

# Лекция 4

***Взаимное положение прямой и  
плоскости, двух плоскостей.  
Позиционные задачи***

# Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей

## *Прямая и плоскость:*

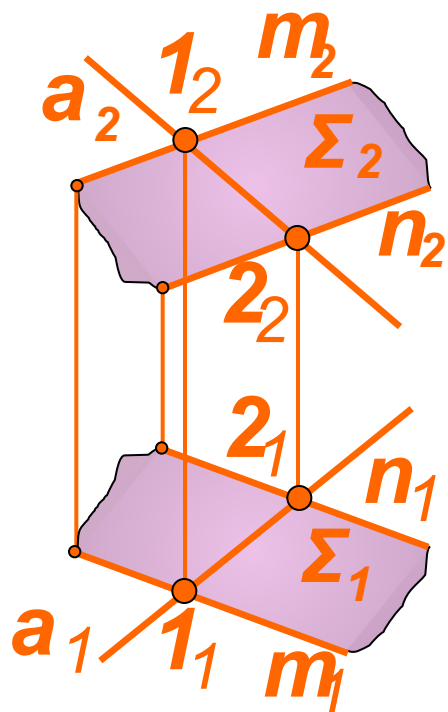
- Прямая **принадлежит** плоскости (см. тема 3): *все точки прямой являются точками плоскости*
- Прямая **параллельна** плоскости: *общих точек нет*
- Прямая **пересекает** плоскость: *одна общая точка*

## *Две плоскости:*

- Плоскости **параллельны**: *общих прямых нет*
- Плоскости **пересекаются**: *одна общая прямая*

# Принадлежность прямой плоскости

1



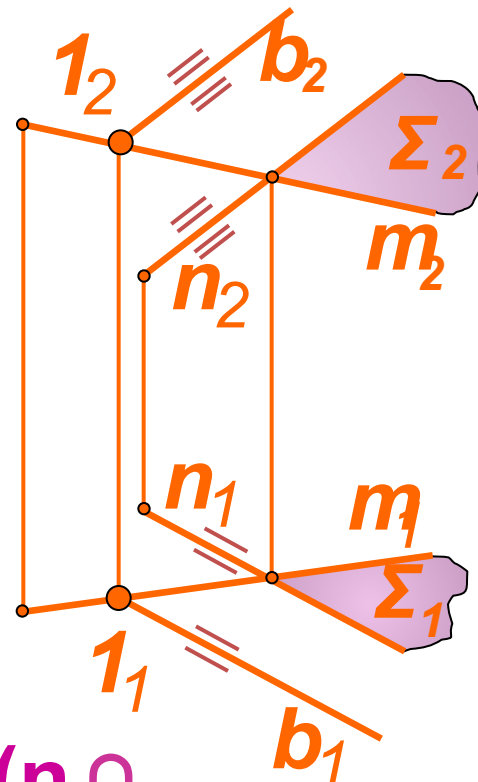
$\Sigma(n \parallel$   
 $(m) \in m) \in \Sigma;$   
 $(2 \in (1) \vee 2 \in \Sigma) \Rightarrow$

$a \in \Sigma$

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит:

- 1) через две точки этой плоскости;
- 2) через одну точку плоскости и параллельно какой-нибудь прямой этой плоскости

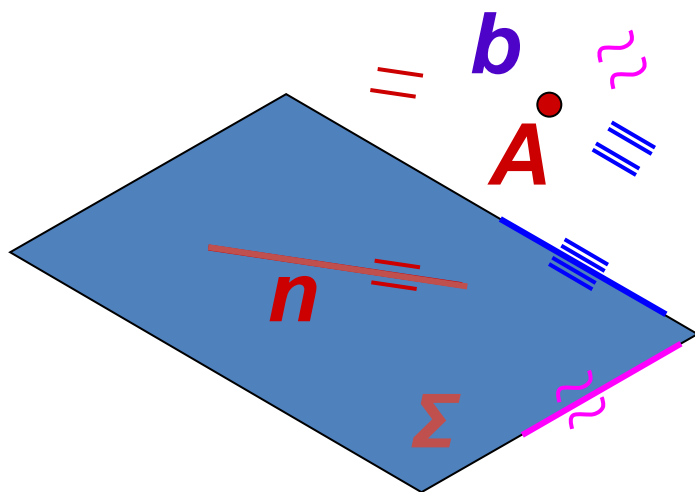
2



$\Sigma(n \cap$   
 $(m) \in m) \in \Sigma;$   
 $b \parallel m \Rightarrow$

$b \in \Sigma$

# Параллельность прямой и плоскости



**Признак параллельности:**

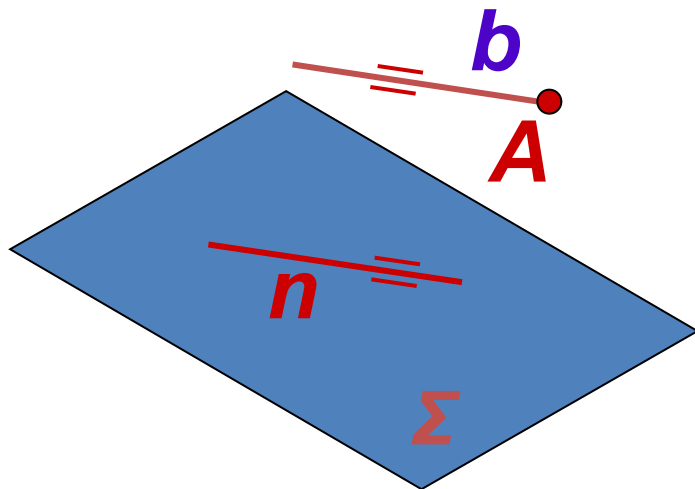
Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости

$$b \parallel n \in \Sigma \Rightarrow b \parallel \Sigma$$

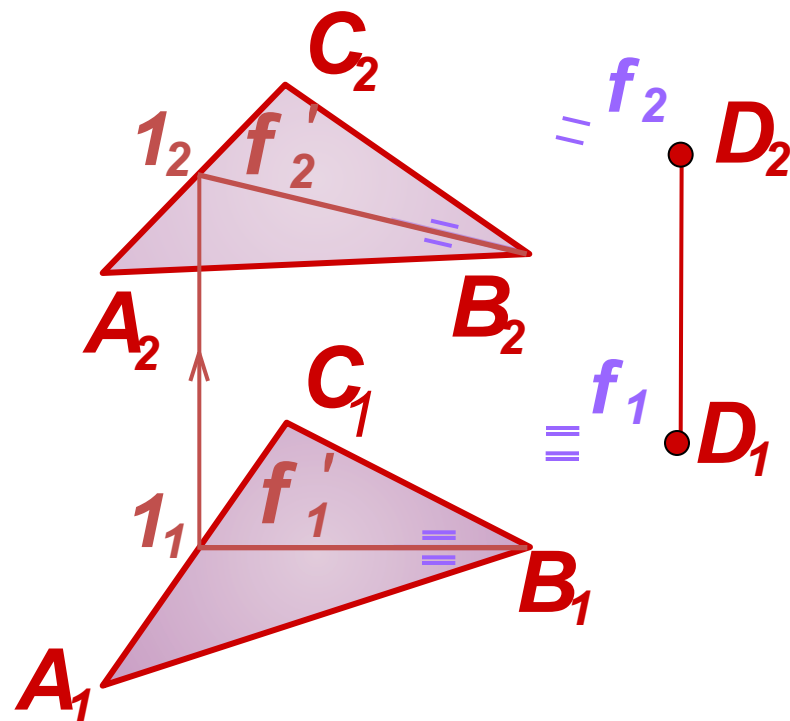
Через точку  $A$  в пространстве можно провести бесчисленное множество прямых линий, параллельных данной плоскости  $\Sigma$ . Для однозначного решения проведем в плоскости прямую  $n$

# Параллельность прямой и плоскости

Задача: Через точку  $D$  провести фронталь, параллельную плоскости  $\Sigma(\triangle ABC)$

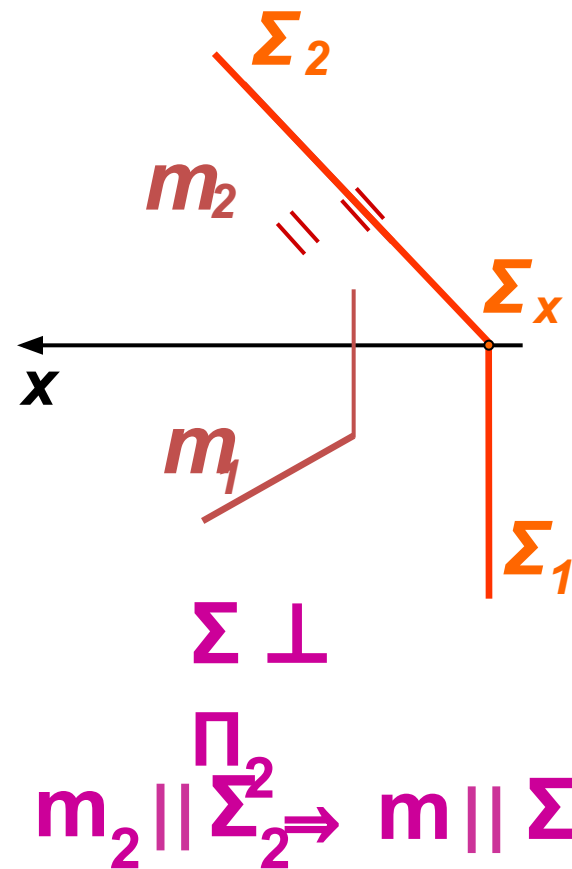
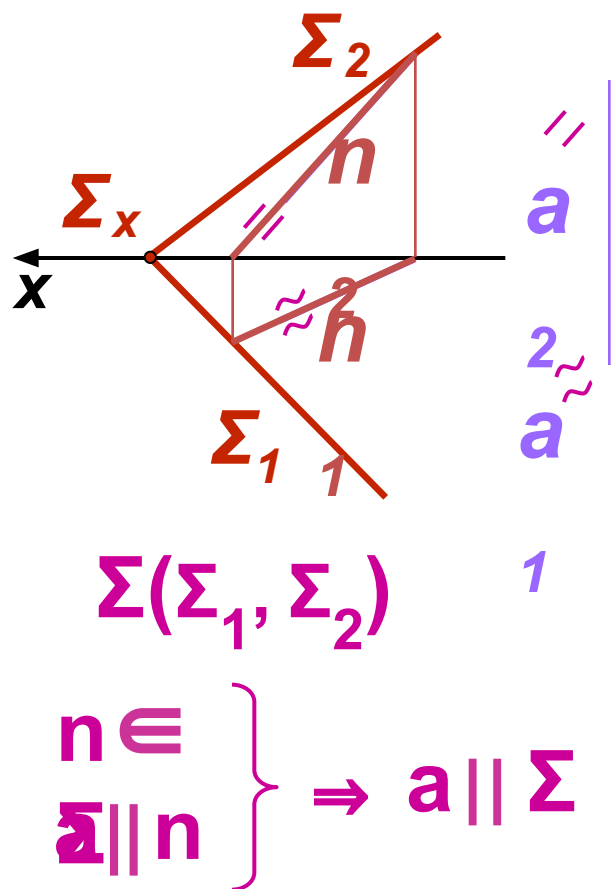


$$b \parallel n \in \Sigma \Rightarrow b \parallel \Sigma$$



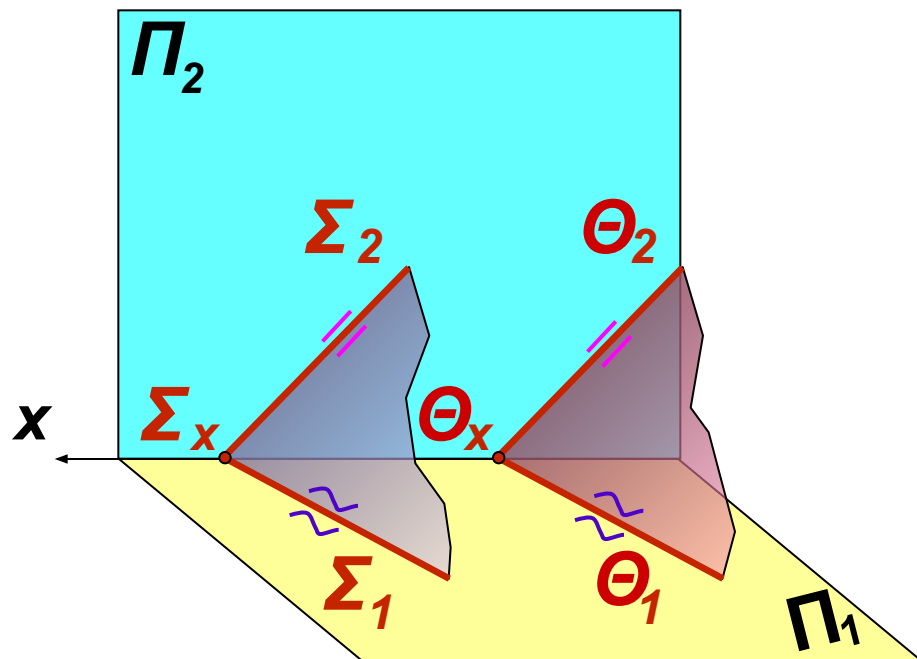
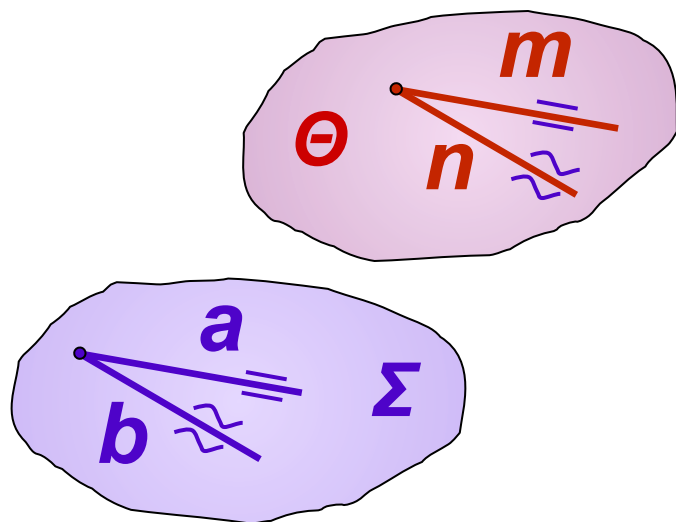
Построим в плоскости  $\Sigma(\triangle ABC)$  вспомогательную фронталь  $f'$ . Через точку  $D$  проводим фронталь  $f$ , проекции которой параллельны одноименным проекциям фронтали  $f'$ . Получаем искомую прямую  $f$ , параллельную заданной плоскости  $\Sigma(\triangle ABC)$

# Параллельность прямой и плоскости



Если прямая  $a$  параллельна плоскости общего положения, то в плоскости строят вспомогательную прямую  $n$  и выполняют условие параллельности одноименных проекций прямых  $a$  и  $n$ . Если плоскость проецирующая, то одна из проекций искомой прямой  $m$  параллельна следу плоскости

# Параллельность двух плоскостей



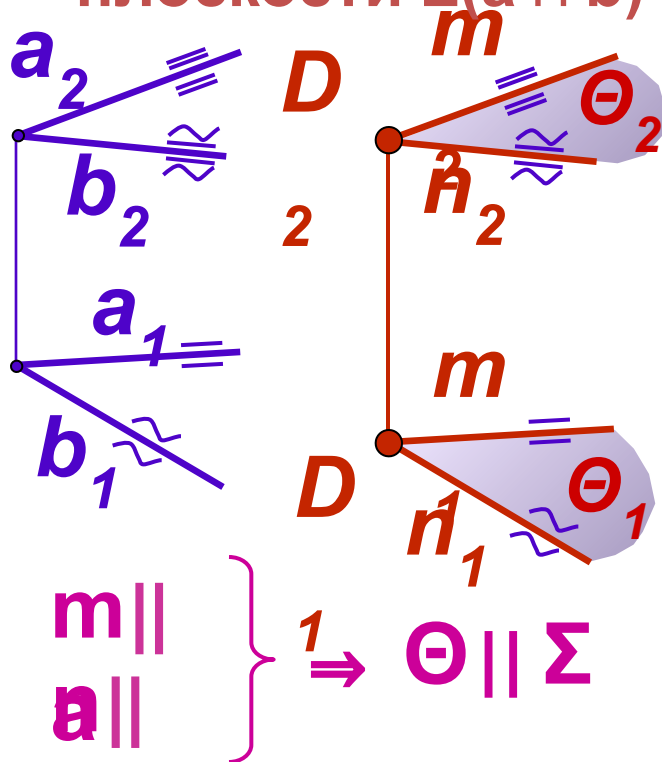
$$\left. \begin{array}{l} a \parallel m \\ b \parallel n \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \parallel \Theta$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_1 \parallel \Sigma_2 \\ \Theta_1 \parallel \Theta_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \parallel \Theta$$

Признак параллельности: плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. В качестве прямых могут быть использованы следы плоскостей

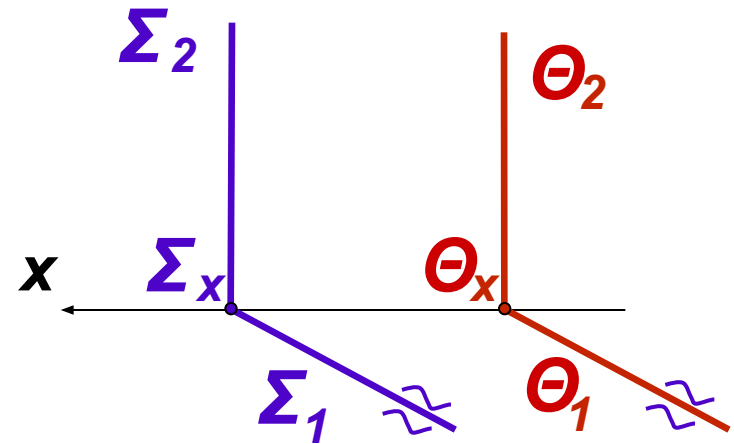
# Параллельность двух плоскостей

Задача 1: Через точку  $D$  провести плоскость  $\Theta$ , параллельную плоскости  $\Sigma(a \cap b)$



1. Искомая плоскость  $\Theta$  задается двумя пересекающимися прямыми  $m$  и  $n$ , проекции которых соответственно параллельны проекциям прямых  $a$  и  $b$  заданной плоскости.
2. У параллельных плоскостей  $\Theta$  и  $\Sigma$  следы параллельны

Задача 2: Построить плоскость  $\Theta \parallel \Sigma \perp \Pi_1$

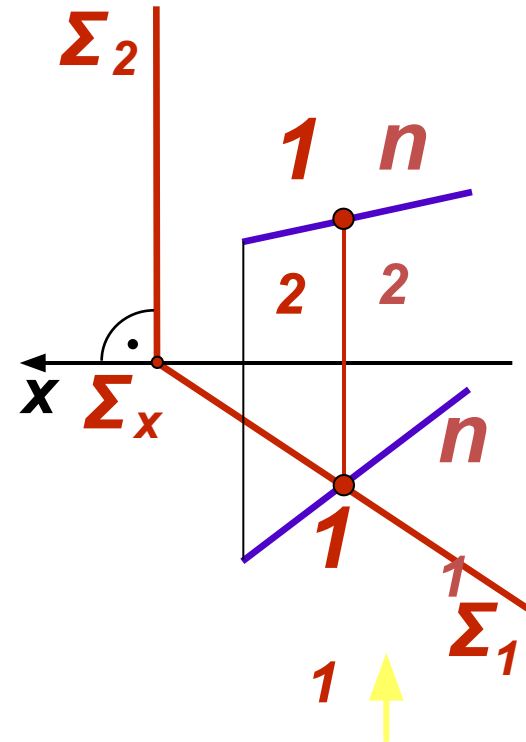
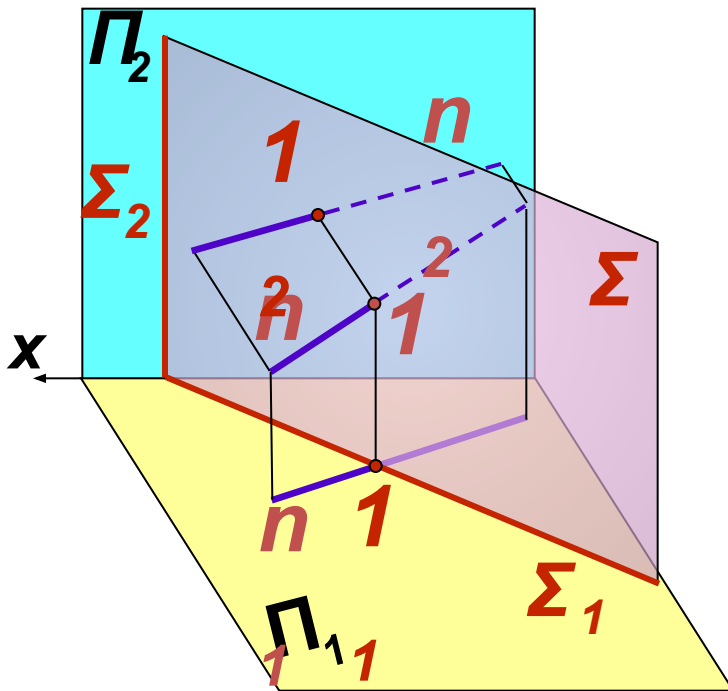


$$\Theta_1 \parallel \Sigma \Rightarrow \Theta \parallel \Sigma$$

1

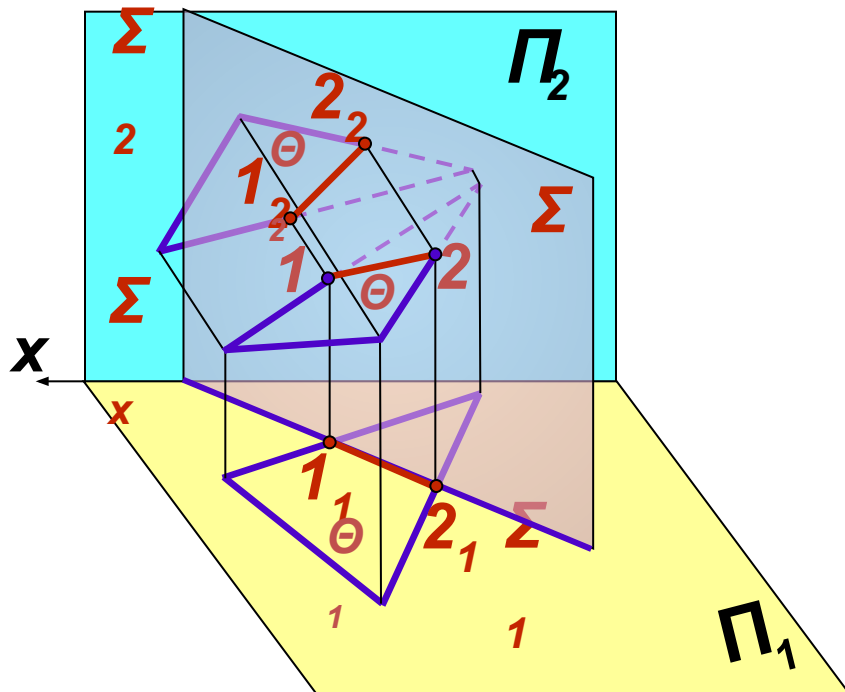


# Пересечение прямой с проецирующей плоскостью



Одна из проекций точки 1 (пересечения прямой  $n$  с проецирующей плоскостью  $\Sigma$ ) находится на пересечении следа плоскости  $\Sigma_1$  с проекцией прямой  $n_1$ . Видимость прямой определяется по направлению взгляда наблюдателя, плоскость считается непрозрачной

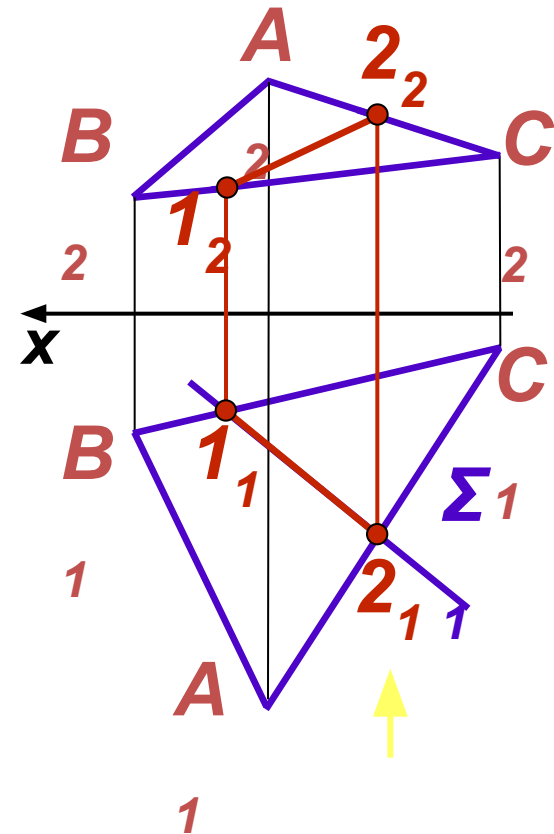
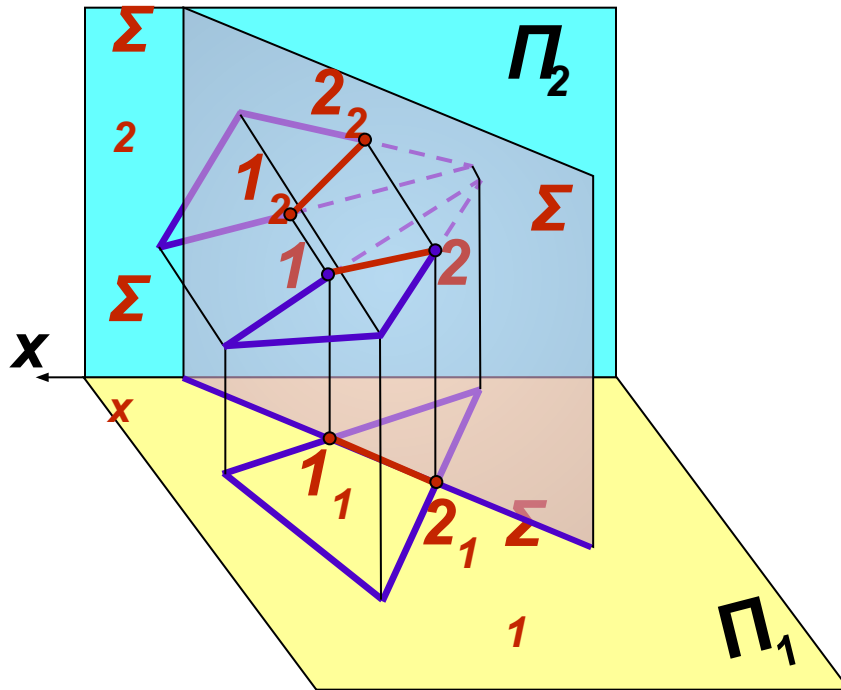
# Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью



$\Sigma$  – горизонтально проецирующая плоскость;  
 $\Theta(\Delta)$  – плоскость общего положения

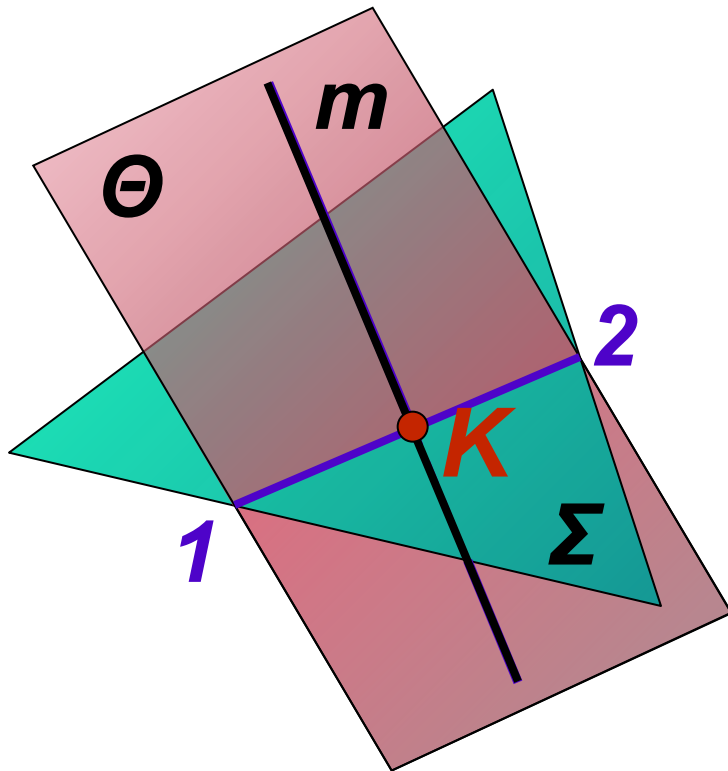
Две плоскости пересекаются по прямой линии. Необходимо найти две точки искомой линии пересечения, которые принадлежат одновременно двум плоскостям

# Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью



Горизонтально проецирующая плоскость  $\Sigma$  проецируется на  $\Pi_1$  в виде следа, которому принадлежит проекция  $1_1 2_1$  искомой линии пересечения. Часть треугольника, находящаяся перед плоскостью  $\Sigma$ , будет видима на  $\Pi_2$ . Линия  $1_2 2_2$  служит границей видимости

# Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения

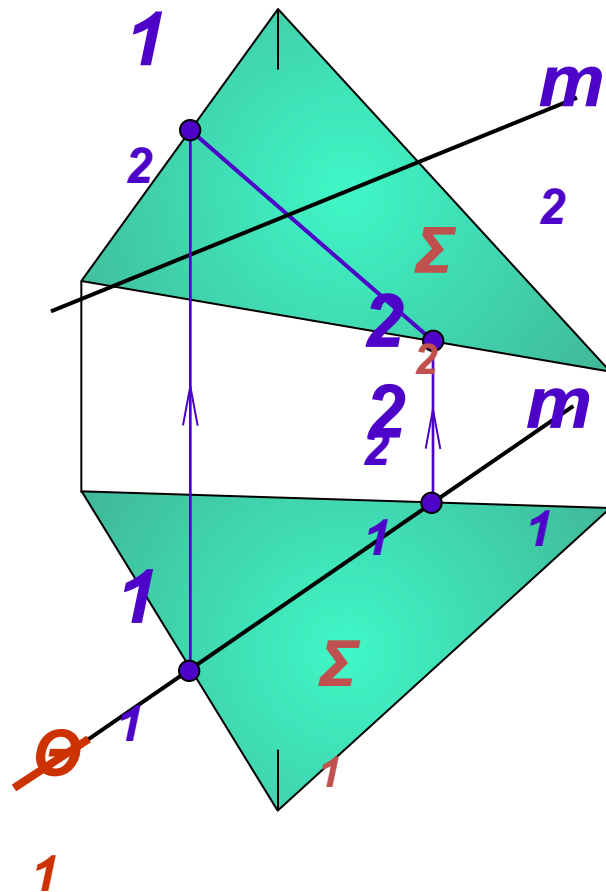


Алгоритм:

1.  $m \in \Theta$
2.  $\Theta \cap \Sigma = 1-2$
3.  $1-2 \cap m = K$
4. Видимость  $m$

1. Через данную прямую  $m$  проводят вспомогательную плоскость  $\Theta$ .
2. Находят линию пересечения 1-2 плоскостей: заданной  $\Sigma$  и вспомогательной  $\Theta$ .
3. На полученной линии пересечения 1-2 находят общую точку  $K$  с заданной прямой  $m$ .
4. Определяют видимость прямой  $m$

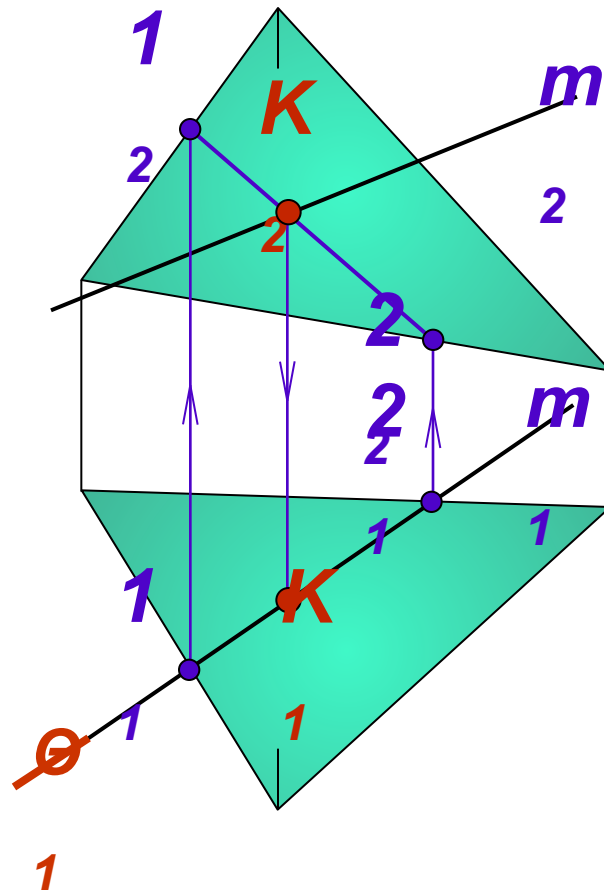
# 1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1.  $m \in \Theta$ ;  
 $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2.  $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1-2$ ;  
 $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$

В качестве вспомогательной выбираем горизонтально проецирующую плоскость  $\Theta$  ( $\Theta_1$ ), проходящую через заданную прямую  $m$ . Строим горизонтальную  $1_1 2_1$ , а затем фронтальную  $1_2 2_2$  проекции линии пересечения вспомогательной плоскости  $\Theta$  с данным треугольником  $\Sigma$

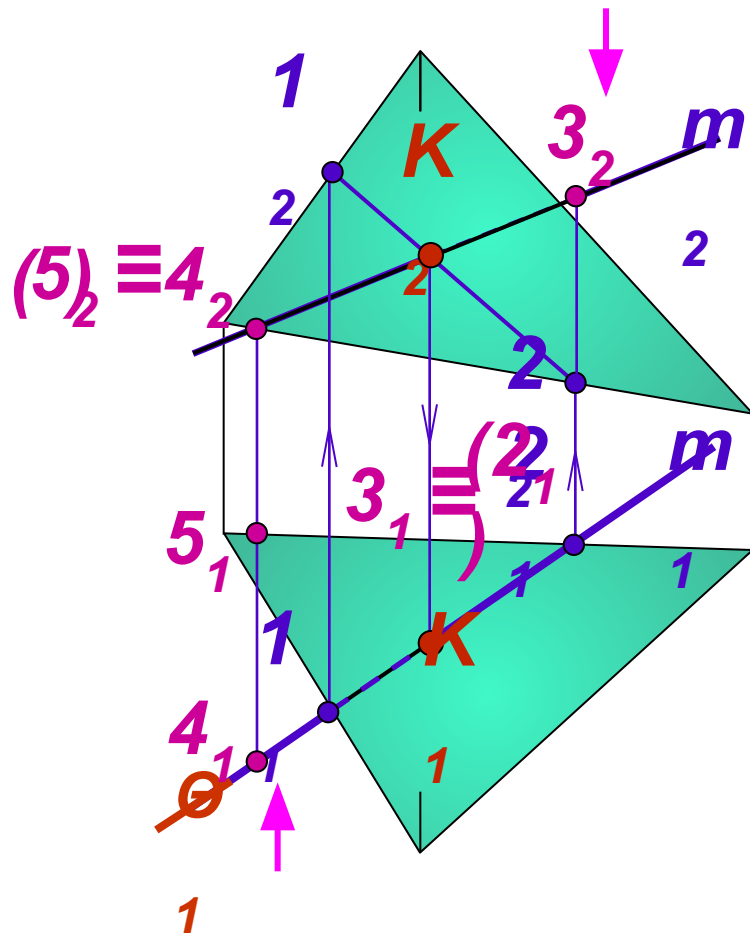
# 1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1.  $m \in \Theta$ ;  
 $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2.  $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1-2$ ;  
 $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$
3.  $1-2 \cap m = K$ ;  $K_2 \rightarrow K_1$

Находим фронтальную проекцию  $K_2$  точки пересечения  $K$  линии 1-2 и данной прямой  $m$ . Горизонтальная проекция  $K_1$  искомой точки пересечения будет принадлежать горизонтальной проекции  $m_1$  прямой  $m$

# 1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1.  $m \in \Theta$ ;  
 $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2.  $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1-2$ ;  
 $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$
3.  $1-2 \cap m = K$ ;  $K_2 \rightarrow K_1$
4. Видимость  $m$   
 (по конкурирующим точкам)

Видимость горизонтальной проекции прямой определяют по горизонтально конкурирующим точками 3 и 2 ( $3 \in m$ ;  $2 \in \Sigma$ ). Видимость фронтальной проекции прямой определяют по фронтально конкурирующим точками 4 и 5 ( $4 \in m$ ;  $5 \in \Sigma$ ). Видимость прямой  $m$  меняется в точке