

ГАОУ ДПО СарИПКиПРО
III региональный конкурс творческих
работ по математике
«Математика в моей жизни»
Номинация «Бенефис одной задачи»

Задача и пять методов ее решения

Выполнила: Шатилова Виктория
Ученица 11 класса
МОУ «СОШ р.п. Красный Текстильщик
Саратовского района Саратовской области»
Научный руководитель: Свириденко О.В.



2011г

Введение

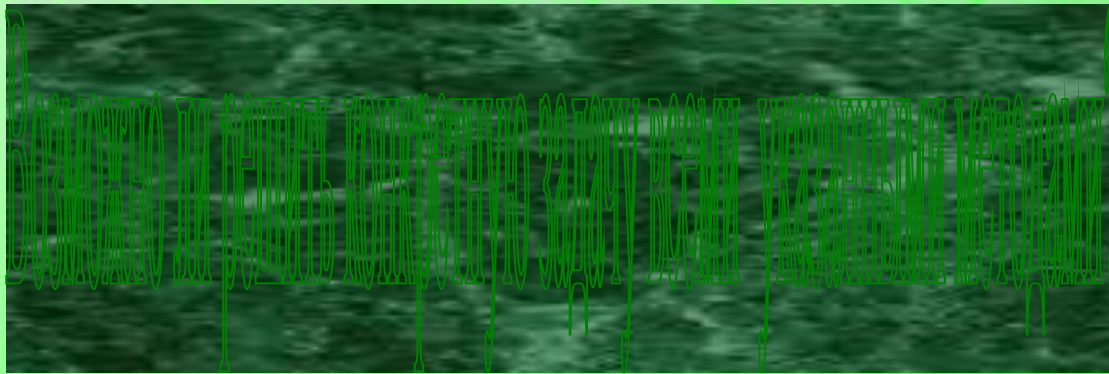
Для успешного изучения геометрии необходимо знать не только основные формулы и теоремы, но и владеть различными методами решения задач.

Пять основных методов, применяемых в решении задач:

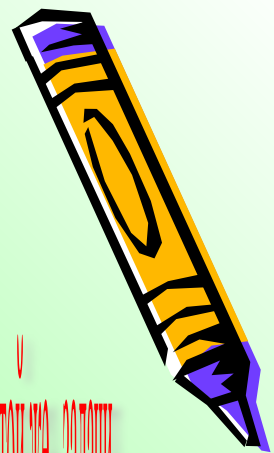


- ✓ **координатный**
- ✓ **векторный**
- ✓ **аналитический**
- ✓ **тригонометрический**
- ✓ **геометрический**

Гипотеза:



Цель работы:

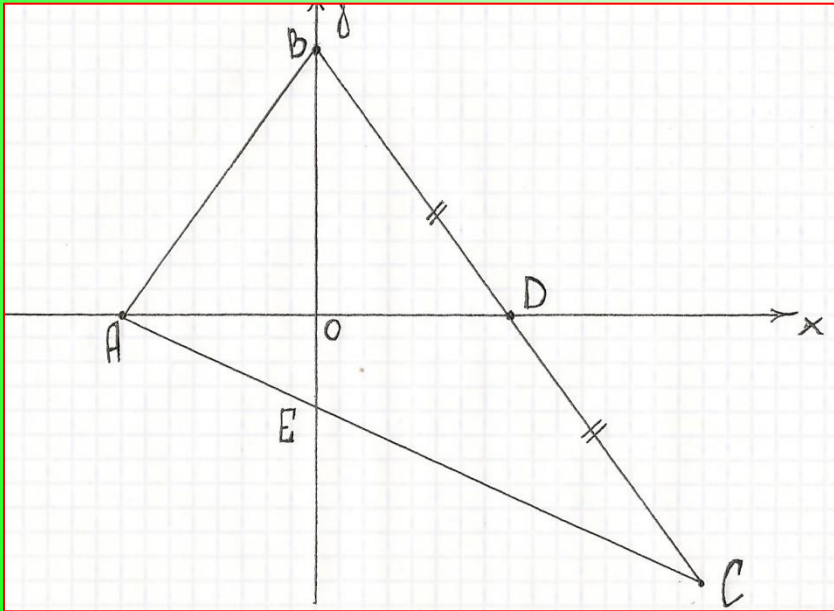


Задачи работы:

- ✓ испробовать разные методы на одной задаче;
- ✓ выявить отличительные черты, сильные и слабые стороны разных методов.



В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .

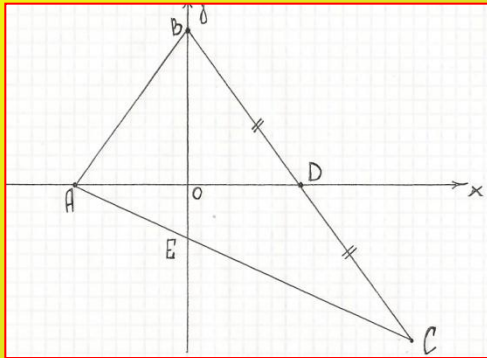
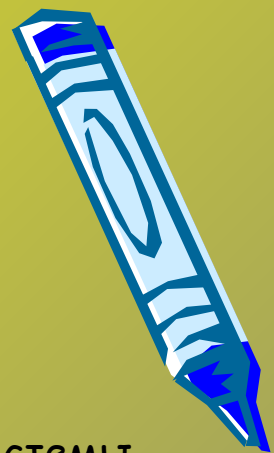


Приступая к решению задачи, сразу замечаем, что если O – точка пересечения биссектрисы BE и медианы AD , то прямоугольные треугольники ABO и DBO равны.

Поэтому $AO=OD=2$ и $AB=BD$, так что $BC=2AB$.

Способ первый:

Координатный



Примем точку O за начало прямоугольной системы координат, оси Ox придадим направление вектора OD и будем считать $|\overrightarrow{OD}|$ единицей масштаба.

В данной системе точки A, D, B имеют координаты:
 $A(-2;0), D(2;0)$ и $B(0;b)$.

Для того чтобы определить длины сторон треугольника ABC , надо найти число b . Выразим через b координаты точек C и E . Так как D - середина отрезка BC , то $C(4;-b)$. Для точки E имеем координаты $(0;y)$.

Вторую координату точки E найдем, пользуясь, тем что точка E принадлежит прямой AC . Уравнение прямой AC имеет вид: $\frac{x+2}{6} = \frac{y}{-b}$

Координаты точки $E(0;y)$ удовлетворяют этому уравнению. Подставив в него 0 вместо x , получим: $y = -\frac{1}{3}b$. Следовательно, $BE = \frac{4}{3}b$. По условию задачи $BE=4$, значит, $\frac{4}{3}b=4$, или $b=3$.

Итак, $A(-2;0), B(0;3), C(4;-3)$. Зная координаты вершин треугольника ABC , найдем его стороны:

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$



Способ второй:

Векторный

$$\vec{BA} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{c}.$$

Векторы \vec{BE} и \vec{AD} выразим через \vec{a} и \vec{c} . Так как $BC=2BD$, то $CE=2AE$ (по свойству биссектрисы треугольника). Пользуясь формулой деления отрезка в данном отношении, получим: $\vec{BE} = \frac{c+2a}{3}$

Согласно вычитанию векторов, имеем: $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}$

Длины векторов \vec{BE} и \vec{AD} известны. Пусть $|\vec{a}| = a$, тогда $|\vec{c}| = 2a$.
Вычислив скалярные квадраты векторов \vec{BE} и \vec{AD} ,

получим уравнения:

$$2a^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} = 36$$

$$2a^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} = 16$$

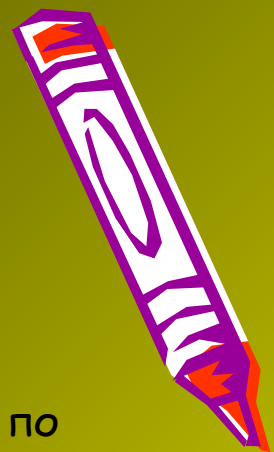
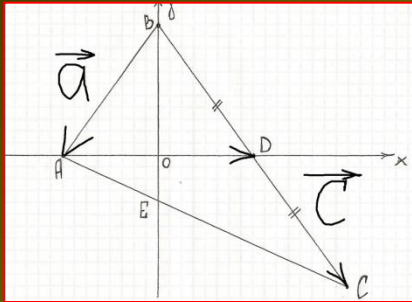
$$a^2 = 13, \vec{a} \cdot \vec{c} = 10.$$

Значит, $AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}$.

Найдем теперь через сторону AC , пользуясь векторной формулировкой теоремы косинусов:

$$AC^2 = 5a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Подставим найденные выше значения и получим: $AC = 3\sqrt{5}$



Способ третий:

Аналитический



Медиану AD и биссектрису BE треугольника ABC выразим через длины a, b, c сторон треугольника по формулам:

$$AD^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$BE^2 = ac - a_1c_1, \text{ где}$$

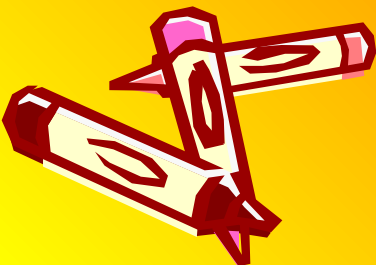
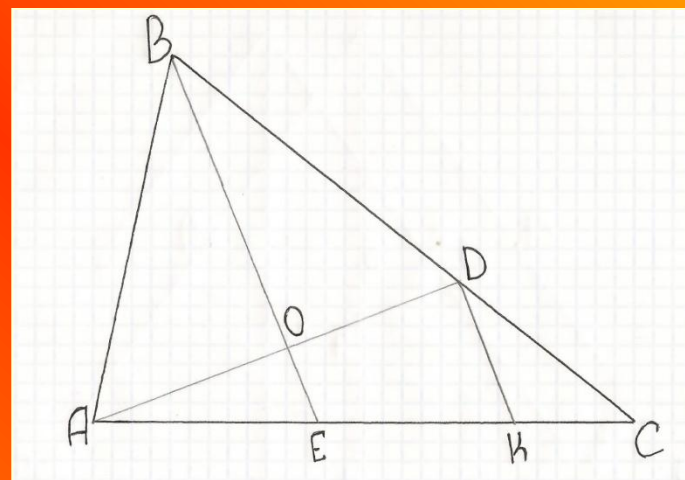
$$a_1 = CE, c_1 = AE$$

Пусть $AB=x$, $AE=y$, тогда $BC=2x$ и $CE=2y$.
Получим систему уравнений:

$$\frac{x^2 + 9y^2}{2} - x^2 = 16$$

$$x^2 - y^2 = 8$$

Отсюда, $x^2 = 13$, $y^2 = 5$. Значит, $AB = \sqrt{13}$, $AC = 3\sqrt{5}$



Способ четвертый:

Тригонометрический

Обозначим $AB=x$, угол $ABC=2\alpha$. По теореме косинусов из треугольников ABE и BCE находим:

$$AE^2 = x^2 + 16 - 8x \cos \alpha,$$

$$CE^2 = 4x^2 + 16 - 16x \cos \alpha.$$

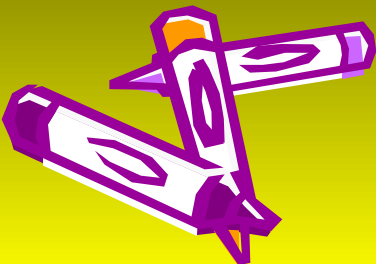
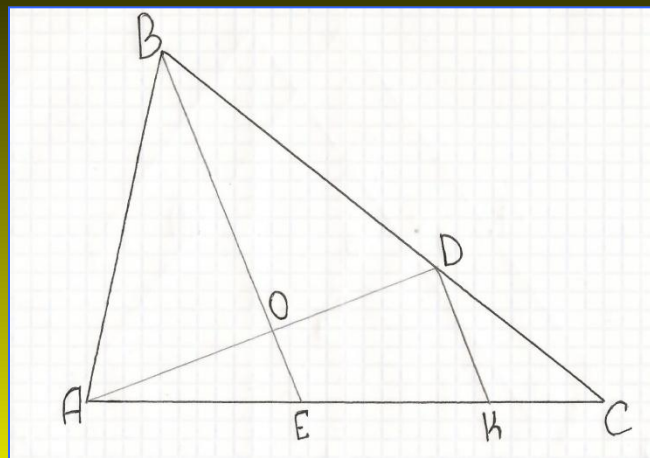
Учитывая, что $CE=2AE$ или $CE^2=4AE^2$,

получаем: $x \cos \alpha = 3$.

Но $x \cos \alpha = BO$, значит, $BO=3$ и $OE=1$.

Остается, пользуясь теоремой Пифагора, вычислить стороны треугольника ABC .

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$

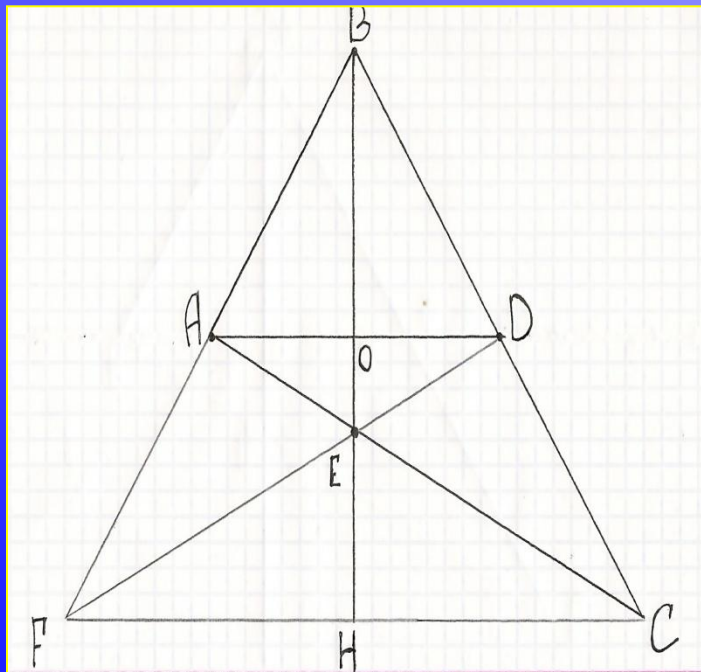


Геометрический способ

- 1. С помощью площадей**
- 2. С помощью осевой симметрии**
- 3. По теореме о средней линии треугольника**
- 4. По теореме Менелая**

Способ пятый:

С помощью площадей



Так как $AO=OD=2$, $BE=4$ и AD перпендикулярна BE , то площадь каждого из треугольников BAE и BDE равна 4. Площадь треугольника CDE так же равна 4, так как медиана ED делит треугольник BCE на два равновеликих треугольника.

Значит, площадь треугольника ABC равна 12.

По скольку AD -медиана треугольника ABC , то площадь треугольника ABD равна 6.

Остается применить формулу площади треугольника. Получим: $AO \cdot BO = 6$.

Но $AO=2$, значит, $BO=3$

Стороны треугольника ABC найдем по теореме Пифагора.

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$

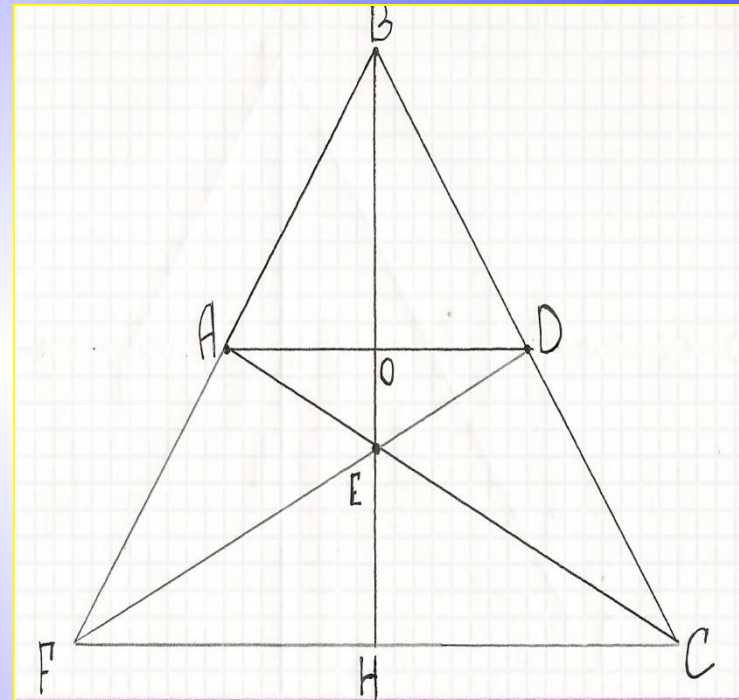


Способ шестой:

С помощью осевой симметрии

Точки A и D симметричны относительно биссектрисы BE . Построим еще точку, симметричную точке C относительно прямой BE . Для этого продолжим отрезок DE до пересечения с прямой AB и обозначим через F точку пересечения прямых AB и DE . Получим равнобедренный треугольник BCF , из равенства треугольника BEF и BEC следует, что $BF=BC$. Продолжим еще биссектрису BE до пересечения с CF в точке H . Тогда BH - биссектриса треугольника BCF , а следовательно, и его медиана. Таким образом, E - точка пересечения медиан треугольника BCF , и поэтому $EH=0,5BE=2$, а $BH=6$.

Средняя линия AD треугольника BCF делит медиану BH пополам, поэтому $BO=3$. Далее поступаем так же, как при решении задачи другими способами и получаем тот же ответ.

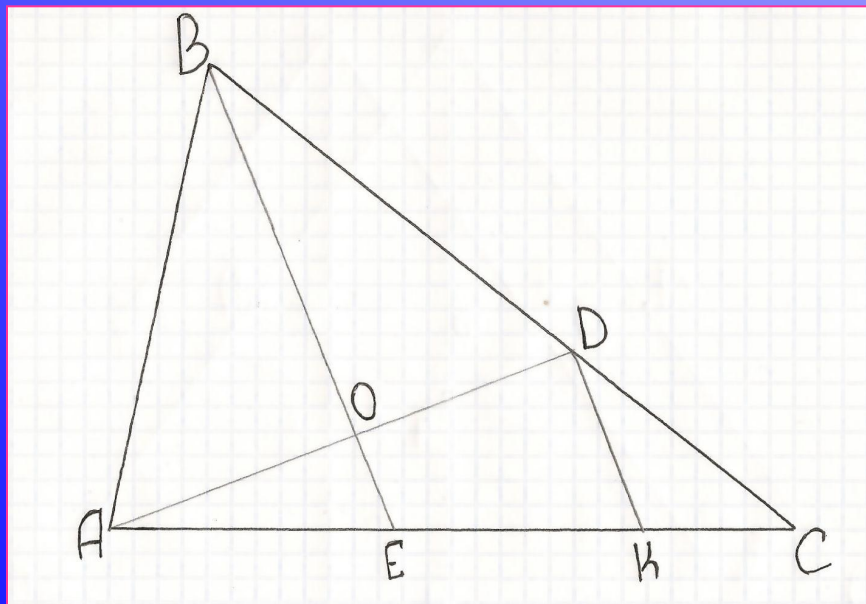


$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$



Способ седьмой:

По теореме о средней линии треугольника



Проведем среднюю линию DK треугольника BCE. Так как DK параллельна BE и $AO=OD$, то OE - средняя линия треугольника ADK.

Следовательно $OE = \frac{1}{2}DK, DK = \frac{1}{2}BE, \text{ т.е. } OE = \frac{1}{4}BE$
Так как $BE=4$, то $OE=1$ и $BO=3$

Из приведенного решения видно, что отношение BO/OE не зависит от отрезков BE и AD. Найти это отношение можно также, используя лишь тот факт, что AD - медиана треугольника ABC и $AO=OB$, причем без всяких вспомогательных построений.

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$



Способ восьмой:

По теореме Менелая



Секущая BE пересекает стороны треугольника ACD в точках E и O . По теореме Менелая из треугольника ACD имеем:

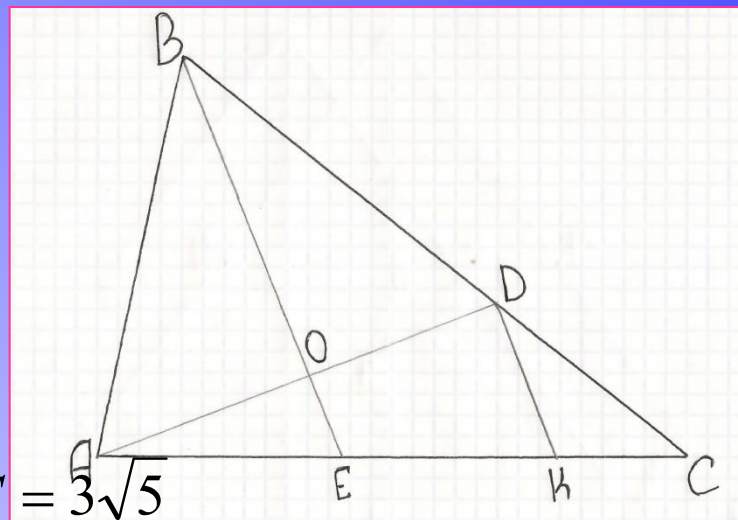
$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DO}{OA} = 1$$

а так как $\frac{CB}{BD} = 2, DO = OA$, то $AE = \frac{1}{2} EC$

Применив теперь теорему Менелая к треугольнику BCE и секущей AD , получим: $\frac{BO}{OE} \cdot \frac{EA}{AC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$

Но $AE/AC = 1/3$ и $CD = DB$.

Следовательно, $BO/OE = 3$.



$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$





Вывод:

В ходе работы мы рассмотрели пять методов решения конкретной задачи:

- ✓ координатный
- ✓ векторный
- ✓ аналитический
- ✓ тригонометрический
- ✓ геометрический

Как правило, основными методами решения планиметрических задач на вычисления являются алгебраические и тригонометрические методы. Но как видно из работы, геометрические методы оказались проще и изящнее, хотя к ним можно прийти только догадавшись провести некоторые вспомогательные линии. Таким образом, важно владеть геометрическими приемами, которые позволяют найти наиболее простое и красивое решение с помощью дополнительных построений.



Литература:



- Научно-теоретический и методический журнал МО РФ «Математика в школе» №3 1994
-