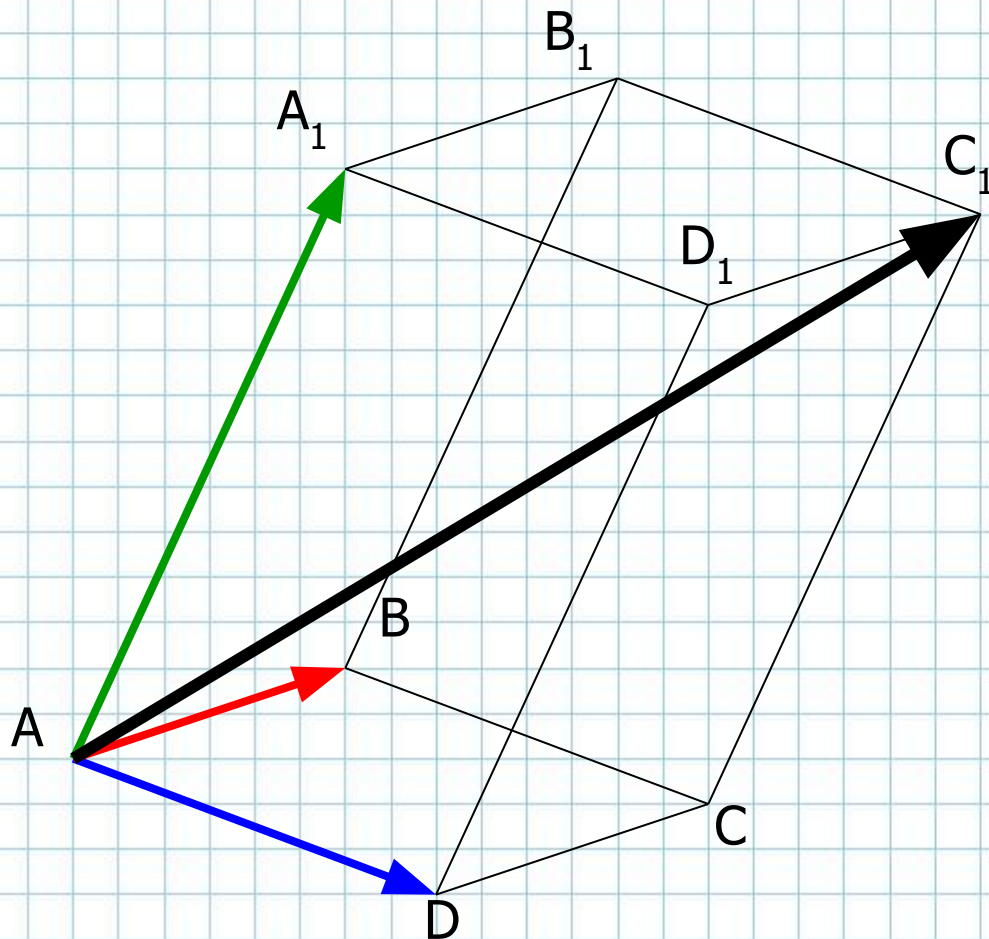


# Векторы в пространстве.

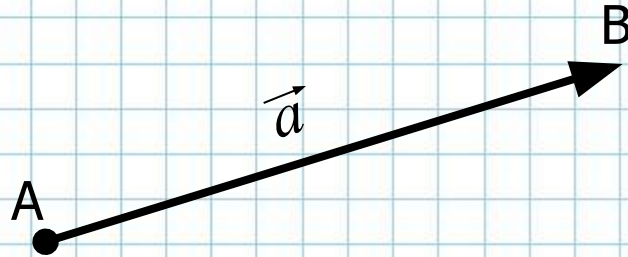
Геометрия,  
11 класс.



$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$$

# I. Определение вектора. Основные понятия, связанные с векторами.

Как и в плоскости, в пространстве вектор определяется как **направленный отрезок**:



Точка  $A$  – начало вектора,  $B$  – конец вектора. Записывают:  $\overrightarrow{AB}$  или  $\vec{a}$ .

Обычную точку в пространстве мы также можем считать вектором, у которого начало совпадает с конечной точкой. Такой вектор называется **нулевым** и обозначается:  $\vec{0}$  или  $\overrightarrow{AA}$ .



Длина отрезка, изображающего вектор, называется **модулем** (или абсолютной величиной) вектора, т.е.

$$|\overrightarrow{AB}| = AB \text{ (длина отрезка)}.$$

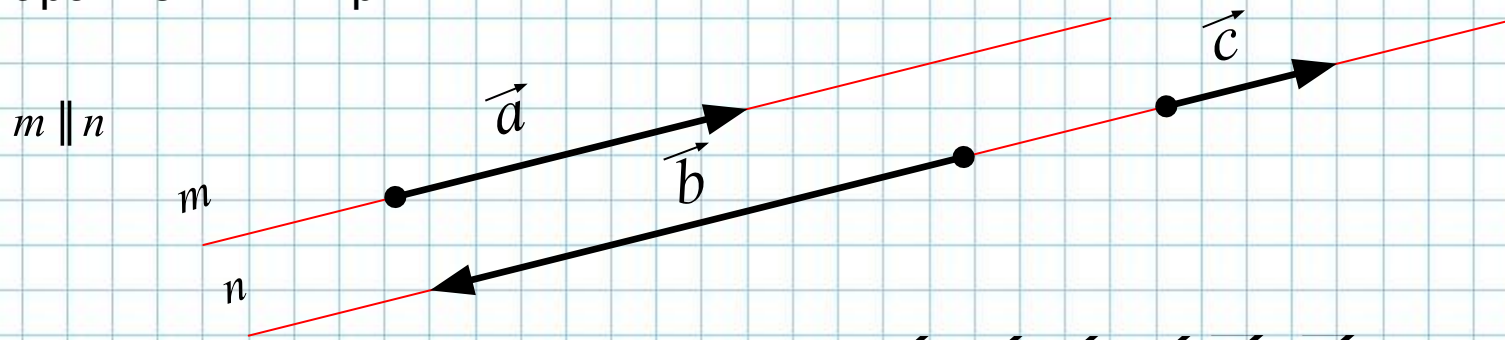
Естественно, что  $|\overrightarrow{AA}| = 0$ .

Векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BA}$  являются **противоположными**. Очевидно, что:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|.$$



Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых:



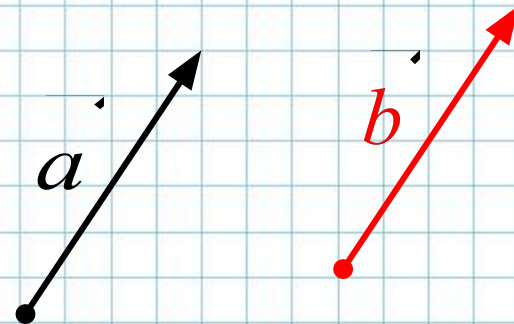
Обозначение коллинеарных векторов:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ,  $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ,  $\vec{c} \parallel \vec{b}$ .

Коллинеарные векторы, в свою очередь, бывают одинаково направленными (или сонаправленными) и противоположно направленными. В нашем случае:

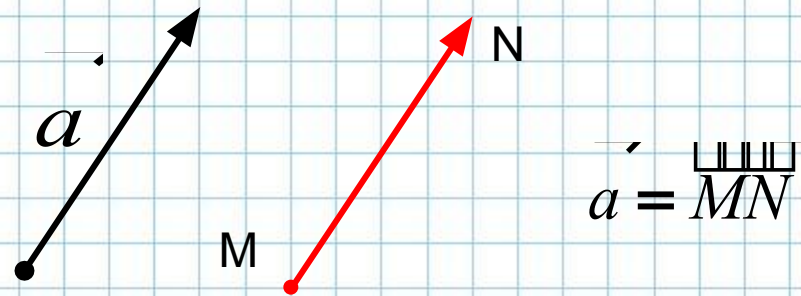
$\vec{a} \uparrow \vec{c}$  – сонаправленные векторы,  $\vec{a} \downarrow \vec{b}$  – противоположно направленные векторы.

Два вектора называются **равными**, если: 1) они сонаправлены; и 2) их модули равны, т.е.

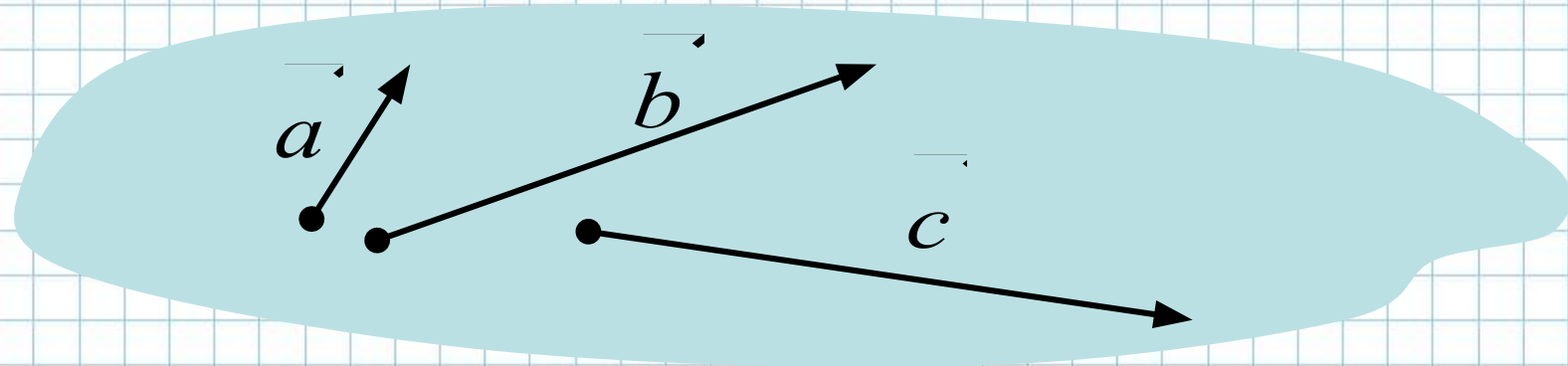
$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|$$



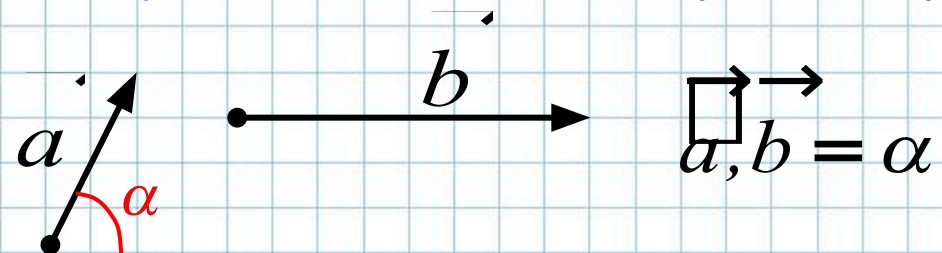
От произвольной точки пространства можно отложить единственный вектор, равный данному:



Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости:



**Углом между векторами** называется угол между их направлениями:



Величина угла между векторами может изменяться от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ . Подумайте, когда:

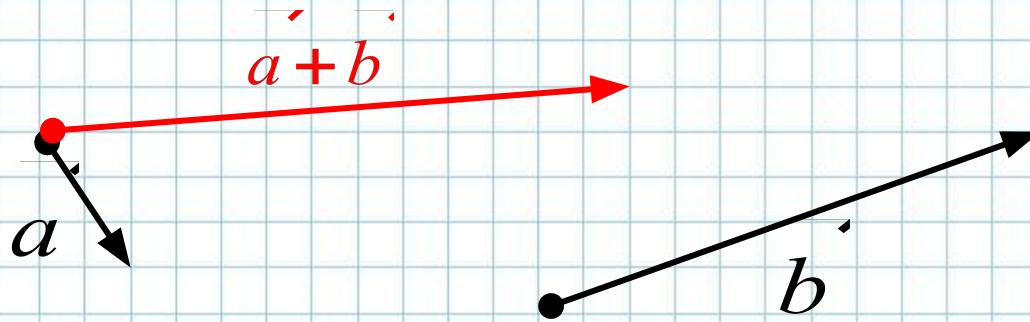
а)  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$  и б)  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$  ?

Ответ: а)  $a \uparrow \uparrow b$ ; б)  $a \uparrow \downarrow b$  .

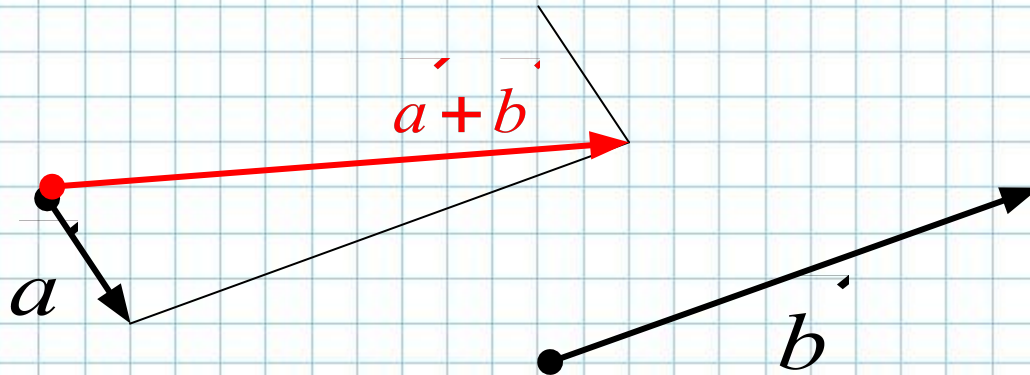
## II. Действия с векторами.

Векторы можно **складывать** – в результате получается **вектор**. При сложении двух векторов применяются **правила треугольника или параллелограмма**:

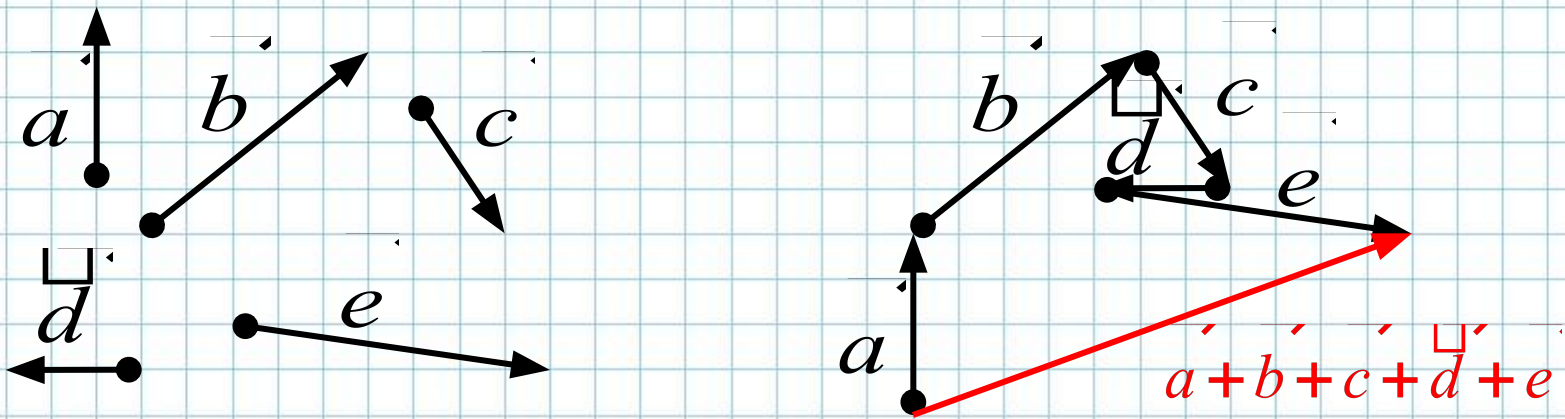
1) При применении правила треугольника один из векторов откладывают от конца другого, т.е.  $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{MF}$ :



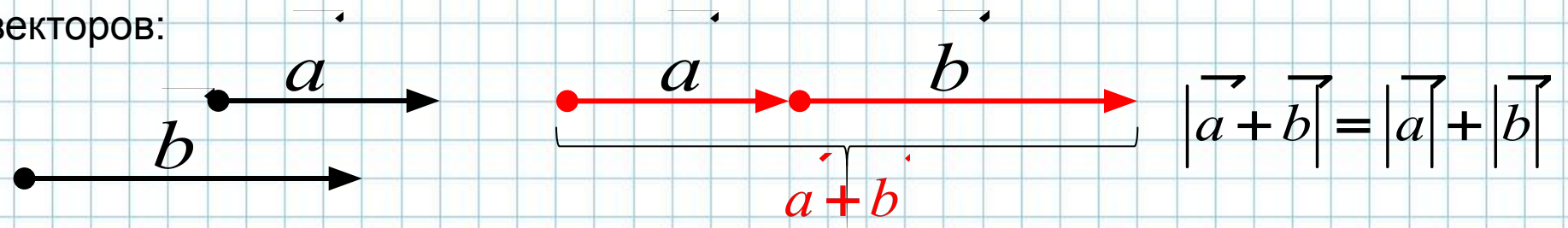
2) При применении правила параллелограмма оба вектора откладывают из общей начальной точки, т.е.  $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MF}$ , где F – вершина параллелограмма, противоположная общей начальной точке векторов.



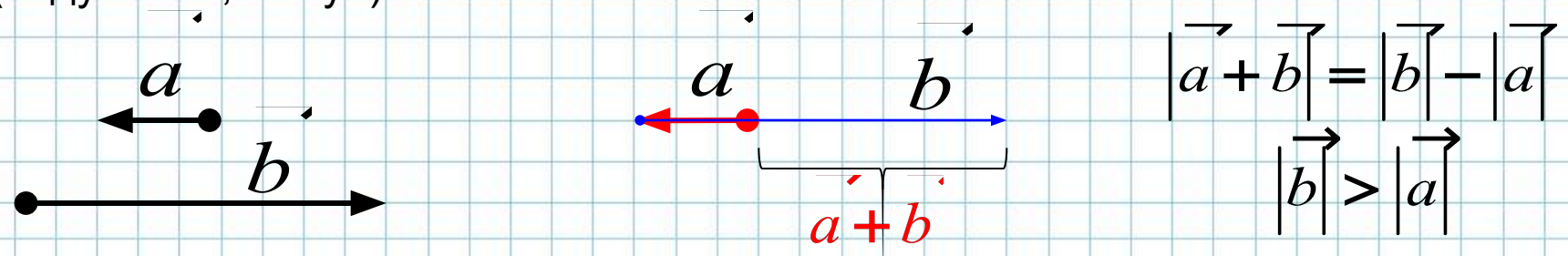
При сложении трех и более векторов применяют **правило многоугольника**:



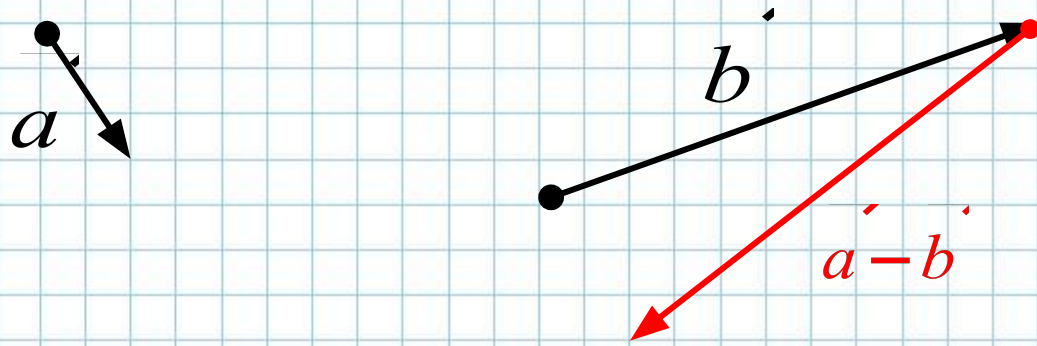
Обратим внимание, что при сложении сонаправленных векторов получается вектор, сонаправленный с данными и его модуль равен сумме модулей слагаемых векторов:



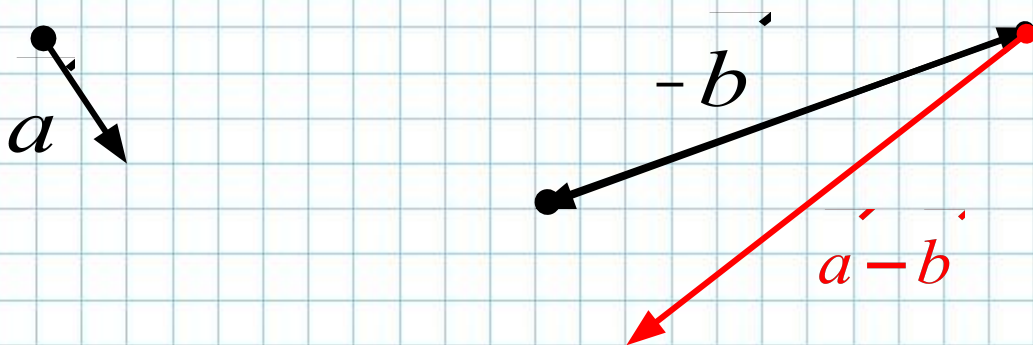
При сложении противоположно направленных векторов получается вектор, сонаправленный с вектором, имеющим бóльшую длину и его модуль равен ... (подумайте, чему?):



Также можно найти **разность** двух векторов – в результате получается **вектор**. При вычитании двух векторов применяется видоизмененное **правило треугольника** – вначале оба вектора строятся с общей начальной точкой, затем соединяются концы этих векторов с выбором направления к «уменьшаемому» вектору:



Или: т.к.  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ , то можно вначале построить вектор, противоположный вектору  $b$ , а затем оба вектора сложить по правилу треугольника.



Сложение векторов, как и сложение чисел подчиняется законам:

1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  – переместительный закон сложения;

2)  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  – сочетательный закон сложения;

3)  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ;

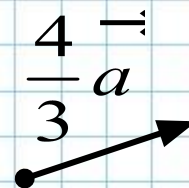
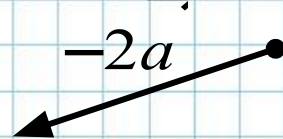
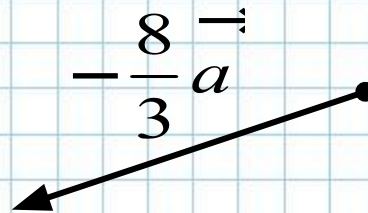
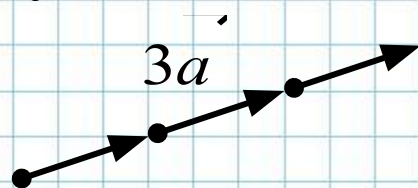
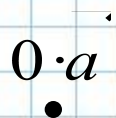
4)  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ .

Следующее действие с векторами – **умножение вектора на число  $k$** . В результате этого действия получается **вектор**, причем:

1) если  $k > 0$ , то  $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$  и  $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ ;

2) если  $k < 0$ , то  $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$  и  $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ ;

3) если  $k = 0$ , то  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ .



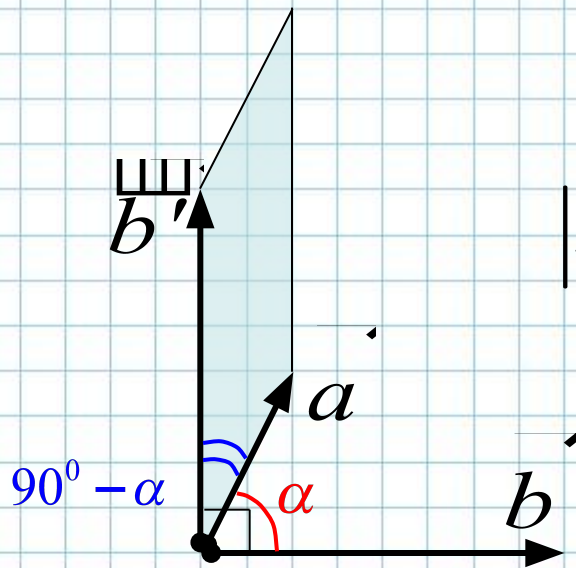


И еще одно действие с векторами – умножение двух векторов. В школьном курсе геометрии изучается **скалярное произведение** векторов. В результате этого действия (в отличие от предыдущих действий с векторами) получается **число**, равное произведению модулей двух данных векторов на косинус угла между этими векторами, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha, \vec{a}, \vec{b}$$

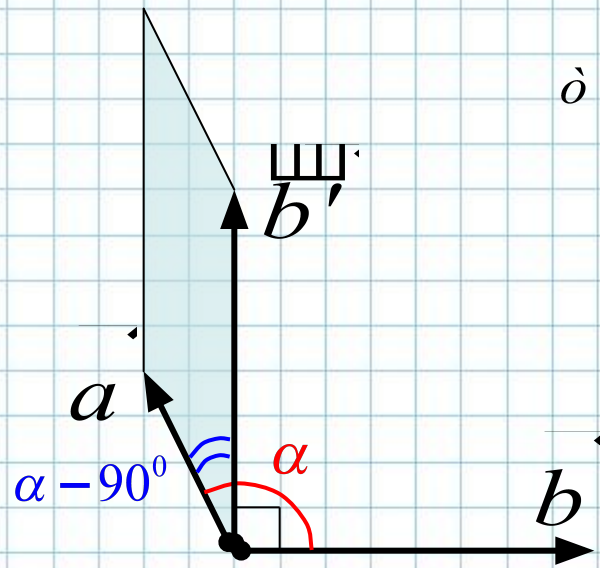
Геометрически скалярное произведение векторов можно понимать как площадь параллелограмма (или противоположная ей величина), стороны которого образуются одним из данных векторов и вектором, перпендикулярным второму с таким же модулем:

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}'| \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{b}; \quad S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}'| \cdot \sin(\alpha - 90^\circ) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = -\vec{a} \cdot \vec{b}.$$



$$|\vec{b}| = |\vec{b}'|$$

$\alpha$  – острый угол

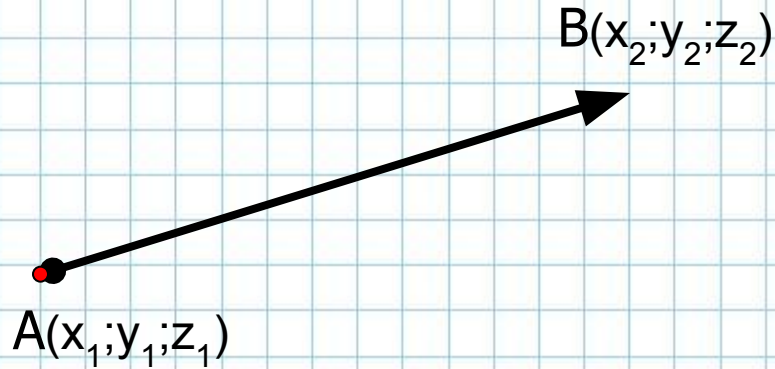


$\alpha$  – тупой угол

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = S$$

### III. Координаты вектора. Действия в координатах.

Теперь рассмотрим все эти понятия и действия с точки зрения координатного пространства. Вспомним, что любая точка пространства задается тремя координатами  $A(x; y; z)$ .



Если принять вектор за параллельный перенос начальной точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  в конечную точку  $B(x_2; y_2; z_2)$ , то **координаты вектора** показывают: *на сколько изменяются соответствующие координаты начальной точки при параллельном переносе в конечную*, т.е.

$$\vec{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

Естественно, что  $\vec{AA}(0; 0; 0)$  и  $\vec{BA}(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$ .

Т.к. **модуль вектора** равен длине изображающего его отрезка, то:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}, \text{ где } \vec{AB}(m; n; k) \text{ — координаты вектора.}$$

Два вектора, заданные координатами  $\vec{a}(m_1; n_1; k_1)$  и  $\vec{b}(m_2; n_2; k_2)$  будут **равны**, если (подумайте) ...

...равны их соответствующие координаты, т.е.  $m_1 = m_2, n_1 = n_2, k_1 = k_2$ .

Для **сложения** двух векторов, заданных координатами, нужно просто сложить их соответствующие координаты, т.е.

$$\overrightarrow{(m_1; n_1; k_1)} + \overrightarrow{(m_2; n_2; k_2)} = \overrightarrow{(m_1 + m_2; n_1 + n_2; k_1 + k_2)}.$$

При **вычитании** векторов, заданных координатами, нужно найти разности их соответствующих координат, т.е.

$$\overrightarrow{(m_1; n_1; k_1)} - \overrightarrow{(m_2; n_2; k_2)} = \overrightarrow{(m_1 - m_2; n_1 - n_2; k_1 - k_2)}.$$

**Умножение** вектора, заданного координатами, **на число** выполняется так:

$$\alpha \overrightarrow{(m; n; k)} = \overrightarrow{(\alpha m; \alpha n; \alpha k)}, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

**Скалярное произведение** двух векторов, заданных координатами, равно сумме произведений соответствующих координат, т.е.

$$\overrightarrow{(m_1; n_1; k_1)} \cdot \overrightarrow{(m_2; n_2; k_2)} = m_1 m_2 + n_1 n_2 + k_1 k_2.$$

Условием **коллинеарности** двух векторов, заданных координатами, будет пропорциональность их соответствующих координат:

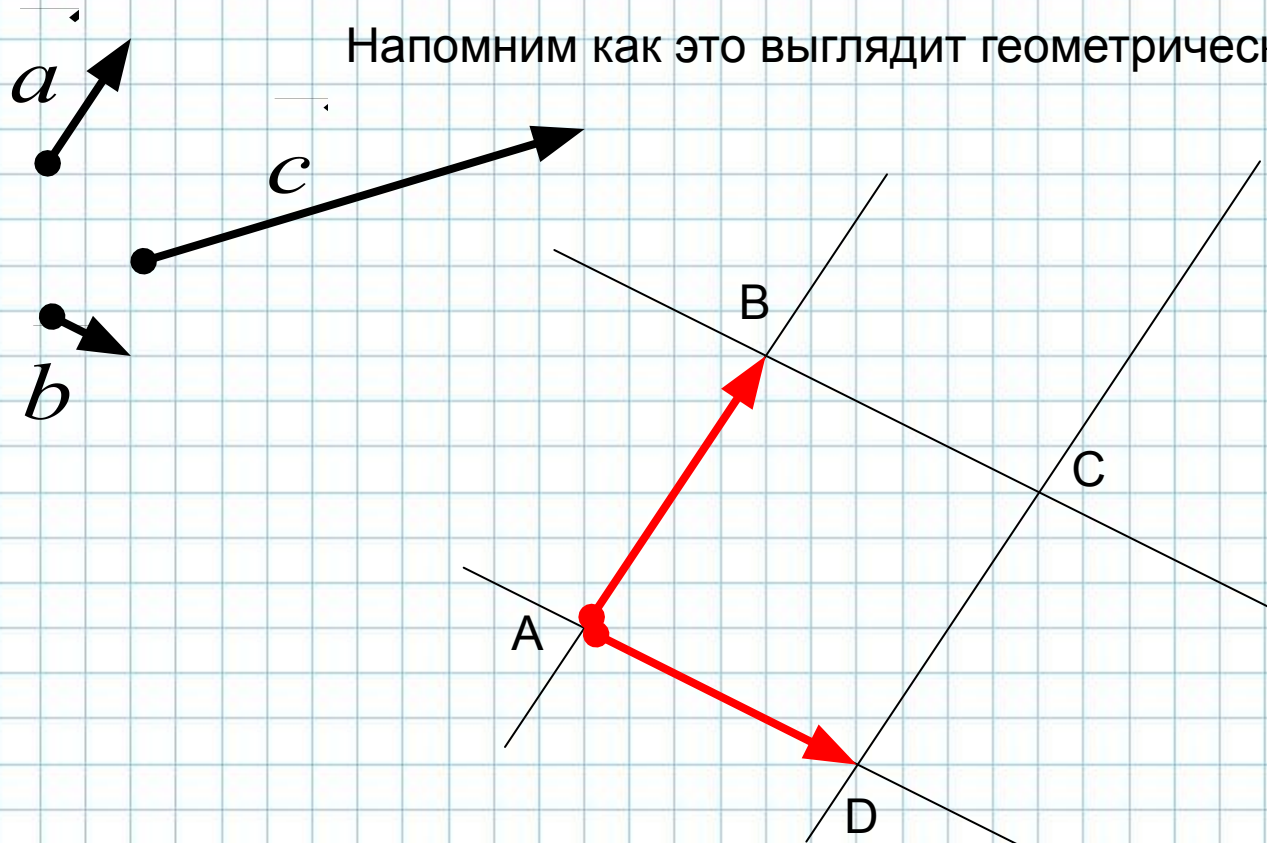
$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \frac{m_1}{x} = \frac{n_1}{y} = \frac{k_1}{z} \quad \overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$$

Самостоятельно разберитесь, когда  $a \uparrow\uparrow b$  и  $a \uparrow\downarrow b$ .

Для выяснения **компланарности** трех векторов необходимо, чтобы любой из этих векторов можно было разложить по двум оставшимся, т.е.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \alpha \Leftrightarrow \vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Напомним как это выглядит геометрически:



По правилу параллелограмма:  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ . Но  $\vec{AC} = \vec{c}$ ,  $\vec{AB} \parallel \vec{a}$ ,  $\vec{AD} \parallel \vec{b}$ .

Значит,  $\vec{AB} = x \cdot \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = y \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}, \quad x, y \in \mathbf{R}.$

В данном конкретном случае:  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ , если аппликаты всех точек равны.

Аналитически выяснить компланарность трех векторов, заданных координатами, можно решая систему:

$$\begin{cases} m_3 = xm_1 + ym_2, & \vec{a}(m_1; n_1; k_1) \\ n_3 = xn_1 + yn_2, & \vec{b}(m_2; n_2; k_2) \\ k_3 = xk_1 + yk_2, & \vec{c}(m_3; n_3; k_3) \end{cases}$$

Если система имеет единственное решение, то векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны.

Любой вектор пространства можно разложить по трем некомпланарным векторам, т.е.

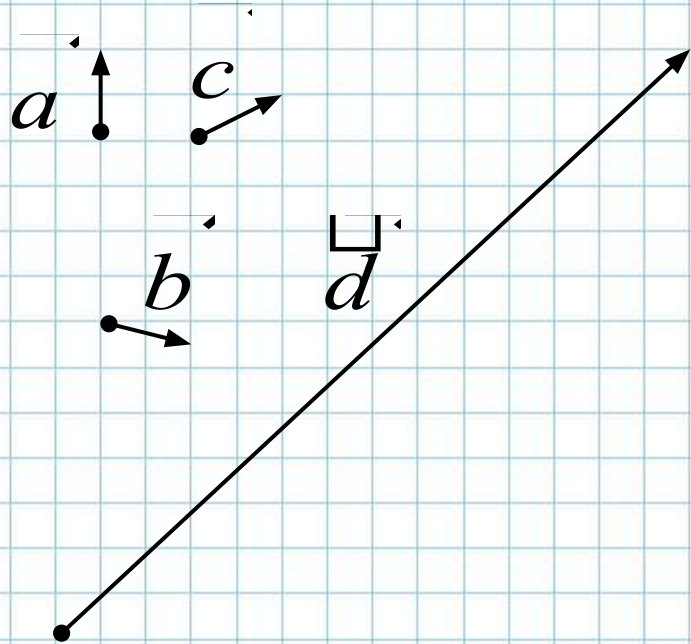
$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}, \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \notin \alpha; \quad x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Аналитически разложение любого вектора  $\vec{d}(m_4; n_4; k_4)$  по трем некомпланарным векторам  $\vec{a}(m_1; n_1; k_1)$ ,  $\vec{b}(m_2; n_2; k_2)$  и  $\vec{c}(m_3; n_3; k_3)$  сводится к решению системы:

$$\begin{cases} m_4 = xm_1 + ym_2 + zm_3, \\ n_4 = xn_1 + yn_2 + zn_3, \\ k_4 = xk_1 + yk_2 + zk_3, \end{cases}$$

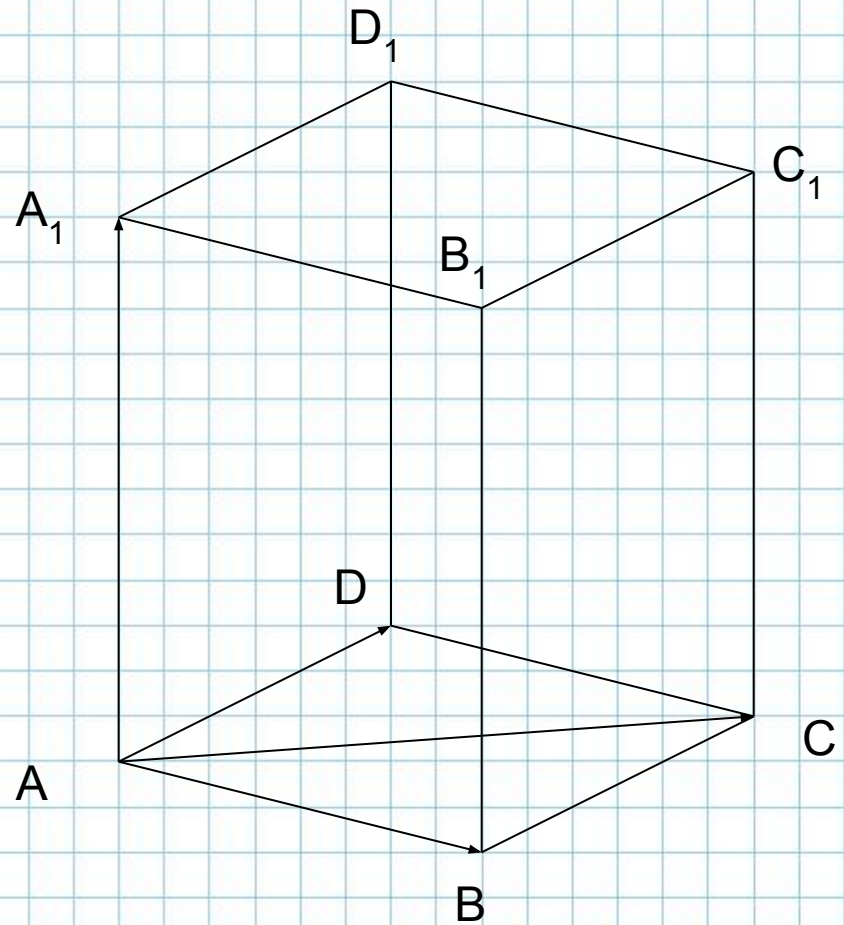
А решение этой системы – числа  $x, y$  и  $z$  являются коэффициентами разложения вектора  $\vec{d}$  по трем векторам  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

Геометрически это означает возможность построения параллелепипеда, в котором диагональ задается вектором  $\vec{d}$ , а все три измерения – векторами, коллинеарными векторам  $a, b$  и  $c$ .

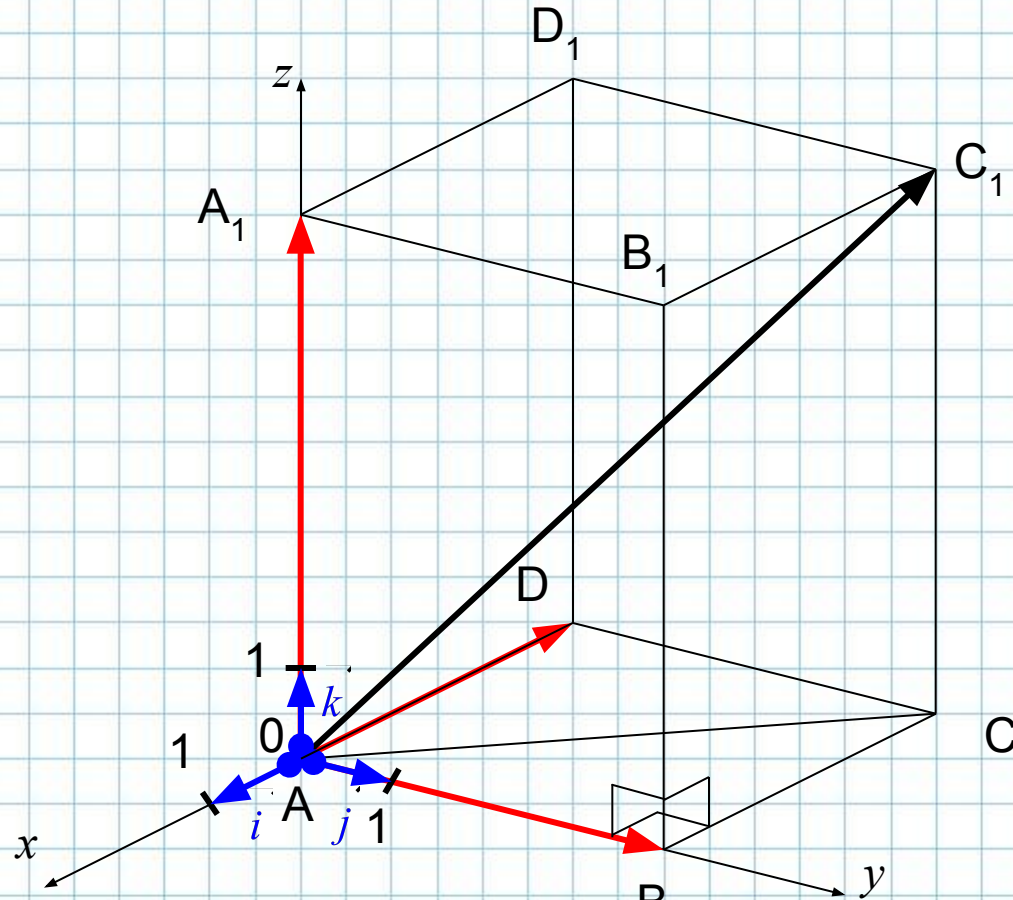


$$\vec{AC}_1 = \vec{AA}_1 + \vec{AB} + \vec{AD}$$

$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$$



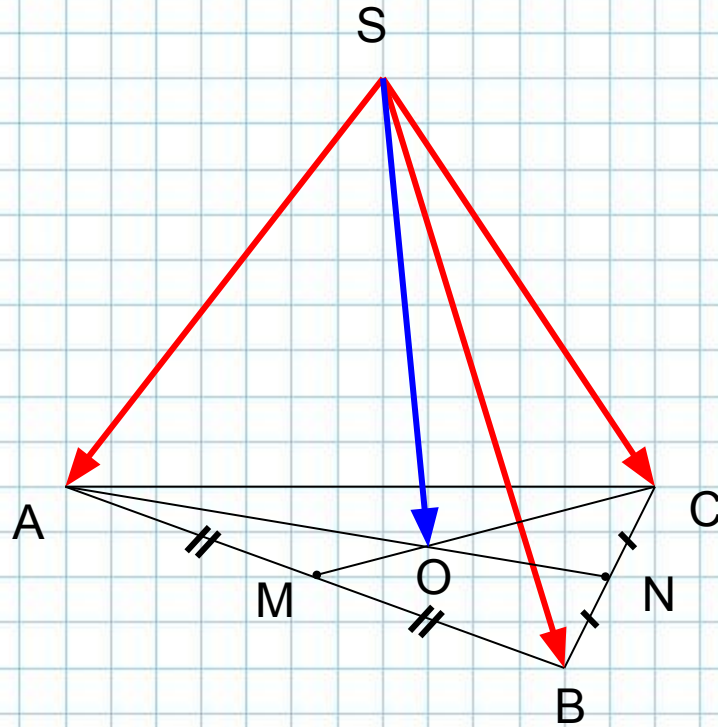
В прямоугольной системе координат в пространстве векторы  $i(1;0;0)$ ,  $j(0;1;0)$  и  $k(0;0;1)$  называются **единичными координатными векторами** (или **ортами**). Т.к. эти векторы являются некопланарными, то любой вектор пространства можно разложить по ортам. При этом образуется прямоугольный параллелепипед, а коэффициенты разложения – координаты данного вектора.



$$\overline{AC_1} = \overline{AD} + \overline{AB} + \overline{AA_1} = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k \Rightarrow \overline{AC_1}(x; y; z)$$

В данном случае  $x=-3$ ;  $y=4$ ;  $z=6$ , т.е. координаты вектора  $\overline{AC_1}(-3; 4; 6)$ .

Умение выполнять действия с векторами и понимание вышеизложенного материала позволяет решать некоторые геометрические задачи с помощью векторов. Этот способ получил название **векторного способа решения задач**. Мы познакомимся с ним на следующих уроках... .



Для любого тетраэдра:  $\vec{SO} = \frac{1}{3} (\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC})$