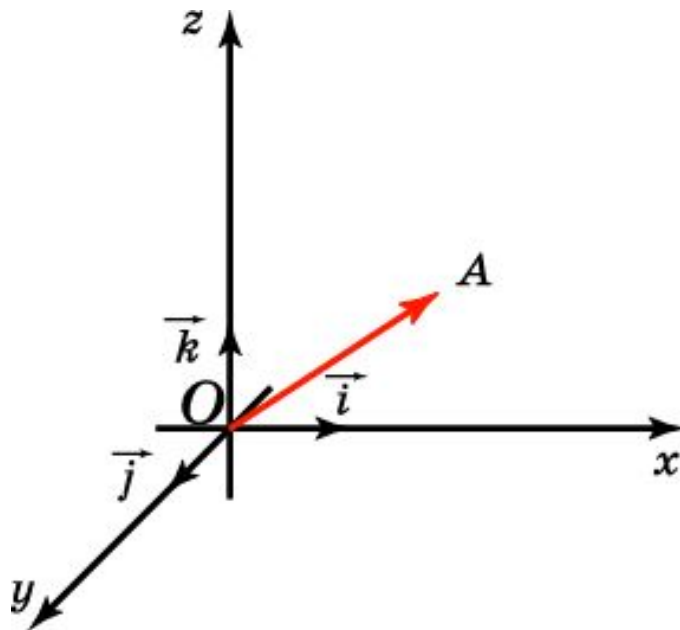


# КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются **координатами вектора**. Обозначим  $i$ ,  $j$ ,  $k$  векторы с координатами  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их **координатными векторами**.



# КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

**Теорема.** Вектор  $a$  имеет координаты  $(x, y, z)$  тогда и только тогда, когда он представим в виде  $\vec{a} = xi + yj + zk$ .

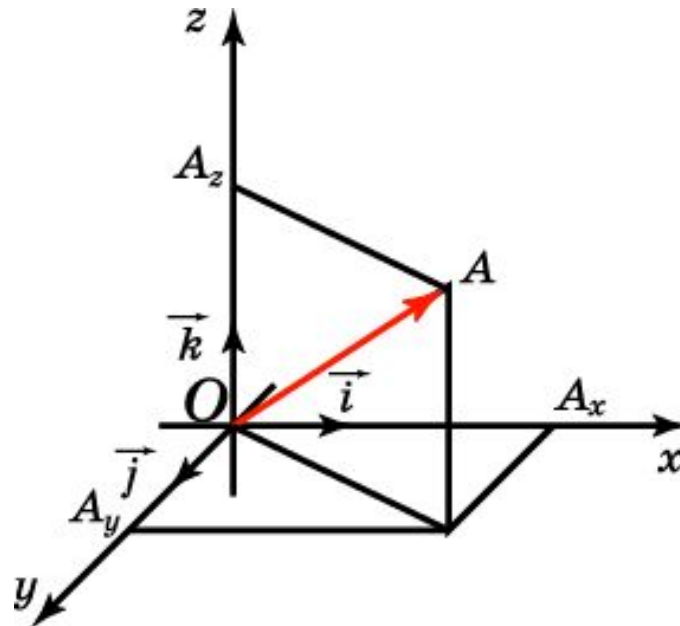
**Доказательство.** Отложим вектор  $a$  от начала координат и его конец обозначим через  $A$ . Имеет место равенство

$$\vec{OA} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y + \vec{OA}_z.$$

Точка  $A$  имеет координаты  $(x, y, z)$  тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\vec{OA}_x = xi, \vec{OA}_y = yj, \vec{OA}_z = zk,$$

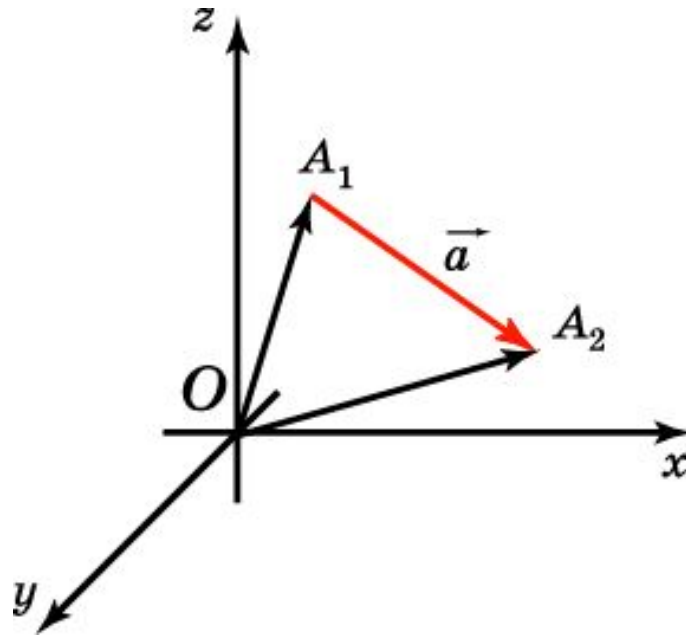
и, значит,  $\vec{a} = xi + yj + zk$ .



# ДЛИНА ВЕКТОРА

Если вектор  $a$  задан координатами начальной и конечной точек,  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ , то его длина выражается формулой

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



## Упражнение 1

Найдите координаты векторов:

а)  $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$ ;

б)  $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$ ;

в)  $\vec{c} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$ ;

г)  $\vec{d} = -5\vec{i} + 5\vec{k}$ .

**Ответ:** а) (-2, 6, 1); б) (1, 3, 0); в) (0, -3, 2); г) (-5, 0, 5).

## Упражнение 2

Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если: а)  $A(2, -6, 9)$ ,  $B(-5, 3, -7)$ ; б)  $A(1, 3, -8)$ ,  $B(6, -5, -10)$ ; в)  $A(-3, 1, -20)$ ,  $B(5, 1, -1)$ .

**Ответ:** а)  $(-7, 9, -16)$ ; б)  $(5, -8, -2)$ ; в)  $(8, 0, 19)$ .

## Упражнение 3

Вектор  $\overrightarrow{AB}$  имеет координаты  $(a, b, c)$ . Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{BA}$ .

Ответ:  $(-a, -b, -c)$ .

## Упражнение 4

В прямоугольном параллелепипеде  $OABCO_1A_1B_1C_1$  вершина  $O$  – начало координат, ребра  $OA$ ,  $OC$ ,  $OO_1$  лежат на осях координат  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно и  $OA=2$ ,  $OC=3$ ,  $OO_1=4$ . Найдите координаты векторов:

а)  $\overrightarrow{OA_1}$  ;

б)  $\overrightarrow{OB_1}$  ;

в)  $\overrightarrow{OO_1}$  ;

г)  $\overrightarrow{OC}$  .

**Ответ:** а) (2, 0, 4);

б) (2, 3, 4);

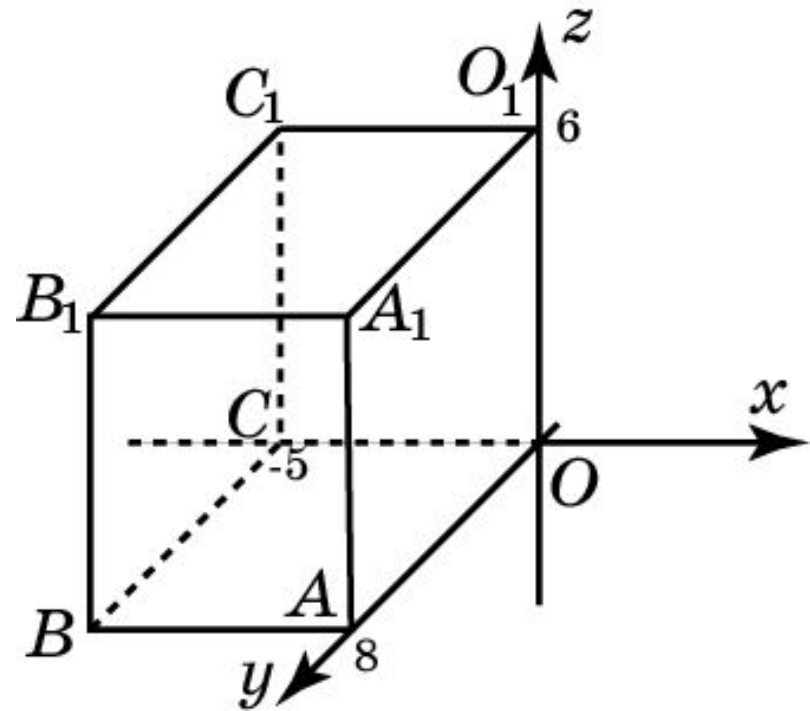
в) (0, 0, 4);

г) (0, 3, 0).

## Упражнение 5

На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед  $OABCO_1A_1B_1C_1$ , у которого вершина  $O$  совпадает с началом координат. Найдите координаты вектора: а)  $\overrightarrow{OA}$ ; б)  $\overrightarrow{OC}$ ; в)  $\overrightarrow{OB}$ ; г)  $\overrightarrow{OO_1}$ ; д)  $\overrightarrow{BC_1}$ ; е)  $\overrightarrow{B_1C_1}$ ; ж)  $\overrightarrow{AA_1}$ ; з)  $\overrightarrow{OB_1}$ ; и)  $\overrightarrow{O_1B}$ .

**Ответ:** а)  $(0, 8, 0)$ ;  
б)  $(-5, 0, 0)$ ;  
в)  $(-5, 8, 0)$ ;  
г)  $(0, 0, 6)$ ;  
д)  $(0, -8, 6)$ ;  
е)  $(0, -8, 0)$ ;  
ж)  $(0, 0, 6)$ ;  
з)  $(-5, 8, 6)$ ;  
и)  $(-5, 8, -6)$ .





## Упражнение 6

Найдите координаты векторов  $\vec{a} + b$  и  $\vec{a} - b$ , если  $a(1, 0, 2)$ ,  $b(0, 3, -4)$ .

**Ответ:**  $(1, 3, -2)$ ;  $(1, -3, 6)$ .

## Упражнение 7

Даны векторы  $a$   $(-1, 2, 8)$  и  $b$   $(2, -4, 3)$ . Найдите координаты векторов:

а)  $3\vec{a} + 2\vec{b}$  ;

б)  $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$  ;

в)  $-\vec{a} + 5\vec{b}$  .

**Ответ:** а)  $(1, -2, 30)$ ;

б)  $(-1, 2, 3\frac{1}{4})$ ;

в)  $(11, -22, 7)$ .

## Упражнение 8

Найдите координаты точки  $N$ , если вектор  $\overrightarrow{MN}$  имеет координаты  $(4, -3, 0)$  и точка  $M - (1, -3, -7)$ .

**Ответ:**  $(5, -6, -7)$ .

## Упражнение 9

Какому условию должны удовлетворять координаты вектора, чтобы он был: а) перпендикулярен координатной плоскости  $Oxy$ ; б) параллелен координатной прямой  $Ox$ ?

**Ответ:** а) Первая и вторая координаты равны нулю;  
б) вторая и третья координаты равны нулю.

## Упражнение 10

Найдите координаты конца единичного вектора с началом в точке  $A(1, 2, 3)$  и: а) перпендикулярного плоскости  $Oxy$ ; б) параллельного прямой  $Ox$ .

**Ответ:** а)  $(1, 2, 4)$ ,  $(1, 2, 2)$ ;  
б)  $(2, 2, 3)$ ,  $(0, 2, 3)$ .

## Упражнение 11

Найдите длину вектора:

а)  $i + 2j - 3k$ ;

б)  $8i + k$ ;

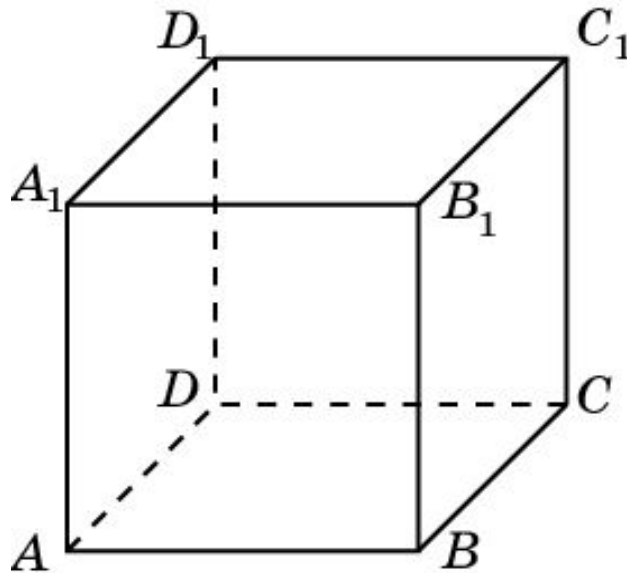
в)  $-j + 2k$ .

**Ответ:** а)  $\sqrt{14}$ ; б)  $\sqrt{65}$ ; в)  $\sqrt{5}$ .

## Упражнение 12

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите длину вектора:

а)  $\overline{AC}$ ; б)  $\overline{BD_1}$ .

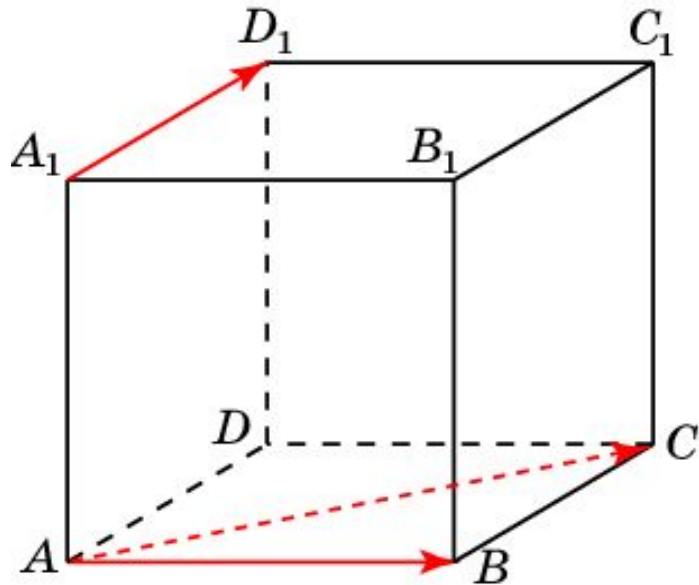


**Ответ.** а)  $\sqrt{2}$ ; б)  $\sqrt{3}$ .

## Упражнение 13

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите длину вектора

$$\vec{AB} + \vec{A_1D_1}.$$



**Решение.** Данная сумма векторов равна вектору  $\vec{AC}$ .

Его длина равна  $\sqrt{2}$ .

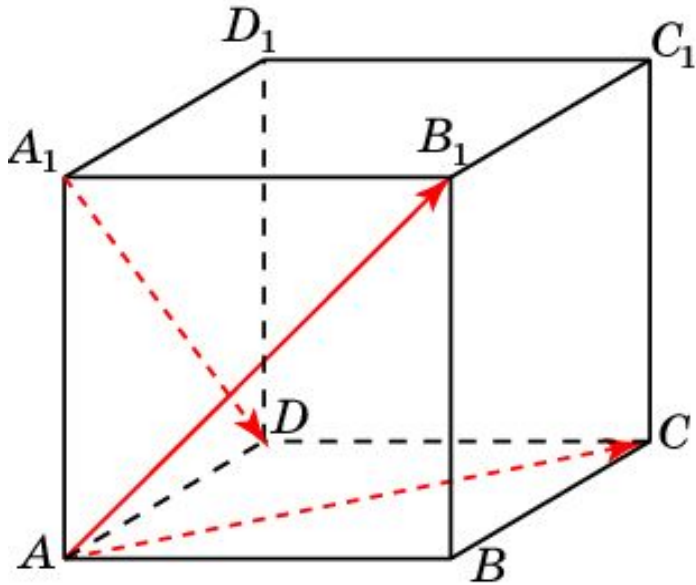
**Ответ.**  $\sqrt{2}$ .



## Упражнение 14

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите длину вектора

$$\vec{AB_1} + \vec{A_1D}.$$



**Решение.** Данная сумма векторов равна вектору  $\vec{AC}$ .

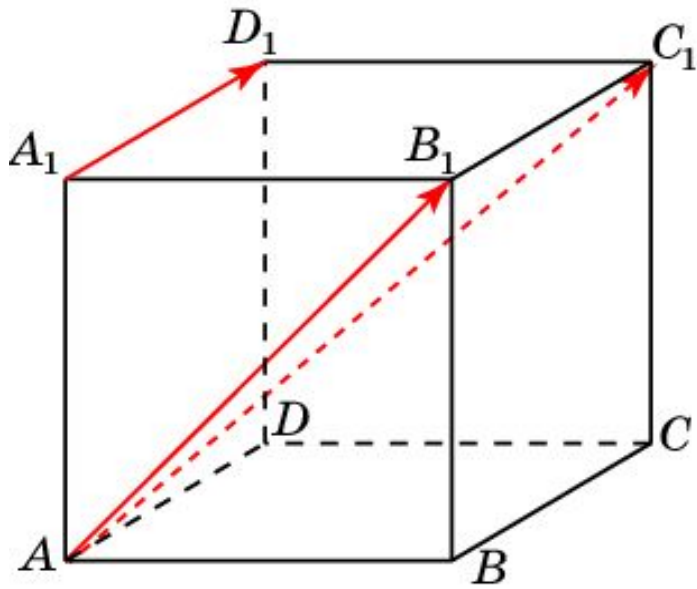
Его длина равна  $\sqrt{2}$ .

**Ответ.**  $\sqrt{2}$ .

## Упражнение 15

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите длину вектора

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{A_1D_1}.$$



**Решение.** Данная сумма векторов равна вектору  $\overrightarrow{AC_1}$ .

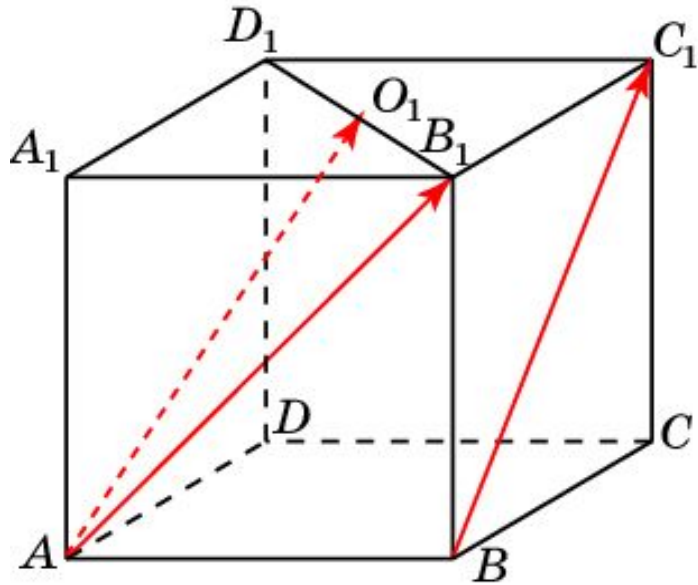
Его длина равна  $\sqrt{3}$ .

**Ответ.**  $\sqrt{3}$ .

## Упражнение 16

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите длину вектора

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1}.$$



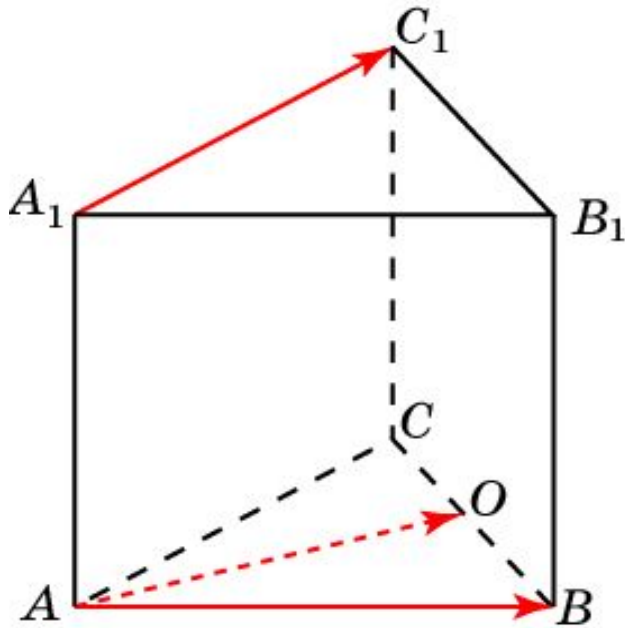
**Решение.** Данная сумма векторов равна удвоенному вектору  $\overrightarrow{AO_1}$ , где  $O_1$  – середина отрезка  $B_1D_1$ .

Его длина равна  $\sqrt{7}$ .

**Ответ.**  $\sqrt{7}$ .

## Упражнение 17

В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите длину вектора  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1 C_1}$ .



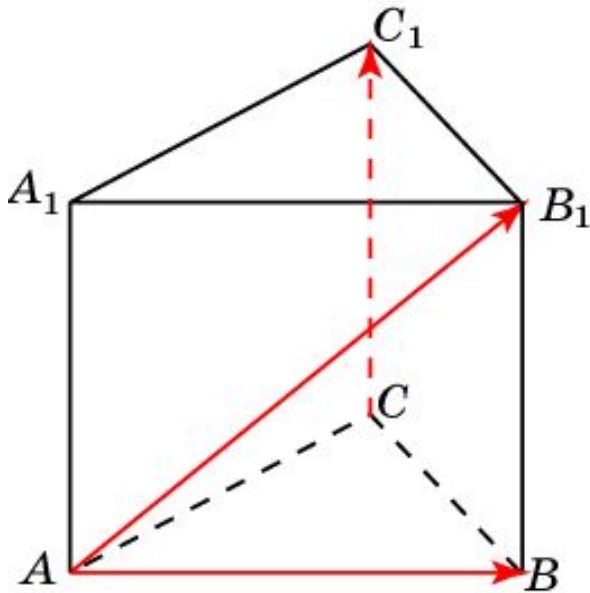
**Решение.** Длина данного вектора равна длине вектора удвоенного вектора  $\overrightarrow{AO}$ , где  $O$  – середина отрезка  $BC$ .

Его длина равна  $\sqrt{3}$ .

**Ответ.**  $\sqrt{3}$ .

## Упражнение 18

В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите длину вектора  $\vec{AB} + \vec{CC_1}$ .

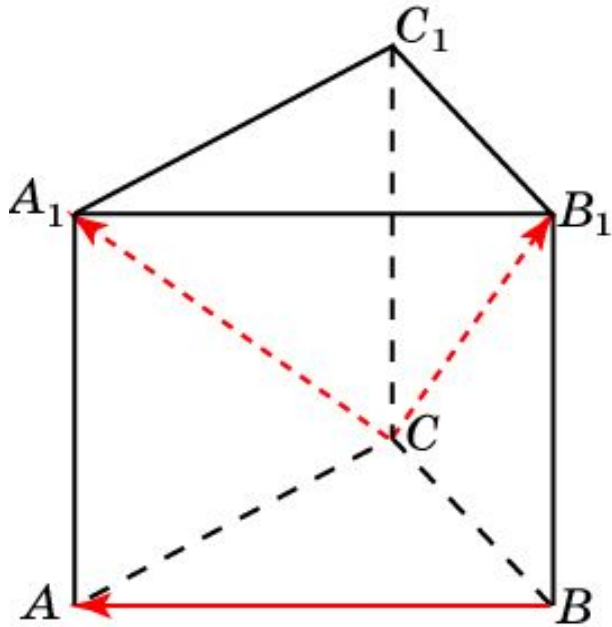


**Решение.** Длина данного вектора, равна длине вектора  $\vec{AB_1}$ , т.е. равна  $\sqrt{2}$ .

**Ответ.**  $\sqrt{2}$ .

## Упражнение 19

В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите длину вектора  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB_1}$ .



**Решение.** Длина данного вектора равна длине вектора  $\overrightarrow{CA_1}$ , т.е. равна  $\sqrt{2}$ .

**Ответ.**  $\sqrt{2}$ .

## Упражнение 20

В правильной шестиугольной призме  $A \dots F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите длину вектора:

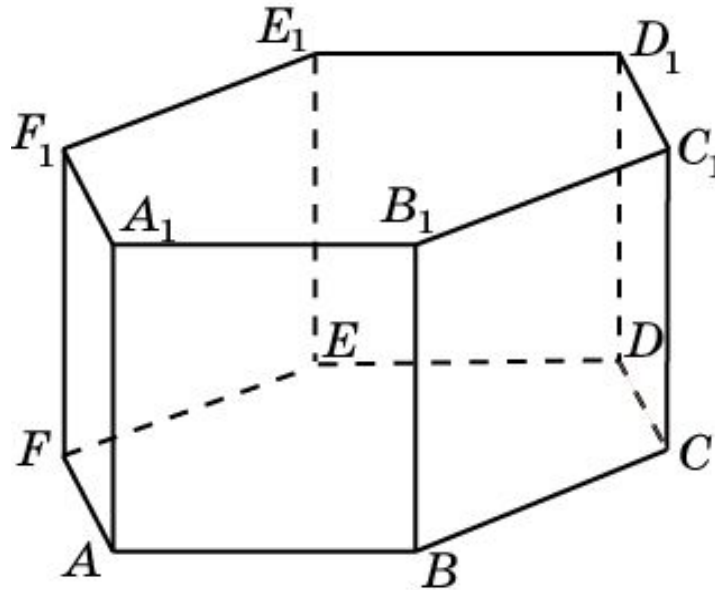
а)  $\overrightarrow{AB_1}$ ;

б)  $\overrightarrow{AC_1}$ ;

в)  $\overrightarrow{AD_1}$ ;

г)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1E_1}$ ;

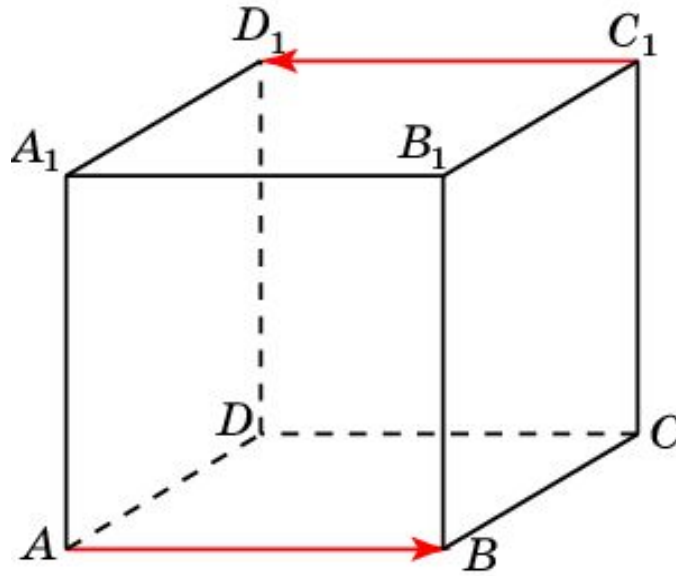
д)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1F_1}$ .



**Ответ.** а)  $\sqrt{2}$ ; б) 2; в)  $\sqrt{5}$ ; г)  $\sqrt{5}$ ; д) 1.

## Упражнение 21

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{C_1D_1}$ .



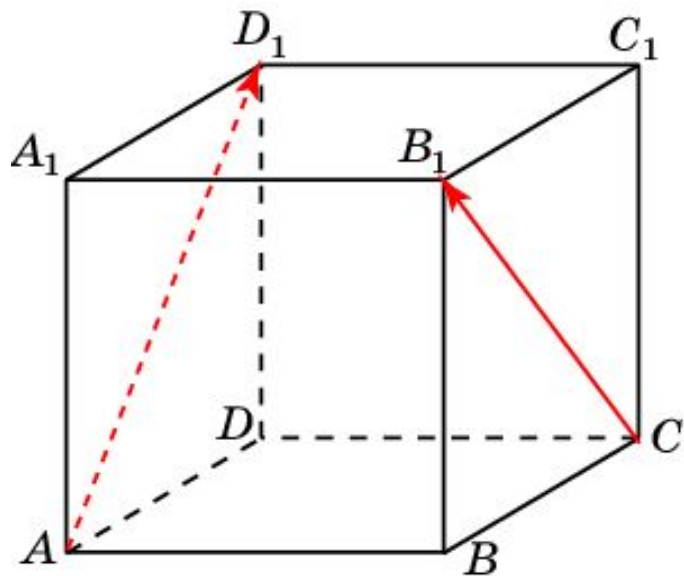
Ответ.  $180^\circ$ .



## Упражнение 22

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между векторами

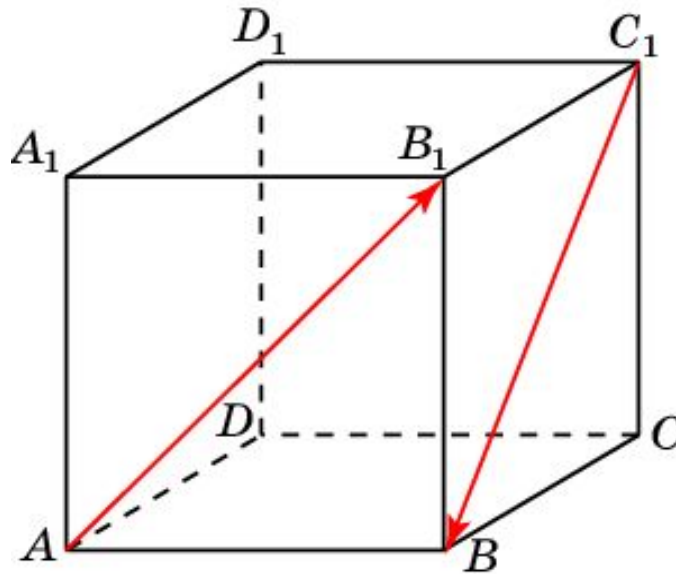
$\overrightarrow{AD_1}$  и  $\overrightarrow{CB_1}$ .



Ответ.  $90^\circ$ .

## Упражнение 23

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между векторами  $\overrightarrow{AB_1}$  и  $\overrightarrow{C_1B}$ .

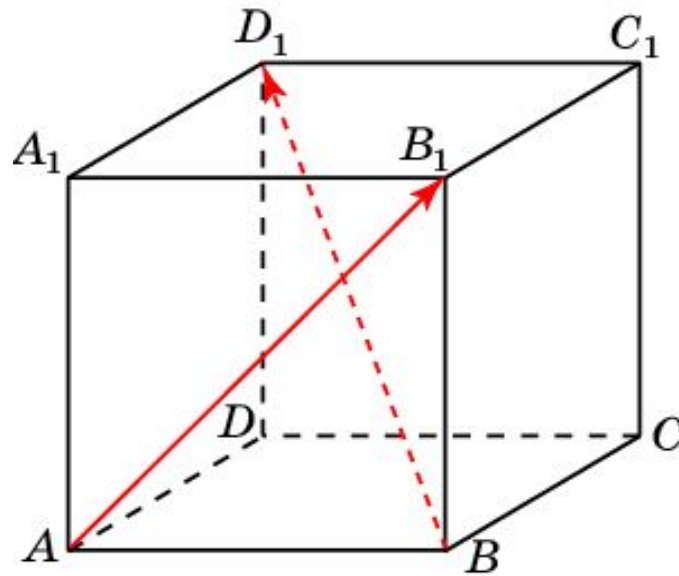


Ответ.  $120^\circ$ .

## Упражнение 24

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между векторами

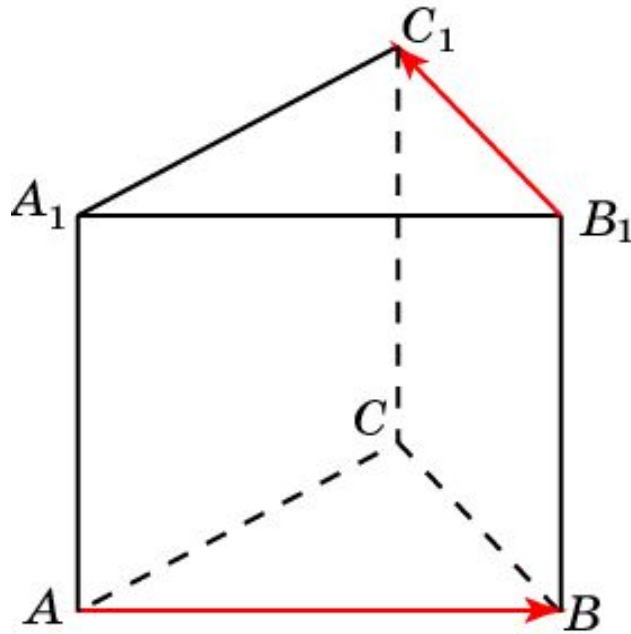
$\overrightarrow{AB_1}$  и  $\overrightarrow{BD_1}$ .



Ответ.  $90^\circ$ .

## Упражнение 25

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{B_1C_1}$ .



Ответ.  $120^\circ$ .

## Упражнение 26

В правильной шестиугольной призме  $A \dots F_1$  найдите угол между векторами:

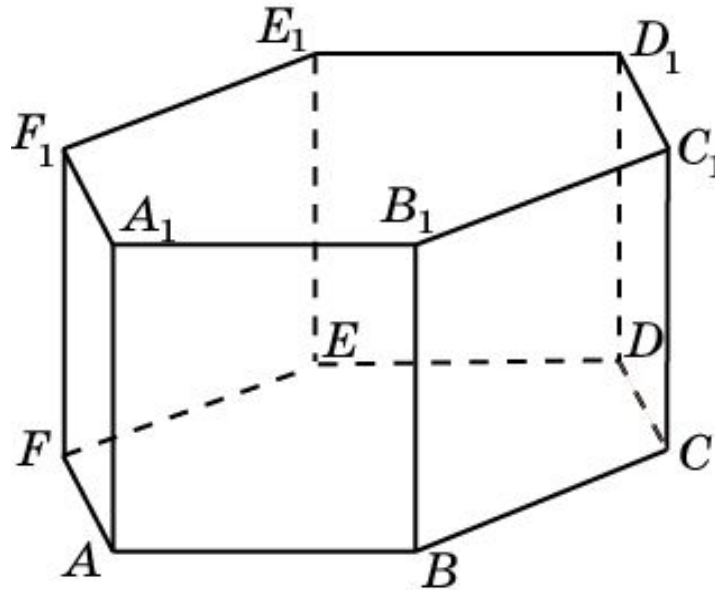
а)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{B_1C_1}$ ;

б)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{C_1D_1}$ ;

в)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{B_1D_1}$ ;

г)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{B_1E_1}$ ;

д)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{C_1E_1}$ .



**Ответ.** а)  $60^\circ$ ; б)  $120^\circ$ ; в)  $90^\circ$ ; г)  $120^\circ$ ; д)  $150^\circ$ .