



Тема:

параллелограмм

!

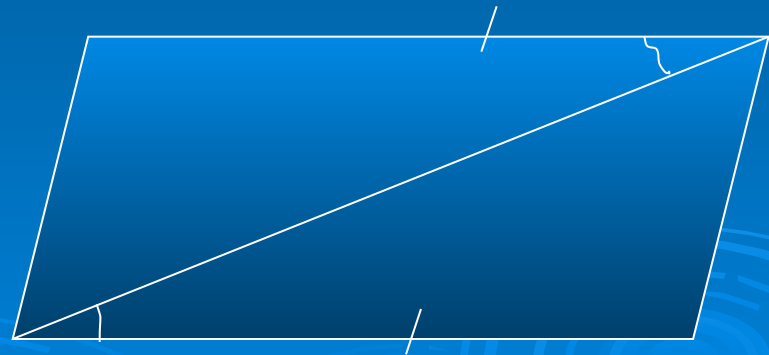
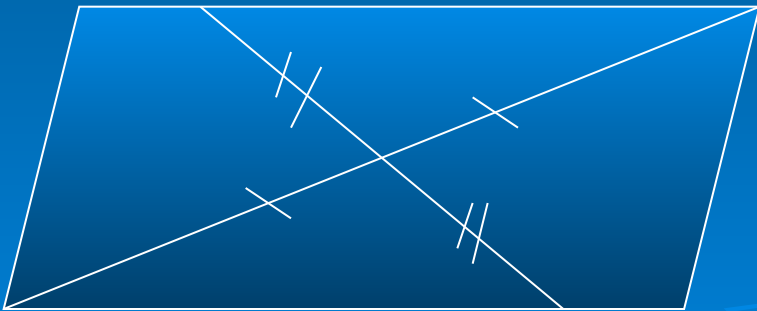
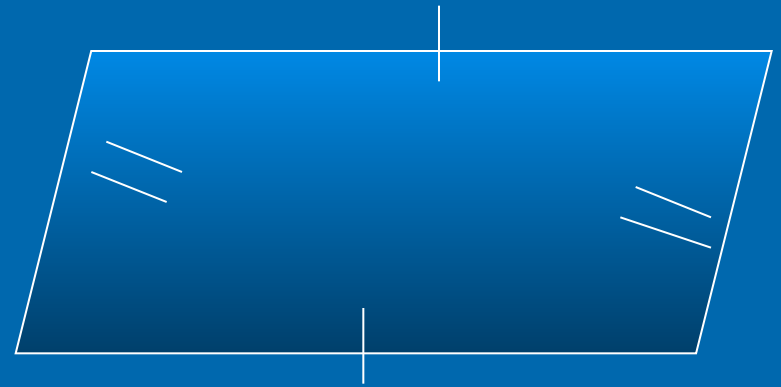


# Определение:

Определение: параллелограмм -  
четырёхугольник,  
у которого противоположные стороны  
попарно параллельны.



# Свойства параллелограмма:



# Свойства параллелограмма:

- Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
- Параллелограмм – выпуклый четырехугольник.
- У параллелограмма противоположные стороны равны, противоположные углы равны.

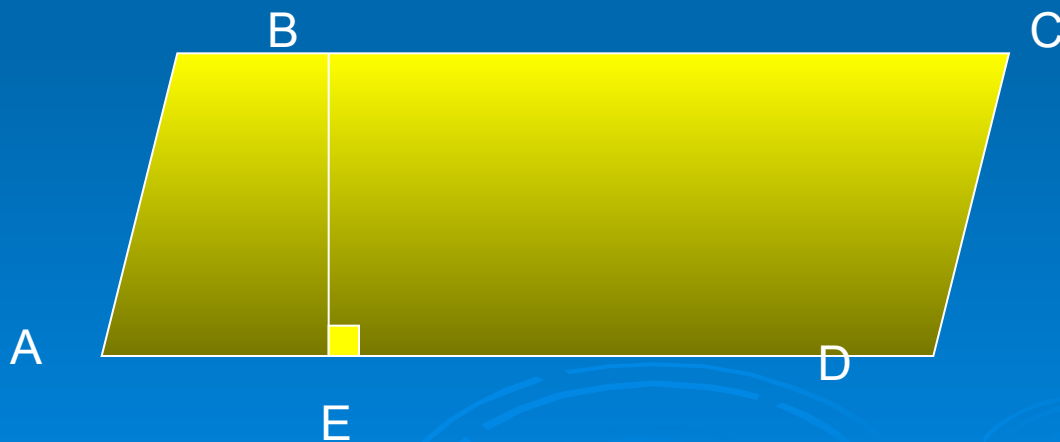


# Признаки параллелограмма:

1. Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник – параллелограмм.
2. Если у четырехугольника пара противоположных сторон параллельны и равны, то четырехугольник – параллелограмм.
3. Если у четырехугольника противоположные стороны попарно равны, такой четырехугольник – параллелограмм.
4. Если в четырехугольнике противоположные углы равны, такой четырехугольник – параллелограмм.

# Высота параллелограмма

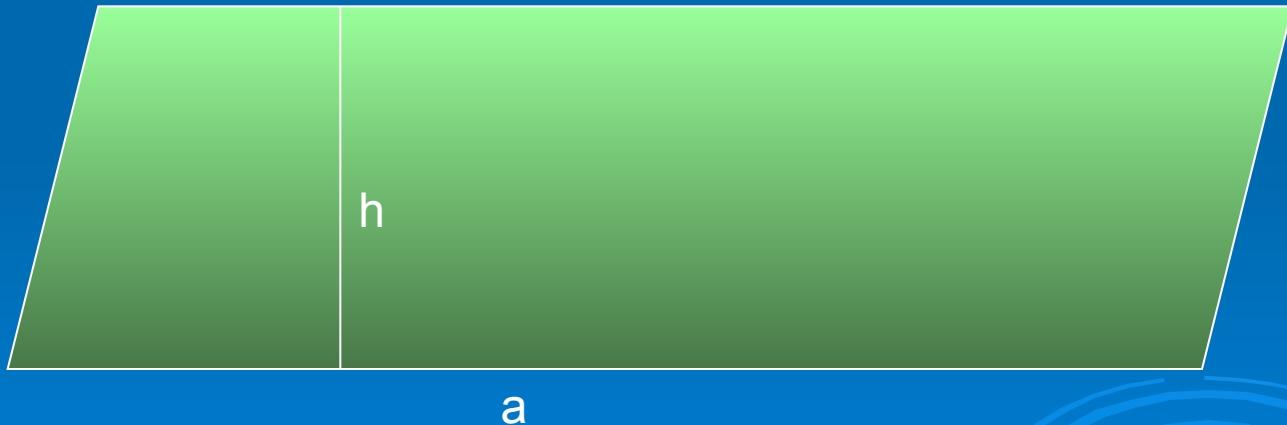
**Высотой параллелограмма**, проведенной к данной его стороне, называется перпендикуляр, опущенный из произвольной точки противоположной стороны к прямой, содержащей данную сторону.



BE – высота.

# Площадь параллелограмма:

- Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на проведенную к ней высоту:  $S = ah$ .



# Задачи.

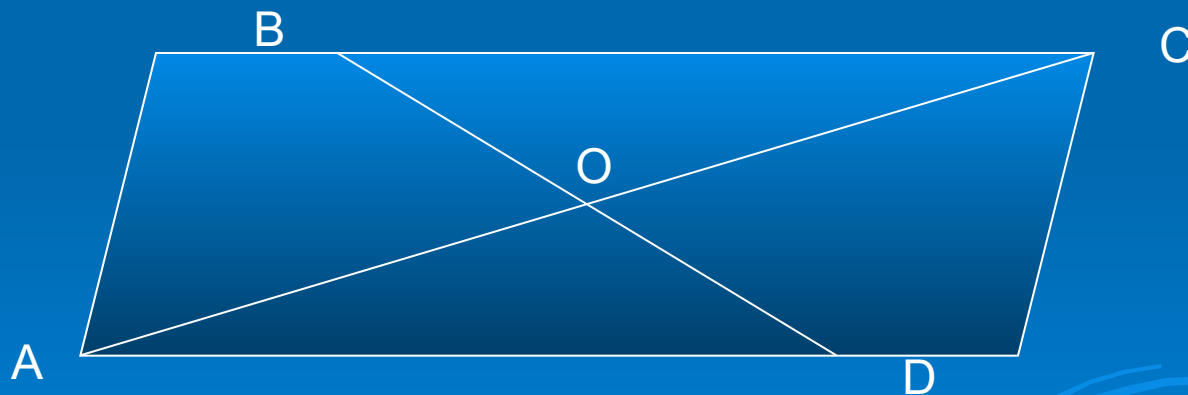
Часть «А».





## Задача №1

В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $BD$  равна 12 см,  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Чему равен отрезок  $DO$  (смотрите рисунок)?



# Решение:

Диагональ  $BD$  в параллелограмме  $ABCD$  точкой  $O$  делится пополам (свойство параллелограмма).

Значит  $BO=OD=6$  .

Ответ:  $DO=6$ .

## Задача №2.

В параллелограмме сумма двух углов равна  $132^\circ$ .

Найдите градусную меру каждого из этих углов.

# Решение:

Эти углы не могут быть прилежащими к одной стороне, так как в этом случае бы их сумма была бы равна  $180^\circ$ : Значит, эти углы противолежащие. По свойству противолежащих углов параллелограмма они равны и каждый из них равен  $66^\circ$ .

Ответ:  $66^\circ$ .

## Задача №3

Стороны параллелограмма 4 см и 6 см. Меньшая его высота равна 3 см. Вычислите вторую высоту параллелограмма.

# Решение:

Площадь параллелограмма равна  $S = 2ah_a$   
и  $S = ah_b$ . Так как  $S = ah_a = ah_b$ , то меньшая  
высота соответствует большей стороне, значит  
меньшая высота опущена на сторону длиной 6  
см. Значит  $S = 18 \text{ см}^2$ , а искомая высота равна

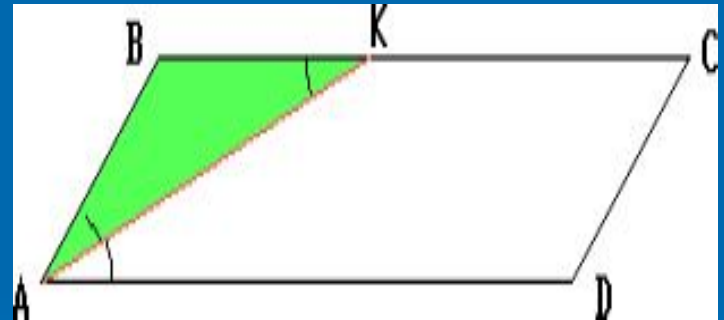
$$\frac{S}{b} \text{ и равна } 4,5 \text{ см.}$$

# Задача №4

Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 14 см.

Решение:

Пусть  $ABCD$  - данный параллелограмм,  $AK$  - указанная биссектриса,  $BK=7$ ,  $KC=14$ . Поскольку углы  $BKA$ ,  $KAD$ ,  $BAK$  равны, то треугольник  $ABK$  - равнобедренный. Поэтому  $AB=BK=7$ ,  $BC=BK+KC=21$ . Значит периметр равен 56.

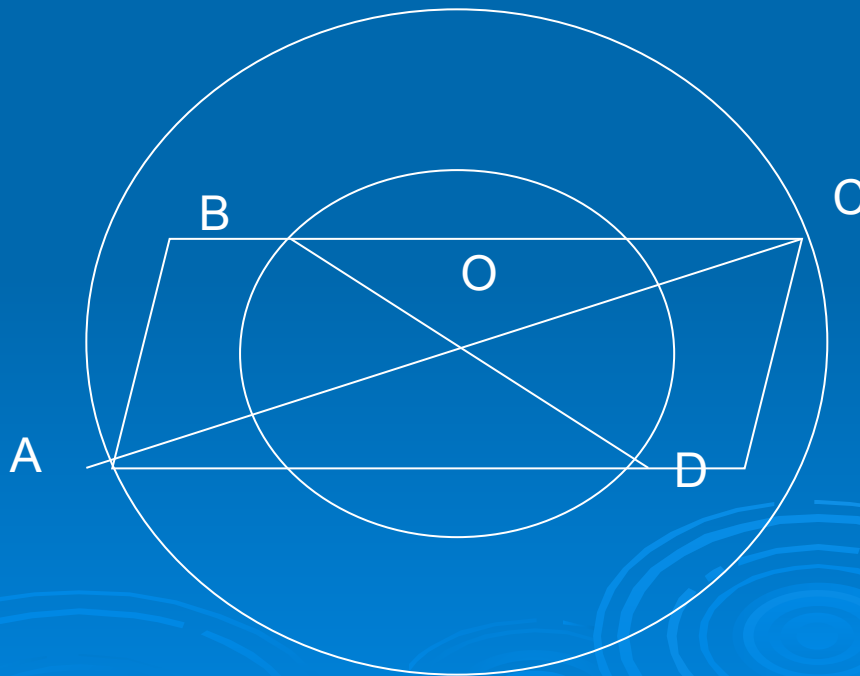


Часть "В"!



# Задача № 1

Даны две окружности с общим центром в точке  $O$ ,  $AC$  и  $BD$  — диаметры этих окружностей. Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм.



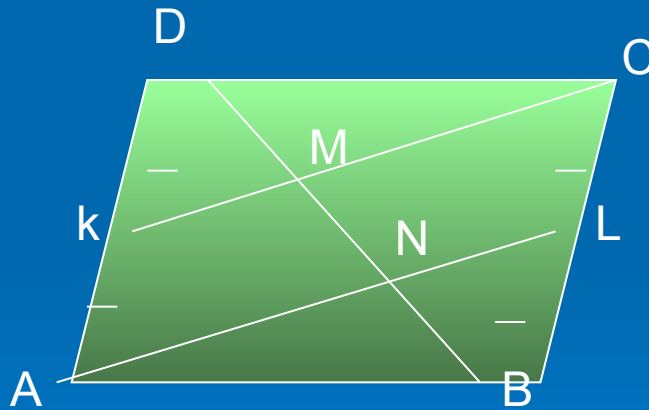
# Решение:

Доказательство. Так как  $O$  — центр концентрических окружностей, то диаметры  $AC$  и  $CD$  пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, значит,  $ABCD$  — параллелограмм.



# Задача №2

Точки  $K$  и  $L$  - середины сторон  $AD$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$ . Докажите, что прямые  $AL$  и  $CK$  делят диагональ  $BD$  на три равные части.



# Решение:

$KD = AK$ ,  $CL = BL$ . Так как  $ABCD$  - параллелограмм, то  $AD \parallel BC$ , следовательно,  $AK \parallel CL$ , причем  $AK = CL$ , так как  $AD = BC$ . Тогда по признаку параллелограмма имеем, что  $ALCK$  - параллелограмм. Следовательно,  $KM \parallel AN$  и  $NL \parallel CM$ . Причем  $KM$  проходит через середину  $AD$ , а  $NL$  - через середину  $BC$ . Значит,  $KM$  - средняя линия тр.  $ADN$ , а  $NL$  - средняя линия тр.  $BCM$ . Значит,  $DM = MN$  и  $BN = MN$  или  $DM = MN = BN$ .

Часть "С"!

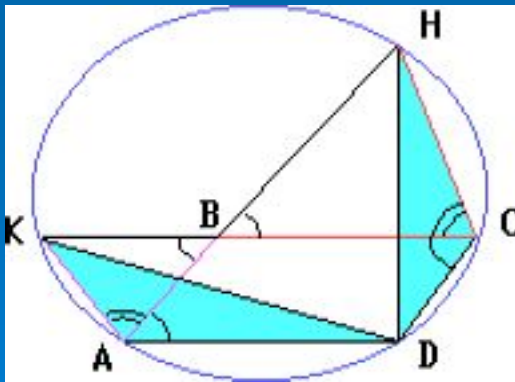


# Задача №1

Дан параллелограмм  $ABCD$  с острым углом при вершине  $A$ . На лучах  $AB$  и  $CB$  отмечены точки  $H$  и  $K$  соответственно так, что  $CH=BC$  и  $AK=AB$ .

а) Докажите, что  $DH=DK$ .

б) Докажите, что треугольники  $DKN$  и  $ABK$  подобны.



# Решение:

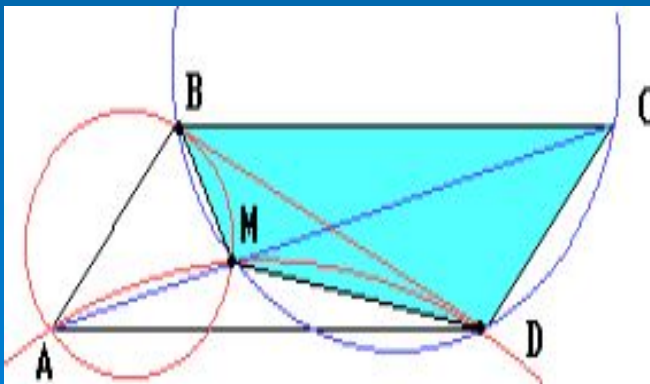
Из равенства треугольников  $HCD$  и  $DAK$  (по двум сторонам и углу между ними) следует равенство отрезков  $DH$  и  $DK$ .

Из равенства углов  $KAH$  и  $HCK$  следует, что точки  $A, C, H, K$  - лежат на одной окружности, а так как угол  $СКА$  и угол  $ADC$  в сумме  $180$  градусов, то на этой окружности лежит и точка  $D$ .

Следовательно, углы  $KAB$  и  $KDH$  при вершинах  $A$  и  $D$  равнобедренных треугольников  $ABK$  и  $DKH$  равны. Поэтому треугольники подобны.

# Задача №3

В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $AC$  больше диагонали  $BD$ . Точка  $M$  на диагонали  $AC$  такова, что около четырехугольника  $BCDM$  можно описать окружность. Докажите, что  $BD$  - общая касательная окружностей, описанных около треугольников  $ABM$  и  $ADM$ .



# Решение:

Поскольку углы  $\angle MBD$ ,  $\angle MCD$ ,  $\angle BAM$  равны, а точки  $A$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $BM$ , то  $BD$  - касательная к окружности, описанной около треугольника  $ABM$ .

## Задача № 4

В параллелограмме  $ABCD$  с углом  $A$ , равным  $60$  градусов, проведена биссектриса угла  $B$ , пересекающая сторону  $CD$  в точке  $E$ . В треугольник  $ECB$  вписана окружность радиуса  $R$ . Другая окружность вписана в трапецию  $ABED$ . Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

# Решение:

Пусть  $O_1$  и  $O_2$  - центры окружностей, вписанных в треугольник  $BCE$  и в  $ABED$  трапецию .

Треугольник  $O_1EO_2$  - прямоугольный, т. к. угол  $O_1EO_2$  - прямой (угол между биссектрисами смежных углов).

Треугольник  $BCE$  - равносторонний (углы  $BEC$ ,  $ABE$ ,  $EBC$  равны между собой и равны 60 градусам ),  $O_1E=2R$  , его высота  $EM$  равна  $3R$  . Поэтому  $O_2B=EM=3R$  . Тогда

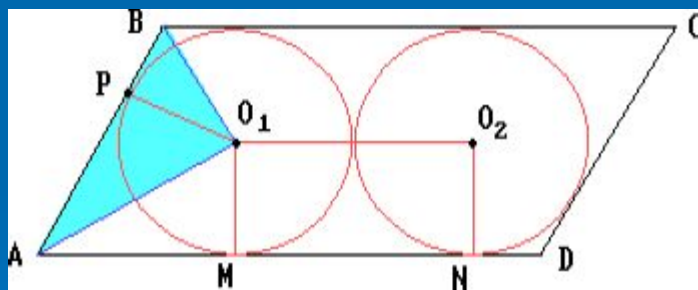
Следовательно,  $EO_2 = O_2 \cdot \operatorname{tg} \angle O_2BE = O_2 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = R\sqrt{3}$

Ответ:  $R\sqrt{7}$        $O_1O_2 = \sqrt{4R^2 + 3R^2} = R\sqrt{7}$



# Задача №5

В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Радиус одной из окружностей равен 1. Известно, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен  $\sqrt{3}$ . Найдите площадь параллелограмма.



# Решение:

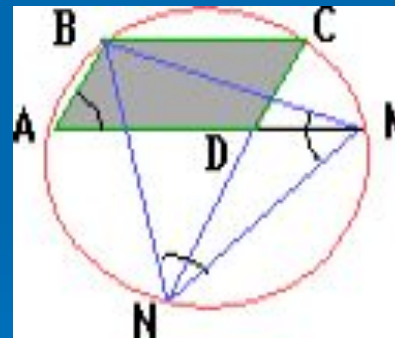
Окружности равны. Расстояние между точками их касания с большей стороной параллелограмма равно сумме их радиусов, т. е. 2. Меньшая сторона параллелограмма видна из центра касающейся ее окружности под прямым углом. Один из отрезков этой стороны от вершины до точки касания равен  $\sqrt{3}$ , значит второй равен  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Тогда большая сторона равна

Следовательно, площадь параллелограмма равна  $2\left(2 + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

$$2 + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}}$$

# Задача №6:

В параллелограмме  $ABCD$  острый угол равен  $\alpha$ . Окружность радиуса  $r$  проходит через вершины  $A, B, C$  и пересекает прямые  $AD$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$ . Найдите площадь треугольника  $BMN$ .



# Решение:

$\angle BAD = \alpha$ . Тогда  $\angle BNM = \angle BAD = \alpha$  и  $\angle BMN = \angle BCN = \alpha$ . Отсюда мы находим, что

$$BN = BM = 2r \cdot \sin \alpha, \quad \angle MBN = 180^\circ - 2\alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } S_{BMN} &= \frac{1}{2} \cdot BN \cdot BM \cdot \sin \angle NBM = \\ &= 2r^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \end{aligned}$$

*Работу выполнил*  
*Клоков Антон.*

