и рассмотрим плоскость β , проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a . Обозначим буквой b прямую, по которой пересекаются плоскости α и β .

В плоскости β через точку M проведем прямую c , перпендикулярную к прямой b . Прямая c и есть искомая прямая. В самом деле, она перпендикулярна к плоскости α , так как перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости ($c \perp b$, $c \perp a$, т.к. $\beta \perp a$).

2) Предположим, что через точку M проходит ещё одна прямая (обозначим её через c_1), перпендикулярная к плоскости α . Тогда $c \parallel c_1$, что невозможно, так как прямые c и c_1 пересекаются в точке M . Таким образом, через точку M проходит только одна прямая, перпендикулярная к плоскости α .

ПЛАН ПОСТРОЕНИЯ



1) $a: a \subset \alpha$

2) $\beta: M \in \beta, \beta \perp \alpha$

3) $\alpha \cap \beta = \mathbf{B}$

4) $c: M \in c, c \perp B$

Доказательство:

1) $M \in c$

2) $c \perp B$ по построению

3) $c \perp a$, т.к. $\beta \perp \alpha$

4) c – единственная прямая

||| =>

$c \perp \alpha$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости)

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

НА РИСУНКЕ:

$АН$ – перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости

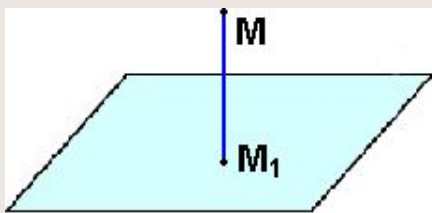
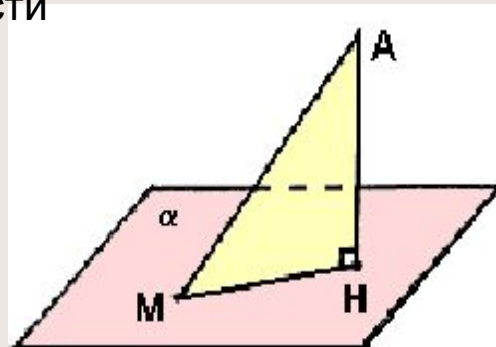
α

H – основание перпендикуляра

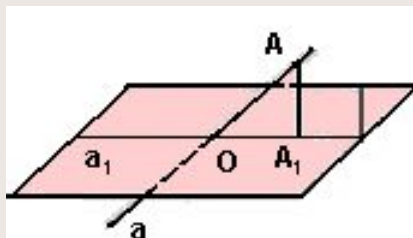
AM – наклонная, проведенная из точки A к плоскости α

M – основание наклонной

HM – проекция наклонной на плоскость α

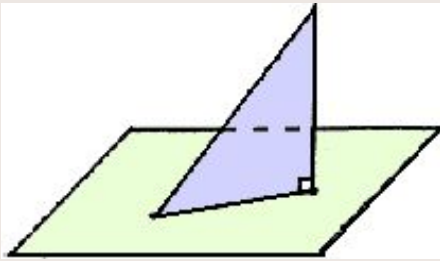


Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости

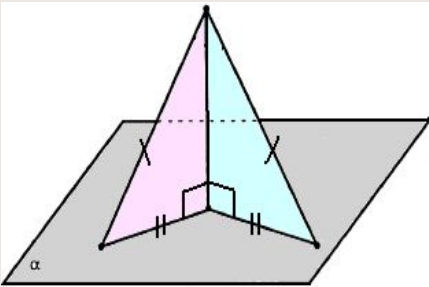


Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая

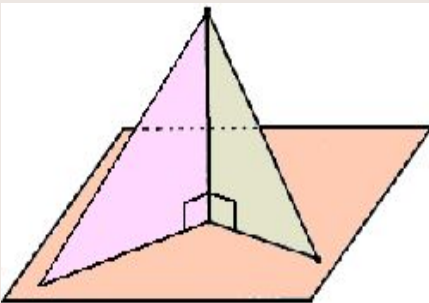
СВОЙСТВА НАКЛОННЫХ



1° Перпендикуляр всегда короче любой наклонной, проведенной к плоскости из той же точки



2° У равных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки, проекции равны

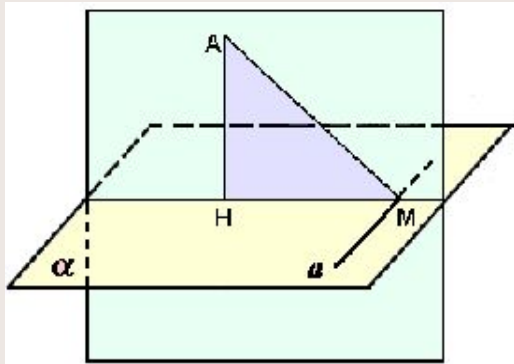


3° Из двух наклонных, проведенных из одной точки, больше та, у которой проекция больше

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

ТЕОРЕМА:

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной



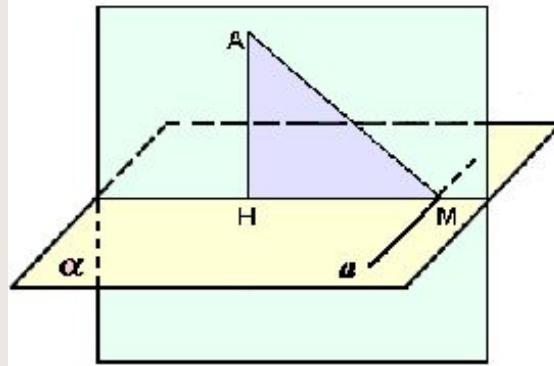
Дано: $M \in a$, AN -перпендикуляр, AM - наклонная, NM - проекция наклонной, $a \perp NM$

Доказать: $a \perp AM$

Доказательство:

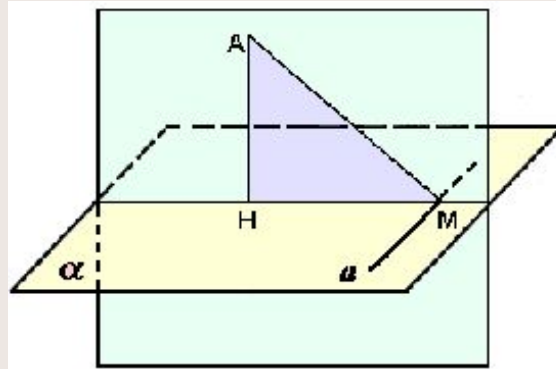


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:



Прямая a перпендикулярна к плоскости AMN , т.к. она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AN и MN ($a \perp AN$ по условию и $a \perp MN$, т.к. $MN \perp \alpha$). Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMN , в частности $a \perp AM$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



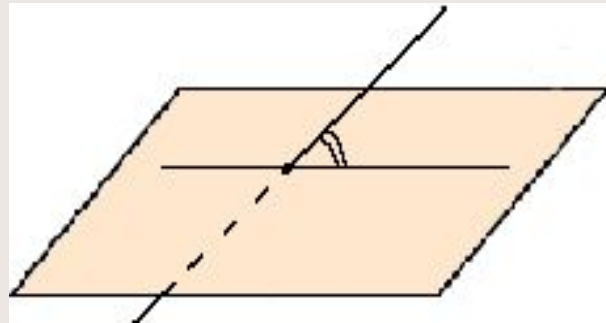
1) $AH \perp \alpha$, $a \subset \alpha \Rightarrow a \perp AH$

$a \perp HM$ (по условию)

$\parallel \parallel \Rightarrow a \perp (AHM)$

2) $a \perp (AHM)$, $AM \subset (AHM) \Rightarrow a \perp AM$

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

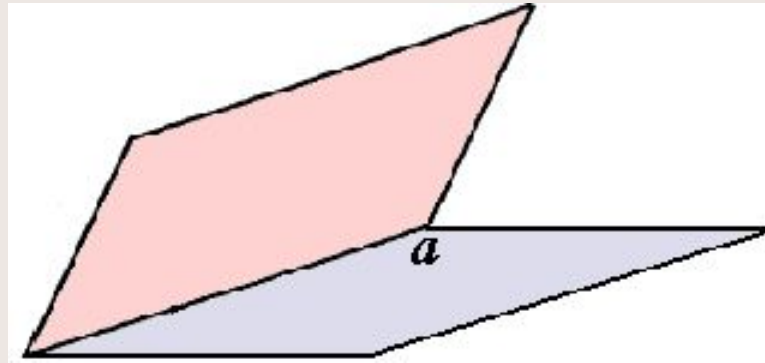
Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной её, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость

$$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$\alpha = 0^\circ$, если прямая параллельна плоскости

$\alpha = 90^\circ$, если прямая перпендикулярна плоскости

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

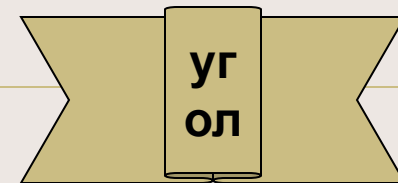
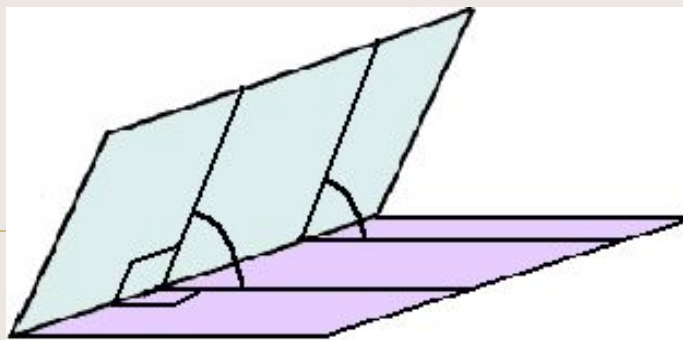
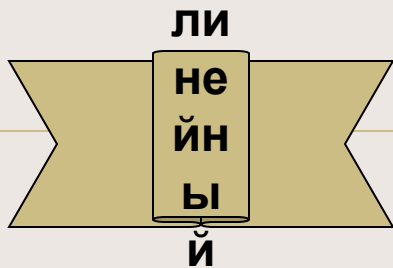


ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , не принадлежащим одной плоскости

Двугранный угол может быть острым, тупым и прямым





ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Линейный угол -- угол, стороны которого являются лучами, перпендикулярными к ребру двугранного угла, а вершина лежит на его ребре



Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

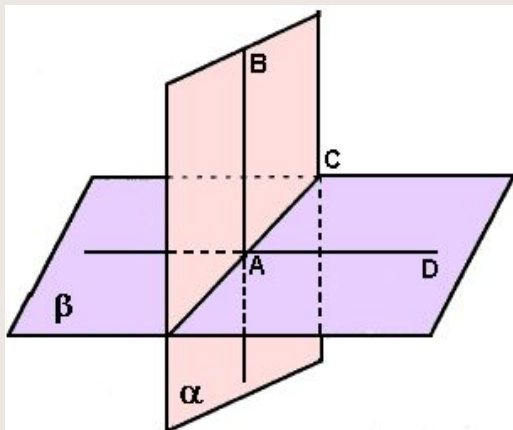
Все линейные углы двугранного угла равны



ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

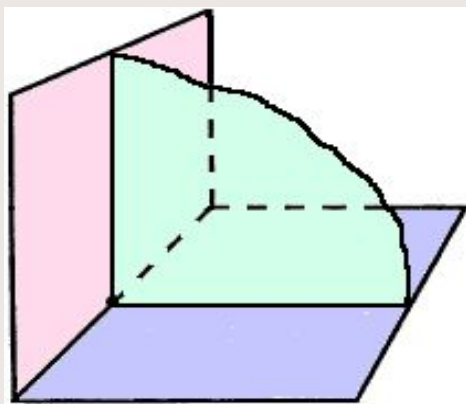
Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ



ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ :

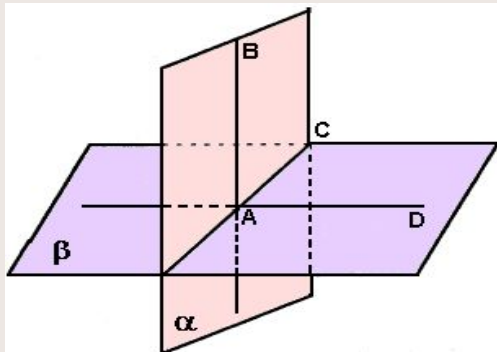
Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны



СЛЕДСТВИЕ ИЗ ПРИЗНАКА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ:

Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ



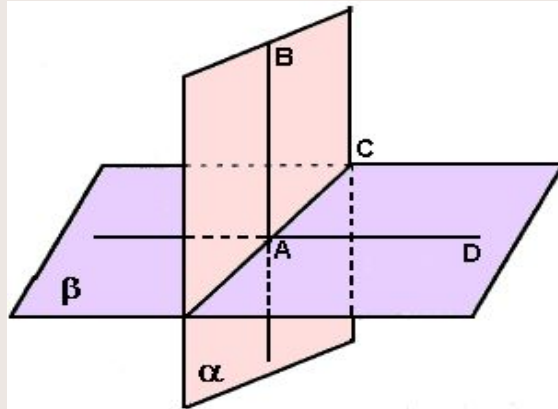
Дано: $AB \subset \alpha$, $AB \perp \beta$

Доказать: $\alpha \perp \beta$

Доказательство:

- 1) Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой AC , причем $AB \perp AC$, так как по условию $AB \perp \beta$, т.е. прямая AB перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β .
- 2) Проведём в плоскости β прямую AD , перпендикулярную к прямой AC . Тогда угол BAD -- линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β . Но $\angle BAD = 90^\circ$ (так как $AB \perp \beta$). Следовательно, угол между плоскостями α и β равен 90° , т.е. $\alpha \perp \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



1) $AB \perp \beta$, $AC \subset \beta \Rightarrow AB \perp AC$ ($\alpha \cap \beta = AC$)

2) $AB \perp \beta$, $AD \subset \beta \Rightarrow AB \perp AD$ ($AD \perp AC$)

3) $\angle(\alpha ; \beta) = \angle BAD = 90^\circ \Rightarrow \alpha \perp \beta$