



**УГОЛ МЕЖДУ**

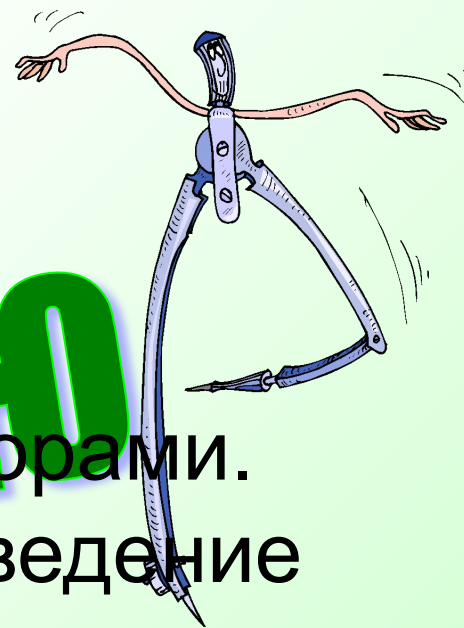
**ПРЯМОЙ И**

**ПЛОСКОСТЬЮ**

Угол между векторами.  
Скалярное произведение  
векторов.

**11 класс.**

[900igr.net](http://900igr.net)



# Повторяем теорию:

- *Как находят координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?*

$$\overrightarrow{AB} \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$$

- *Как находят координаты середины отрезка?*

$$\frac{x_A + x_B}{2}; \quad \frac{y_A + y_B}{2}; \quad \frac{z_A + z_B}{2}$$

- *Как находят длину вектора?*

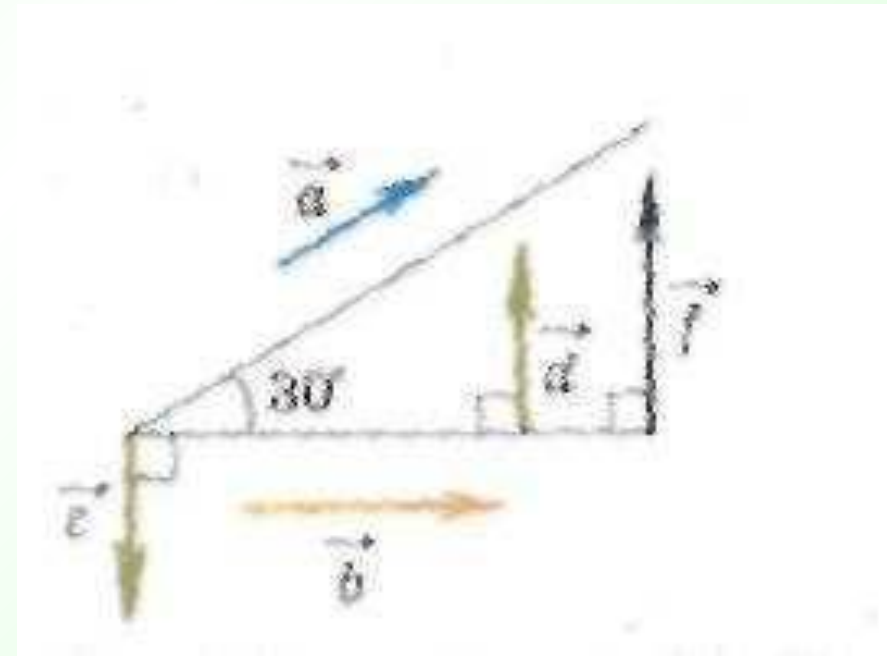
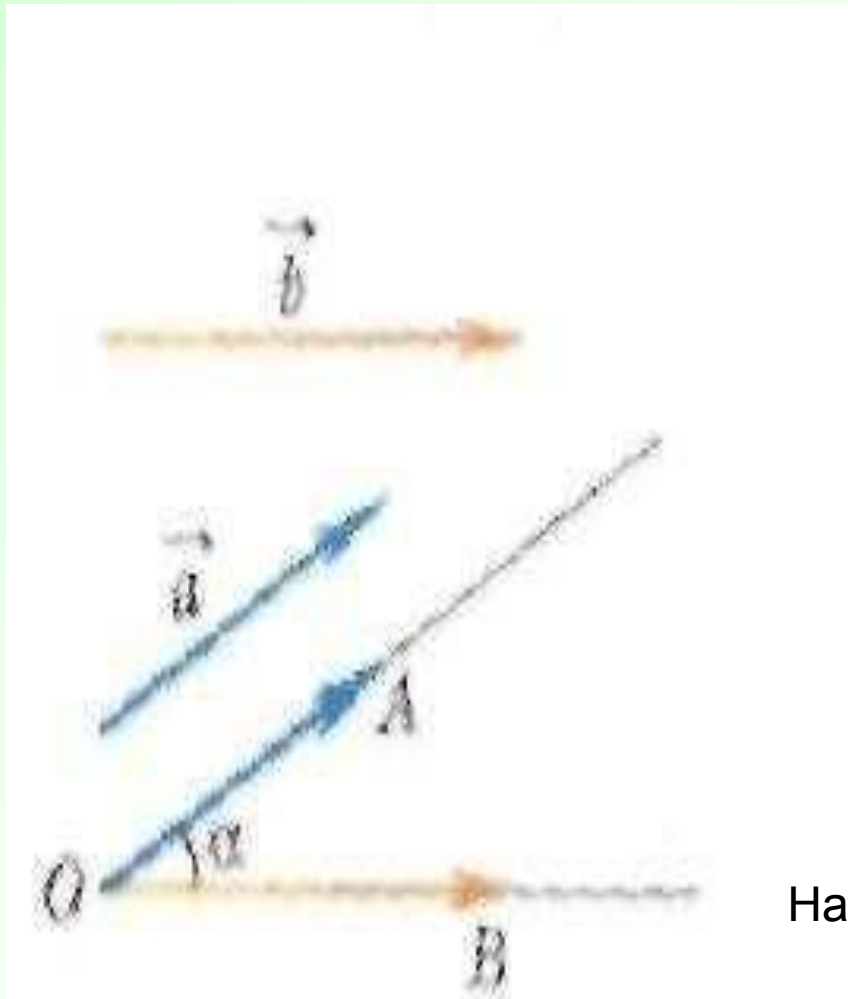
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- *Как находят расстояние между точками?*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- *Как вы понимаете выражение «угол между векторами»?*

# Угол между векторами



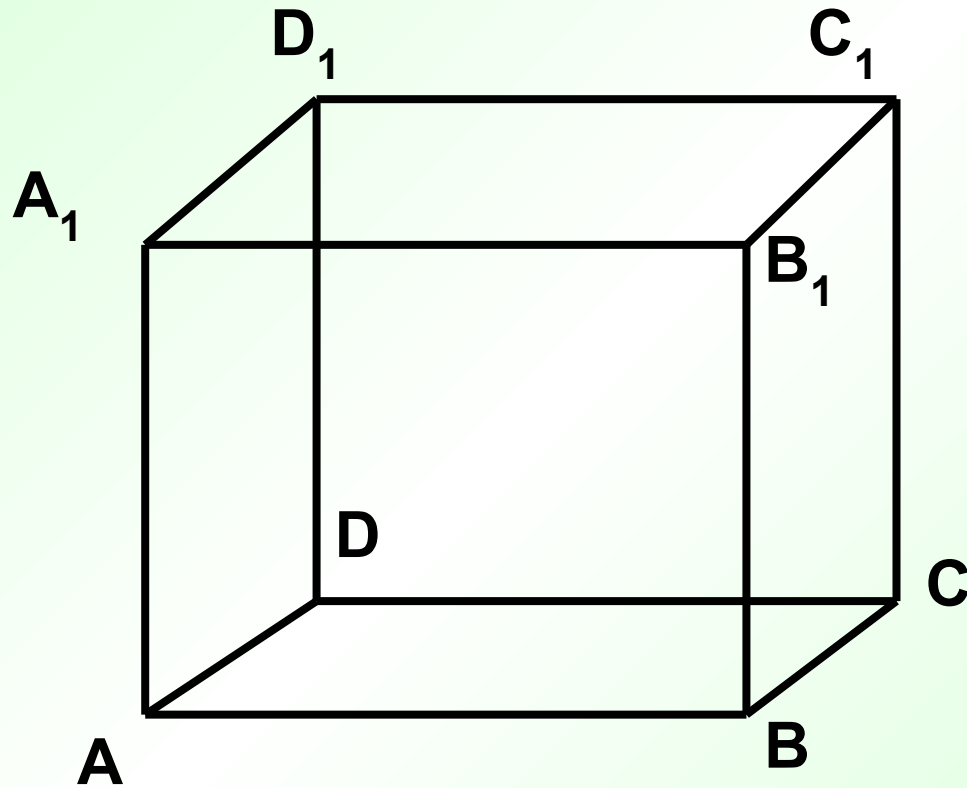
Найдите углы между векторами  $a$  и  $b$ ?  $a$  и  $c$ ?  $a$  и  $d$ ?  $b$  и  $c$ ?  $d$  и  $f$ ?  $d$  и  $c$ ?

Условие коллинеарности векторов:  $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$

- **Какие векторы называются перпендикулярными?**

Условие перпендикулярности векторов:  $x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$

# Задача №441



# Повторяем теорию:

- *Что называется скалярным произведением векторов?*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

- *Чему равно скалярное произведение перпендикулярных векторов?*

**0**

- *Чему равен скалярный квадрат вектора?*

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2$$

- *Свойства скалярного произведения?*

$$\begin{aligned} \vec{a}^2 &\geq 0 & (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} &= \vec{b}\vec{a} & k \cdot (\vec{a}\vec{b}) &= (k\vec{a}) \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

# Задача №444

# Косинус угла между векторами

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

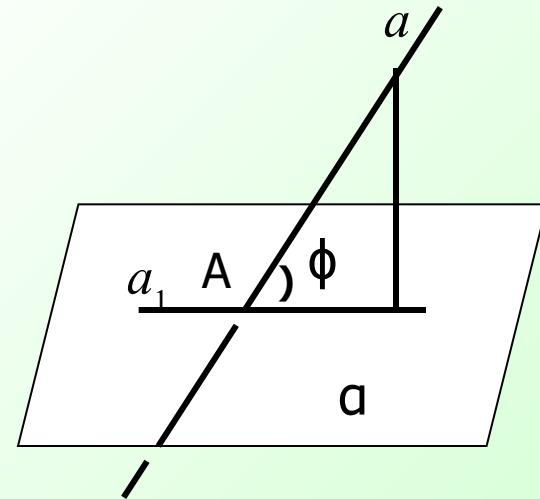


Задача №451(а)

Задача №453

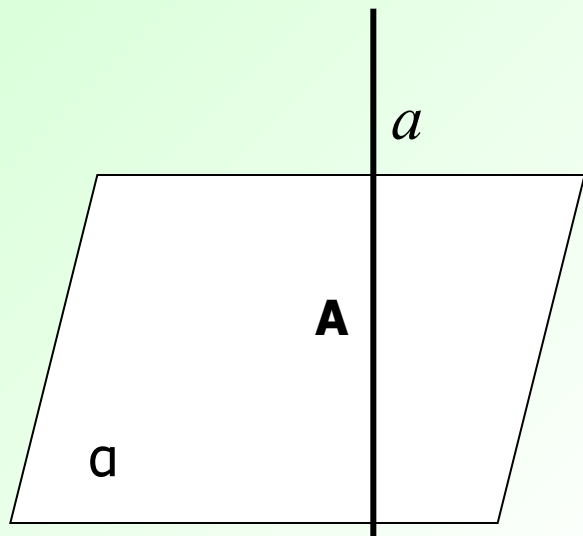
# Вычисление углов между прямыми и плоскостями

- Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярную к ней, называют угол между прямой и её проекцией на плоскость.

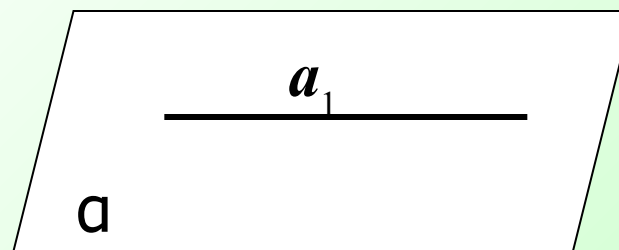


1. Если  $a \perp \alpha$ , то проекцией  $a$  на  $\alpha$  является т. А

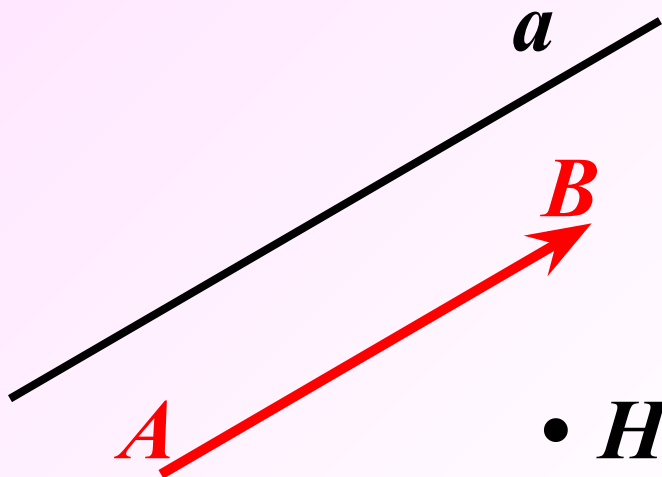
$$A = a \cap \alpha \quad (a, \alpha) = 90^\circ$$



2. Если  $a \parallel \alpha$ ,  $a_1$  - проекция  $a$  на  $\alpha$ , то  $a \parallel a_1$ ,  $a_1 \subset \alpha$ .  
 $(a, \alpha) = 0^\circ$



# Направляющий вектор прямой.



- *Ненулевой вектор называется **направляющим вектором** прямой, если он лежит на самой прямой, либо на прямой, параллельной ей.*

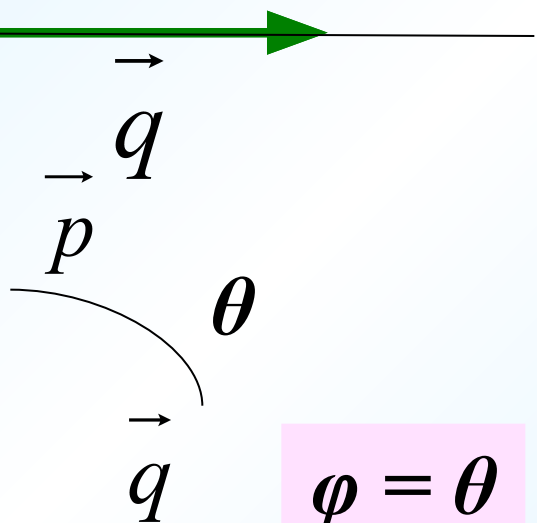
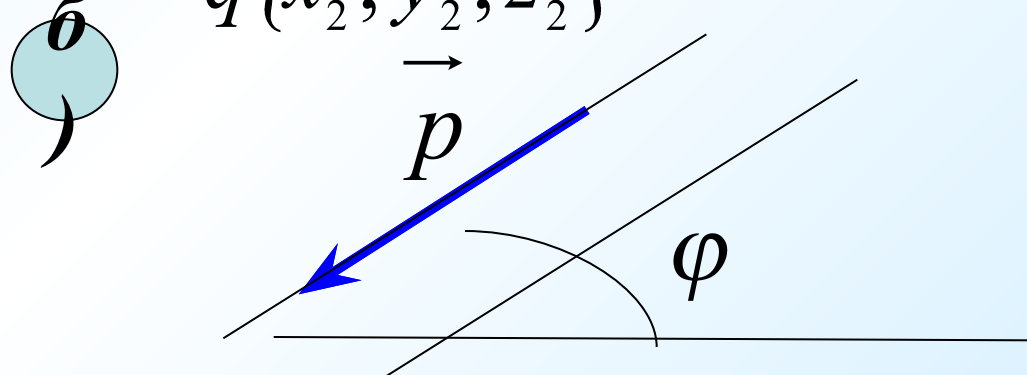
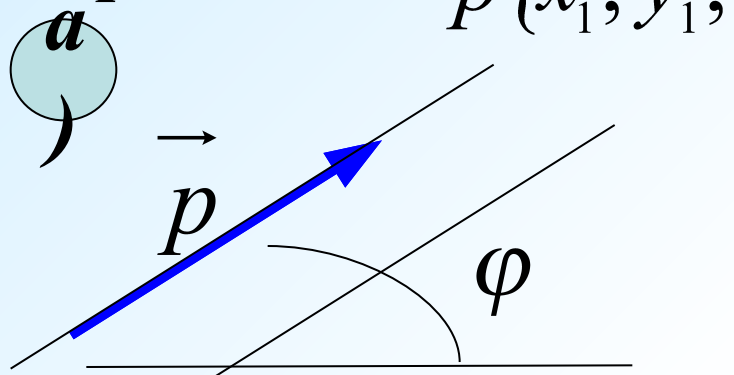


# Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

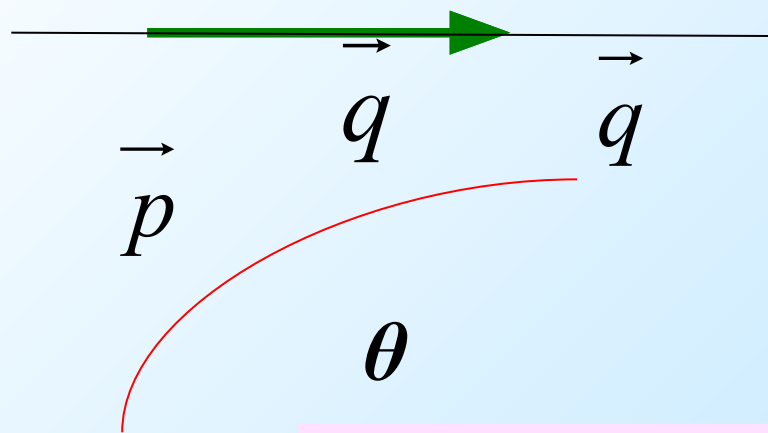
**№1. Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.**

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$$



$$\varphi = \theta$$



$$\varphi = 180^\circ - \theta$$

Ответ:

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

# Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

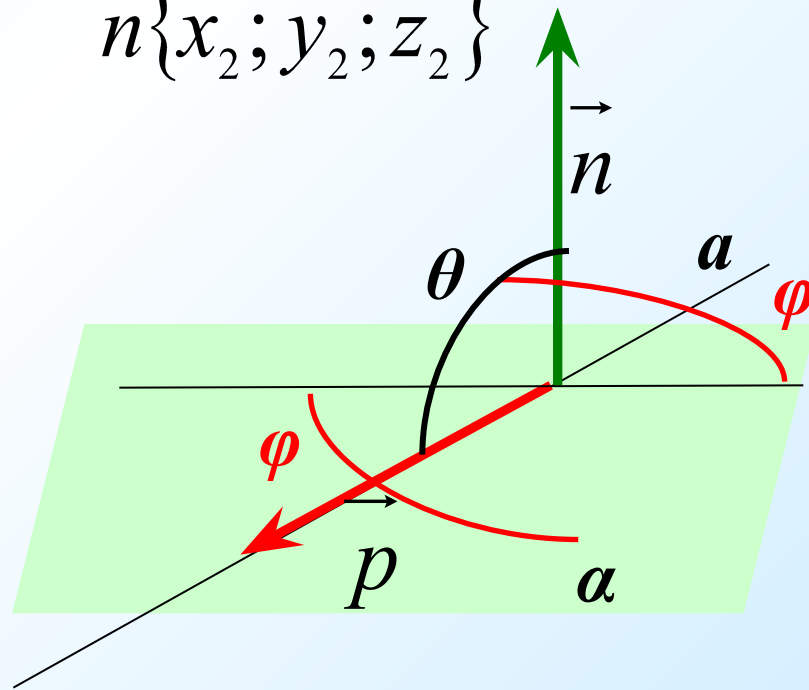
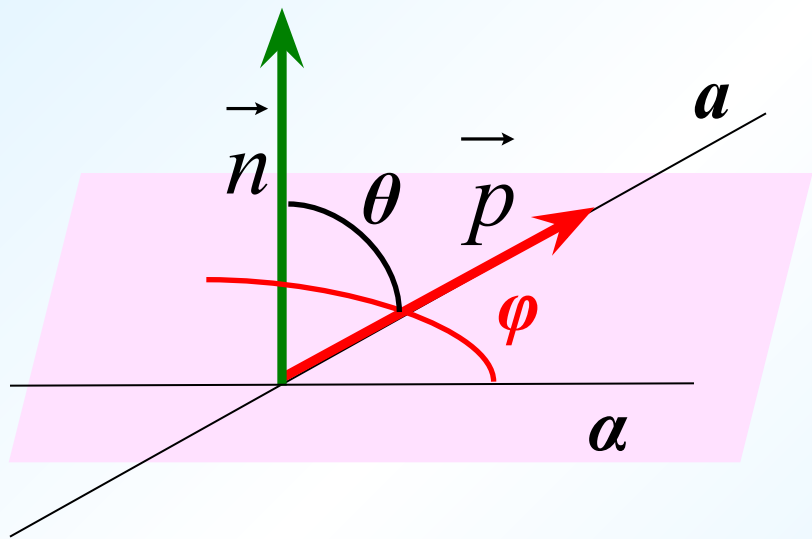
**№2. Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости..**

**а)**

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$$

**б)**

$$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$$



# № 464 (а)

**Дано:**  $A(3;-2;4)$   $B(4;-1;2)$   $C(6;-3;2)$   $D(7;-3;1)$

**Найти:** угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ .

***Ваши предложения...***

***1. Найдем координаты векторов***

$$\overrightarrow{AB} \{1;1;-2\} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{CD} \{1;0;-1\}$$

***2. Воспользуемся формулой:***

$$\cos \varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\varphi = 30^\circ$$





# № 466 (а)

Дано: куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

точка  $M$  принадлежит  $AA_1$

$AM : MA_1 = 3 : 1$ ;  $N$  – середина  $BC$

Вычислить косинус угла между прям.  $MN$  и  $DD_1$

1. Введем систему координат.

2. Рассмотрим  $DD_1$  и  $MN$ .

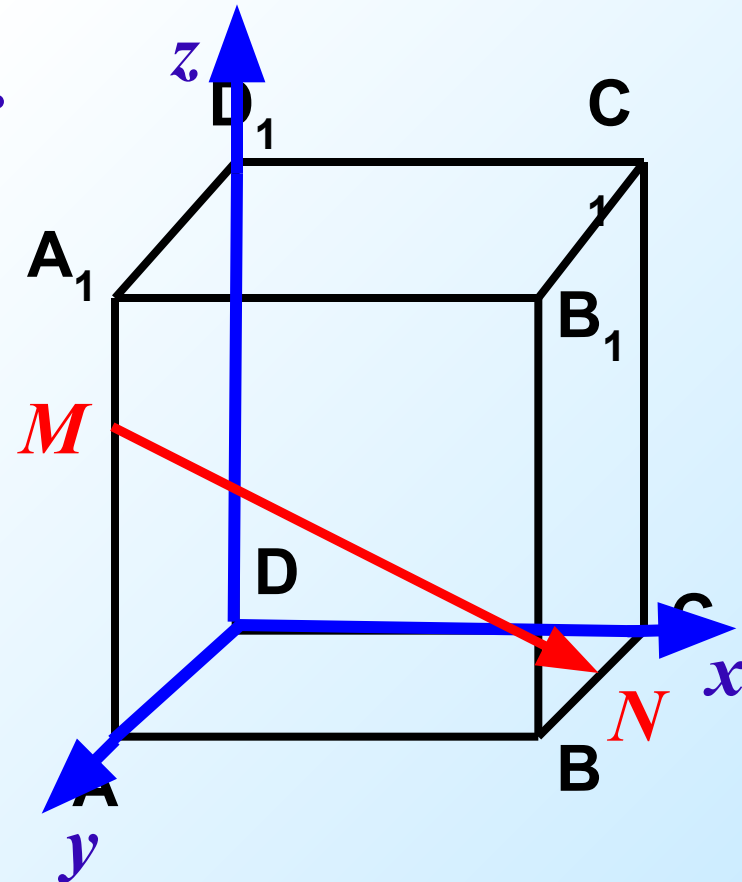
3. Пусть  $AA_1 = 4$ , тогда

$$M(0;4;3) \quad N(4;2;0)$$

4. Найдем координаты

векторов  $DD_1$  и  $MN$ .

5. По формуле найдем  $\cos\varphi$ .



**Ответ:**  $\frac{3}{\sqrt{29}}$

# Задача.

Дано: прямоугольный параллелепипед

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;  $DA = 2$ ;  $DC = 2$ ;  $DD_1 = 3$ .

Найти угол между прямыми  $CB_1$  и  $D_1B$ .

*Ваши предложения...*

1. Введем систему координат  $D_{xyz}$
2. Рассмотрим направляющие

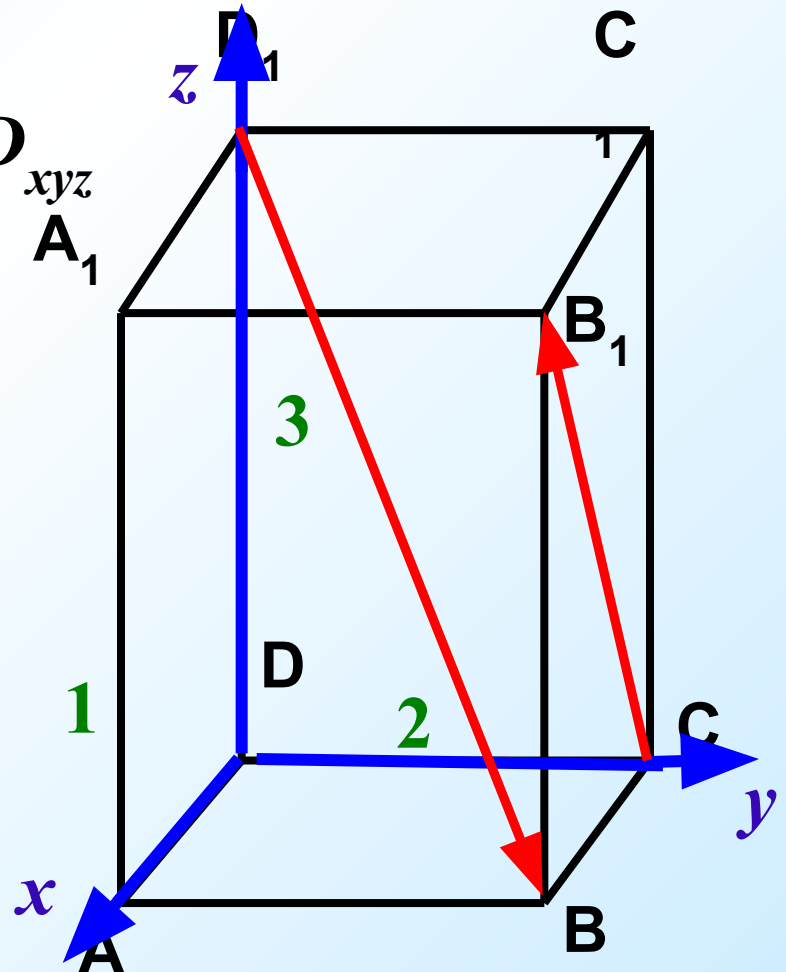
прямых  $D_1B$  и  $CB_1$ .

$$\overrightarrow{CB_1} \{1; 0; 3\} \quad \overrightarrow{D_1B} \{1; 2; -3\}$$

3. По формуле найдем  $\cos \varphi$ .

$$\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{35}}$$

$$\varphi \approx 47^\circ 28'$$



# № 467 (а)

*Дано: прямоугольный параллелепипед*

$$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1; AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$$

*Найти угол между прямыми  $BD$  и  $CD_1$ .*

*1 способ:*

1. Введем систему координат  $B_{xyz}$

2. Пусть  $AA_1 = 2$ , тогда

$$AB = BC = 1.$$

$$B(0;0;0) \quad C(1;0;0) \quad D(1;1;0) \quad D_1(1;1;2)$$

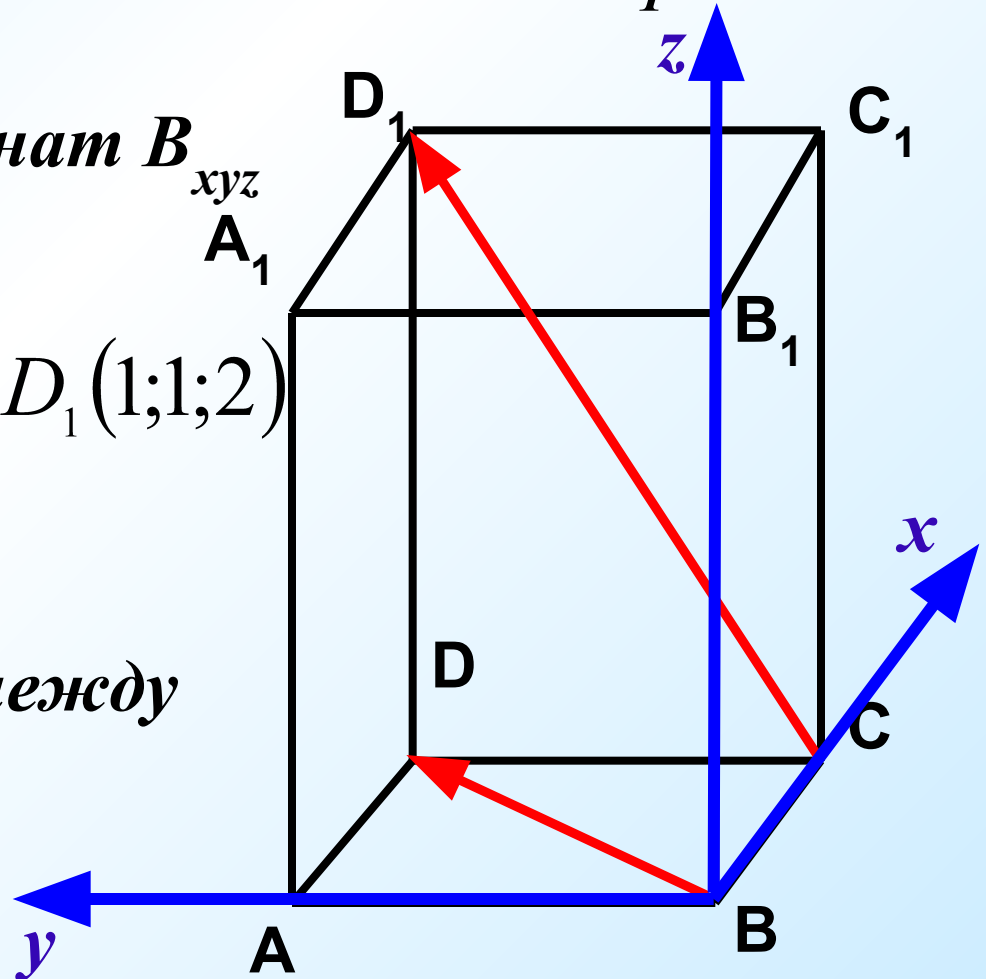
3. Координаты векторов:

$$\overrightarrow{BD} \{1;1;0\} \quad \overrightarrow{CD_1} \{0;1;2\}$$

4. Находим косинус угла между

прямыми:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



# № 467 (а)

*Дано: прямоугольный параллелепипед*

$$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1; AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$$

*Найти угол между прямыми  $BD$  и  $CD_1$ .*

*2 способ:*

*1. Т.к.  $CD_1 \parallel BA_1$ , то углы между  $BD$  и  $BA_1$ ;  $BD$  и  $CD_1$  — равны.*

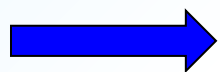
*2. В  $\triangle BDA_1$ :  $BA_1 = \sqrt{5}$ ,  $A_1D = \sqrt{5}$*

*3.  $\triangle BDA$ : по теореме Пифагора*

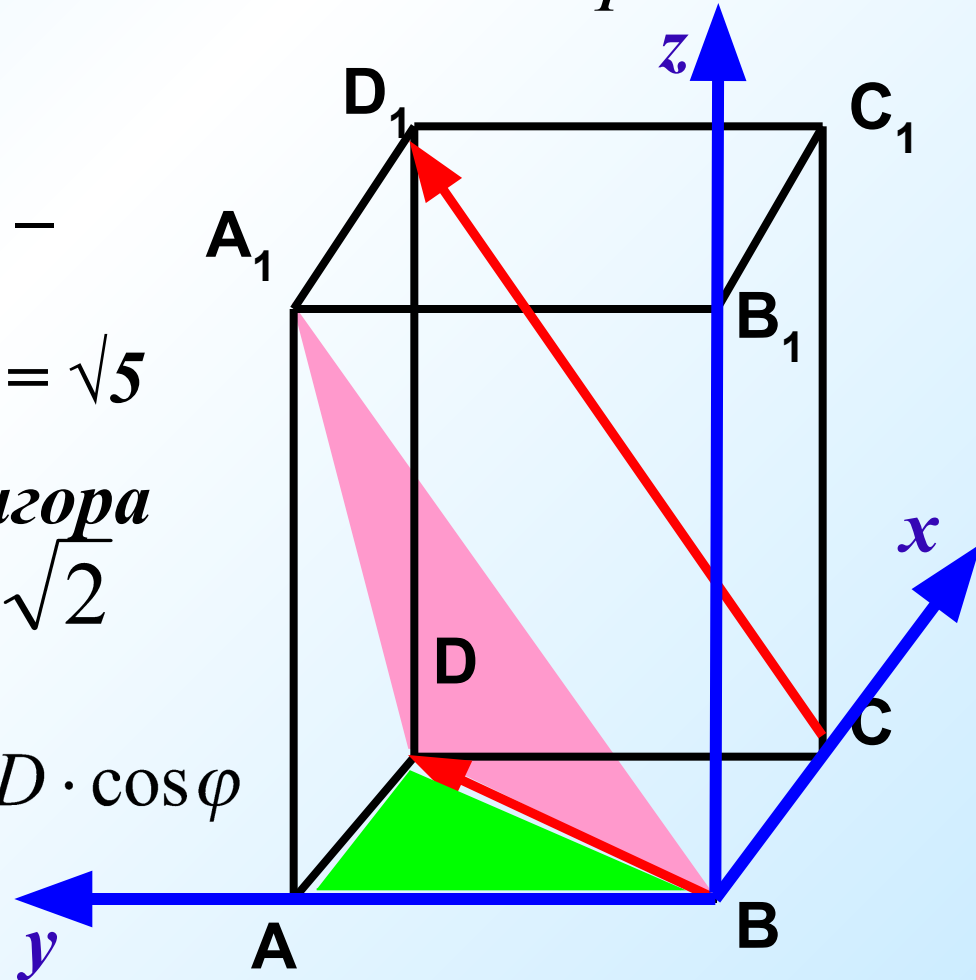
$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} \quad BD = \sqrt{2}$$

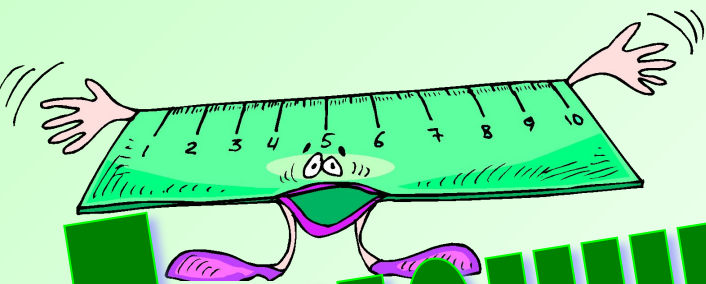
*4. По теореме косинусов:*

$$A_1D^2 = A_1B^2 + BD^2 - 2A_1B \cdot BD \cdot \cos \varphi$$



$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$





# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ.

П. 48,

№466, №454

№467 (б) – двумя способами.

